Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, З. Э. Муминов, Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 3, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:17:55

интеграла ни в какой области, содержащей вещественную часть фазового пространства, а значит, не имеет и вещественно-аналитического первого интеграла, что и требовалось доказать.

Автор благодарен В. И. Арнольду за предложенную задачу и А. И. Нейштадту и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Наука, М., 1974.
2. Непом М. C. R. Acad. Sci. Paris, **262**, 312–314 (1966).
3. Арнольд В. И. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №6, 50–57 (1982).
4. Арнольд В. И., Коркина Е. И. Вестник МГУ, сер. матем., мех., №3, 43–46 (1983).
5. Арнольд В. И. Об эволюции магнитного поля под действием переноса и диффузии. В сб.: Некоторые вопросы современного анализа. Изд-во МГУ, 1984, с. 8–21.
6. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков У. А., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Наука, М., 1991.
7. Зиглин С. Л. Изв. АН СССР, сер. матем., **51**, вып. 5, 1088–1103 (1987).
8. Ziglin S. L. Chaos, **8**, No. 1, 272–273 (1998).
9. Зиглин С. Л., Черепенин В. А. Докл. РАН, **369**, №2, 173–174 (1999).
10. Зиглин С. Л. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 2, 80–81 (1996).
11. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
12. Зиглин С. Л. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 3, 30–41 (1982).
13. Yoshida H., Ramani A., Grammaticos B., Hietarinta J. Phys. A, **144**, 310–321 (1987).

Институт радиотехники и электроники РАН

Поступило в редакцию
1 октября 2001 г.

УДК 517.984

Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*

© 2003. С. Н. ЛАКАЕВ, З. Э. МУМИНОВ

Введение. Система трех произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке рассматривалась в [1, 2], где установлено существование бесконечного числа собственных значений дискретного трехчастичного оператора Шрёдингера (эффект Ефимова) на физическом уровне строгости.

В [3, 4] доказано существование эффекта Ефимова для гамильтониана системы трех произвольных и одинаковых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Отметим, что для непрерывного трехчастичного оператора Шрёдингера наличие эффекта Ефимова доказано в [5–8].

В [9] для разностного трехчастичного оператора Шрёдингера показано, что только при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$) и некотором $\mu = \mu_0 > 0$ (где μ — энергия взаимодействия двух частиц) имеет место эффект Ефимова, а при всех малых значениях квазиимпульса и $\mu > 0$ этот оператор имеет лишь конечное число собственных значений.

В [10] изучены местоположение и структура существенного спектра дискретного оператора Шрёдингера, описывающего системы четырех одинаковых частиц

*Работа частично поддерживается Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) и Фондом фундаментальных исследований ГКНТ РУз.

(бозонов) на трехмерной решетке. Доказана конечность числа собственных значений.

Основными результатами данной заметки являются следующие. Для числа собственных значений $N(0, z)$ дискретного трехчастичного оператора Шрёдингера, лежащих левее $z < 0$, получена асимптотика

$$\lim_{z \rightarrow -0} N(0, z) |\log |z||^{-1} = \mathcal{U}_0 \quad (0 < \mathcal{U}_0 < \infty), \quad (1)$$

где $\mathcal{U}_0$ не зависит от потенциалов взаимодействия, а зависит только от масс трех частиц.

Показана конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра оператора $H(K)$ для малых значений полного квазиимпульса K , и установлена асимптотика

$$\lim_{|K| \rightarrow 0} N(K, 0) |\log |K||^{-1} = 2\mathcal{U}_0, \quad (2)$$

для числа отрицательных собственных значений $N(K, 0)$, что характерно только для решетчатых систем и не имеет аналога в непрерывном случае.

Отметим, что в [7, 8] получена аналогичная (1) асимптотика для непрерывного трехчастичного оператора Шрёдингера.

Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть $\mathbb{Z}^3$ — трехмерная целочисленная решетка и $\ell^2((\mathbb{Z}^3)^n)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^n$.

Рассмотрим гамильтониан системы трех произвольных частиц на решетке, который действует в гильбертовом пространстве $\ell^2((\mathbb{Z}^3)^3)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(n_1, n_2, n_3) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} [\hat{\varepsilon}_1(s)\psi(n_1 + s, n_2, n_3) + \hat{\varepsilon}_2(s)\psi(n_1, n_2 + s, n_3) \\ + \hat{\varepsilon}_3(s)\psi(n_1, n_2, n_3 + s)] - [\mu_1\delta_{n_2n_3} + \mu_2\delta_{n_1n_3} + \mu_3\delta_{n_1n_2}]\psi(n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2, 3$, — вещественнозначная функция, определенная на $\mathbb{Z}^3$, и μ_α — энергия взаимодействия частиц β и γ (например, μ_1 — энергия взаимодействия второй и третьей частиц); δ_{nm} — символ Кронекера.

Предполагается, что функция $\hat{\varepsilon}_\alpha(s)$ зависит только от $|s| = |s_1| + |s_2| + |s_3|$, $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{Z}^3$, и положительна только при $s = 0$.

Кроме того, справедливо неравенство $|\hat{\varepsilon}_\alpha(s)| \leq C \exp(-a|s|)$ для некоторых чисел $a > 0$, $C > 0$.

Оператор $\hat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператором в $\ell^2((\mathbb{Z}^3)^3)$.

Наряду с трехчастичным гамильтонианом $\hat{H}$, действующим в гильбертовом пространстве $\ell^2((\mathbb{Z}^3)^3)$, рассмотрим двухчастичный гамильтониан $\hat{h}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, действующий в $\ell^2((\mathbb{Z}^3)^2)$,

$$\hat{h}_\alpha\psi(n_\beta, n_\gamma) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} [\hat{\varepsilon}_\beta(s)\psi(n_\beta + s, n_\gamma) + \hat{\varepsilon}_\gamma(s)\psi(n_\beta, n_\gamma + s)] - \mu_\alpha\delta_{n_\beta n_\gamma}\psi(n_\beta, n_\gamma),$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha.$

Пусть $\mathbb{T}^3$ — трехмерный тор.

Используя преобразование Фурье и разложение в прямой операторный интеграл, изучение спектральных свойств операторов $\hat{H}$ и $\hat{h}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, можно

свести к исследованию спектральных свойств семейства самосопряженных ограниченных операторов $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$ (трехчастичных дискретных операторов Шрёдингера), и $h_\alpha(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ (двухчастичных дискретных операторов Шрёдингера), действующих соответственно в гильбертовых пространствах $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ и $L_2(\mathbb{T}^3)$ (см. [8, 9]),

$$H(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu_1 \int_{\mathbb{T}^3} f(p, q') dq' - \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} f(q', q) dq' - \mu_3 \int_{\mathbb{T}^3} f(q', p + q - q') dq', \quad f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2),$$

где

$$\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(q) + \varepsilon_3(K - p - q),$$

и

$$h_\alpha(k)f(q) = \varepsilon_k^{(\alpha)}(q)f(q) - \mu_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} f(q') dq', \quad f \in L_2(\mathbb{T}^3), \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_k^{(\alpha)}(q) = \varepsilon_\beta(q) + \varepsilon_\gamma(k - q), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}, \quad \beta < \gamma.$$

В силу предположений на функцию $\hat{\varepsilon}_\alpha$ ее преобразование Фурье ε_α является вещественно-аналитической четной функцией и имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0 \in \mathbb{T}^3$.

Предположим, что $\min_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_\alpha(p) = \varepsilon_\alpha(0) = 0$. Тогда функция $\varepsilon_\alpha(p)$ представляется в виде

$$\varepsilon_\alpha(p) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} (-\hat{\varepsilon}_\alpha(s)) [1 - \cos(s_1 p_1) \cos(s_2 p_2) \cos(s_3 p_3)].$$

Положим $\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k) = \min_{p \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_k^{(\alpha)}(p)$ и обозначим через v интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^3)$ с ядром $v(p, q) = 1$. Пусть $h_\alpha^{(0)}(k)$ — оператор умножения на функцию $\varepsilon_k^{(\alpha)}(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\lambda = 1$ — простое собственное значение интегрального оператора с ядром $\mu_\alpha(\varepsilon_k^{(\alpha)}(p))^{-1}$ в пространстве $C(\mathbb{T}^3)$ и $\varphi \in C(\mathbb{T}^3)$ — соответствующая собственная функция, причем $\varphi(0) \neq 0$. Тогда говорят, что оператор $h_\alpha(0)$ имеет виртуальный уровень в точке $\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(0) = 0$ (см. [2, 5]).

Если оператор $h_\alpha(0)$ имеет виртуальный уровень в точке $\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(0) = 0$, то функция $\psi(p) = \varphi(p)(\varepsilon_0^{(\alpha)}(p))^{-1}$ является простым решением уравнения Шрёдингера $h_\alpha(0)f = 0$ и это решение не принадлежит $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Положим

$$\mu_\alpha^0 = \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon_\beta(q) + \varepsilon_\gamma(q)} \right)^{-1}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $\mu = \mu_\alpha^0$. Тогда оператор $h_\alpha(0)$ положительный и точка $z = 0$ является виртуальным уровнем. Для любого $k \in \mathbb{T}^3$, $k \neq 0$, оператор $h_\alpha(k)$ имеет единственное собственное значение $z_\alpha(k)$, лежащее левее непрерывного спектра, и $z_\alpha(k) > 0$.

Положим

$$\varepsilon_{\min}(K) = \min_{p, q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_K(p, q) \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\max}(K) = \max_{p, q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon_K(p, q).$$

ТЕОРЕМА 1. Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ имеет место соотношение

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \bigcup_{\alpha=1}^3 \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h_\alpha(K-p)) + \varepsilon_\alpha(p)\} \cup [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)],$$

где $h_\alpha(k)$ — двухчастичный оператор, определенный формулой (3).

ТЕОРЕМА 2. Существует число m_α , $0 < m_\alpha < \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2, 3$, такое, что при всех $\mu_\alpha \in (0, m_\alpha)$ оператор $H(K)$ не имеет собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

Пусть $\tau(K)$ — нижняя грань существенного спектра дискретного трехчастичного оператора $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, и $N(K, z)$ — число собственных значений этого оператора, лежащих левее точки $z \leq \tau(K)$.

Пусть $U_\delta^o(0) = \{p \in \mathbb{T}^3 : 0 < |p| < \delta\}$ — проколота окрестность нуля в торе $\mathbb{T}^3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\mu_\beta = \mu_\beta^0$ и $\mu_\gamma \leq \mu_\gamma^0$. Тогда для любого $K \in U_\delta^o(0)$ оператор $H(K)$ может иметь лишь конечное число собственных значений вне существенного спектра и оператор $H(0)$ имеет бесконечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра. Для функций $N(0, z)$ и $N(K, 0)$ верны асимптотики (1) и (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Число 2 при $\mathcal{U}_0$ в равенстве (2) связано с асимптотикой $\varepsilon_{\min}(K) = O(|K|^2)$ при $|K| \rightarrow 0$.

Эскизы доказательства основных результатов. Пусть

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha=1}^3 \bigcup_{p \in \mathbb{T}^3} \{\sigma_d(h_\alpha(K-p)) + \varepsilon_\alpha(p)\} \cup [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)].$$

Положим

$$a_\alpha = \inf_{p \in \mathbb{T}^3} \bigcup \{\sigma_d(h_\alpha(K-p)) + \varepsilon_\alpha(p)\}, \quad b_\alpha = \sup_{p \in \mathbb{T}^3} \bigcup \{\sigma_d(h_\alpha(K-p)) + \varepsilon_\alpha(p)\}.$$

Обозначим через $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)$ пространство вектор-функций $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где компоненты ω_α принадлежат $L_2(\mathbb{T}^3)$. Пусть $T(K, z)$, $z \in \mathbb{R}^1 \setminus \Sigma$, действует в $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^3)$ и его матричные элементы определяются равенствами

$$T_{\alpha\alpha}(K, z) = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}(K, z)\omega(p) &= \theta_\alpha(z) \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\Delta_\alpha(K-p; z - \varepsilon_\alpha(p))|^{-1/2} |\Delta_\beta(K-q; z - \varepsilon_\beta(q))|^{-1/2}}{\varepsilon_K(p, q) - z} \omega(q) dq, \\ \omega &\in L_2(\mathbb{T}^3), \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

где

$$\theta_\alpha(z) = \begin{cases} 1, & z \in (-\infty, a_\alpha] \cup [\varepsilon_{\max}(K), +\infty), \\ -1, & z \in [b_\alpha, \varepsilon_{\min}(K)]. \end{cases}$$

Оператор $T(K, z)$, $z \in \mathbb{R}^1 \setminus \Sigma$, является компактным.

ЛЕММА 2. Число $z \in \mathbb{R}^1 \setminus \Sigma$ является собственным значением кратности $m \geq 0$ оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $T(K, z)$ кратности $m \geq 0$.

При доказательстве теоремы 1 включение $\Sigma \subset \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ устанавливается с помощью критерия Вейля. Воспользовавшись леммой 2, можно показать справедливость включения $\sigma_{\text{ess}}(H(K)) \subset \Sigma$.

Теорема 2 следует из леммы 2 и из неравенства $\|T(K, z)\| < 1$, которое выполняется равномерно по $K \in \mathbb{T}^3$ и $z \leq \tau(K)$ при достаточно малых $|\mu| = |\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3|$, где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Для доказательства теоремы 3 сначала показывается, что $N(0, z) = n(1, T(0, z))$ и $N(K, 0) = n(1, T(K, 0))$, где $n(1, B)$ — число собственных значений, лежащих правее точки 1, компактного самосопряженного оператора B .

Изучение поведения оператора $T(0, z)$ ($T(K, 0)$) основывается на исследовании поведения резольвенты $r_\alpha(k, z)$ двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера при $k = 0$ и $z \rightarrow -0$ ($|k| \rightarrow 0$ и $z = 0$).

Резольвента $r_\alpha(k, z)$ двухчастичного оператора $h_\alpha(k)$ выражается с помощью определителя $\Delta_\alpha(k, z)$ и минора оператора Фредгольма $I - \mu_\alpha v r_\alpha^{(0)}(k, z)$.

ЛЕММА 3. Существуют числа $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$, такие, что для любых $k \in U_\delta(0)$ и $z \in [-\delta_1, 0)$ имеет место представление

$$\Delta_\alpha(k, z) = \Delta_\alpha(0, 0) + \frac{4\pi^2 \mu_\alpha}{(l_\beta + l_\gamma)^{3/2}} \left[\frac{l_\beta l_\gamma}{(l_\beta + l_\gamma)} |k|^2 - 2z \right]^{1/2} + O(|k|^2 + |z|)$$

при $|k| \rightarrow 0$ и $|z| \rightarrow 0$, где

$$l_\alpha = - \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \frac{|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2}{3} \hat{\varepsilon}_\alpha(s), \quad s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{Z}^3, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

С помощью леммы 3 выделяется главная часть оператора $T(0, z)$ при $z \rightarrow -0$ ($T(K, 0)$ при $|K| \rightarrow 0$), которая унитарно эквивалентна компактному интегральному оператору S_R , $R = \frac{1}{2} |\ln |z||$ ($R = |\ln |K||$), с ядром типа Тёплица, действующему в пространстве $L_2((0, R), L_2(S^2))$. Свойства оператора S_R изучены в [7].

Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание и обсуждения полученных результатов, а также рецензенту за ценные и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mattis D. C. Rev. Modern Phys., **58**, No. 2, 361–379 (1986).
2. Mogilner A. I. Adv. Soviet Math., **5**, 139–194 (1991).
3. Лакаев С. Н. Теор. матем. физ., **89**, №1, 94–104 (1991).
4. Лакаев С. Н. Функци. анализ и его прил., **27**, вып. 3, 15–28 (1993).
5. Яфеев Д. Р. Матем. сб., **9** (136), №4 (8), 567–592 (1974).
6. Ouchinnikov Yu. N., Sigal I. M. Ann. Phys., **123**, 274–295 (1989).
7. Sobolev A. V. Comm. Math. Phys., **156**, 101–126 (1993).
8. Tamura H. Adv. Stud. Pure Math., **23**, 311–322 (1994).
9. Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И. Функци. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 82–86 (1999).
10. Албеверлио С., Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И. Функци. анализ и его прил., **36**, вып. 3, 56–60 (2002).