Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Учитель об ученике. Четыре отзыва А. Н. Колмогорова о работах И. М. Гельфанда (к 90-летию со дня рождения Израиля Моисеевича Гельфанда), *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 4, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:50:40

Учитель об ученике.
Четыре отзыва А. Н. Колмогорова
о работах И. М. Гельфанда
(к 90-летию со дня рождения Израиля Моисеевича Гельфанда)

90-летие Израиля Моисеевича Гельфанда отмечается в год, когда его Учителю, Андрею Николаевичу Колмогорову, исполнилось бы 100.

Подготовка к колмогоровскому юбилею вызвала к жизни разные публикации о нем, что потребовало усиленных разысканий в его бумагах, в частности, в архиве Комаровского Дома. Там, среди этих бумаг, нашлась папочка, на которой рукой Андрея Николаевича было написано «И. М. Гельфанд». Внутри оказалось несколько отзывов, написанных Колмогоровым в разное время о своем выдающемся ученике и о его работах. Четыре из них публикуются в этом номере.

А. Н. Ширяев

Отзыв о работах И. М. Гельфанда,
представляемых на сталинскую премию

1. Нормированные кольца. Матем. сб., **9 (51)**, №1, 3–24 (1941).
2. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. Матем. сб., **12 (64)**, №2, 197–217 (1943) (совм. с М. А. Наймарком).
3. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. Матем. сб., **13 (55)**, №2–3, 301–316 (1943) (совм. с Д. А. Райковым).
4. Унитарные представления полупростых групп Ли. 1. Матем. сб., **21 (63)**, №3, 405–434 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
5. Унитарные представления группы линейных преобразований прямой. ДАН СССР, **55**, №7, 571–574 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
6. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411–504 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
7. След в основных и дополнительных сериях представлений комплексной унитарной группы. ДАН СССР, **61**, №1, 9–11 (1948) (совм. с М. А. Наймарком).
8. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, №8, 703–733 (1948) (совм. с А. М. Ягломом).
9. Нормированные кольца с инволюцией. Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 445–480 (1948) (совм. с М. А. Наймарком).
10. О связи между представлениями комплексной полупростой группы Ли и ее максимальной компактной подгруппы. ДАН СССР, **63**, №3, 225–228 (1948) (совм. с М. А. Наймарком).
11. Аналог формулы Планшереля для комплексной унитарной группы. ДАН СССР, **63**, №6, 609–612 (1948).

Современная математика широко использует общие геометрические и алгебраические методы, рассматривая, с одной стороны, самые разнообразные системы объектов (функций, линий и т. п.) как некоторое геометрическое единство — пространство, а с другой стороны, разнообразные системы объектов с операциями над ними как алгебраическое образование — группу, кольцо или поле.

Уже довольно давно возникла тенденция к объединению этих двух направлений: к рассмотрению образований, обладающих одновременно геометрическими (топологическими) и алгебраическими свойствами. Первой попыткой такого рода явилась теория линейных пространств, современная форма которой была создана

С. Банахом. За ней последовал ряд фундаментальных работ по топологической алгебре, т.е. систематическому изучению топологических групп и топологических полей. Среди этих работ особенно выдаются работы Л. С. Понтрягина. Более конкретный аналитический характер имеют исследования фон Неймана и его школы в США по кольцам операторов в гильбертовом пространстве. Уже в этих работах выяснилось, что с точки зрения анализа центральным подлежащим изучению алгебраически-геометрическим образованием должно быть алгебраическое кольцо (система, где вычитание всегда возможно, а деление может быть и невыполнимым), наделенное топологическими свойствами.

И. М. Гельфанду удалось нащупать основную и наиболее плодотворную линию работы по перестройке всего функционального анализа в указанном направлении. Основной исходной идеей И. М. Гельфанда явилось наблюдение, что кольцо, в котором введена «норма» (аналог абсолютной величины для обычных чисел), при очень широких условиях автоматически оказывается вполне определенным и единственным образом реализованным в виде кольца функций на множестве своих «максимальных идеалов».

В соответствии с этим для каждого нормированного кольца возникает в качестве первой и основной проблемы нахождение естественной области изменения аргументов, из функций которых кольцо состоит. Например, почти периодические функции обычно рассматриваются как функции действительного аргумента. Естественной областью их определения является, однако, некоторое расширение $\tilde{R}$ области действительных чисел R . На этом расширении $\tilde{R}$ функции, почти периодические на R , совпадают просто со всеми функциями, непрерывными на $\tilde{R}$.

Из этой основной идеи возникла обширная программа исследований, вокруг которой И. М. Гельфанд с исключительной энергией объединил большой коллектив сотрудников и учеников, из которых особенно велико участие в наиболее трудных и важных работах [2, 4] и [6] М. А. Наймарка. Метод дал уже много вполне конкретных аналитических результатов (см., например, работу И. М. Гельфанда об абсолютно сходящихся рядах, опубликованную вместе с его основным мемуаром о нормированных кольцах). В самое последнее время начали в большом числе появляться работы американских авторов (Лорх, Амброзе и др.), продолжающие ту же линию исследований.

Как уже было сказано, специальный интерес имеют кольца операторов в гильбертовом пространстве. В работе [2] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк указали необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактное кольцо допускало реализацию в виде кольца спектров в гильбертовом пространстве. Это внесло значительно большую ясность и ряд упрощений в теорию, развитую фон Нейманом.

Изучение кольца операторов в гильбертовом пространстве эквивалентно изучению группы содержащихся в нем унитарных операторов. Сама по себе теория групп унитарных операторов и представлений такими группами абстрактных (или конкретных) групп значительно богаче и сложнее. Уже унитарные представления обычной группы действительных чисел (однопараметрические группы унитарных операторов) сделали в последнее время предметом многочисленных

исследований. Их теория является естественной современной формой гармонического анализа функций и спектрального анализа детерминированных или случайных колебательных процессов. В недавних работах Дирака большое значение приобрели унитарные представления группы Лоренца.

Основой всей будущей теории унитарных групп и унитарных представлений должна явиться теорема Гельфанда и Райкова о существовании достаточной системы непрерывных унитарных представлений. После получения этой теоремы естественно возник вопрос о нахождении всех неприводимых представлений особенно важных групп и составлении любого представления из этих неприводимых. В этом направлении в качестве первого случая (представляющего существенные трудности) И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк разобрали представления группы Лоренца. Найденная ими полная система неприводимых представлений дается в виде вполне обозримых формул. Все представления, найденные Дираком, оказались приводимыми и вполне обозримым образом составляются из неприводимых. Это исследование само по себе заслуживало бы самой высокой оценки. В работе [8] его результаты применены к выводу релятивистски инвариантных дифференциальных уравнений. В работе [4] получены менее исчерпывающие, но весьма глубокие результаты в направлении перечисления неприводимых представлений полупростых групп Ли.

Весь описанный круг исследований И. М. Гельфанда представляется мне безусловно самым крупным явлением в области функционального анализа в мировой математике последнего десятилетия и вполне заслуживает награждения Сталинской премией.

Приписано от руки: Так как работы [8–11] (в том числе работа [8], существенная для понимания значения и перспектив физических применений всего цикла работ И. М. Гельфанда) вышли в свет лишь в самом конце 1948 г., то представление всего цикла работ на премию в 1949 г. соответствует установленному для этого порядку.

А. Колмогоров
16 октября 1949 г.

Отзыв о работах И. М. Гельфанда по унитарным представлениям непрерывных групп

Вышедшая в 1950 г. монография И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [1] является завершением работы, начатой И. М. Гельфандом с рядом сотрудников в 1942 году. Общее число публикаций И. М. Гельфанда и его сотрудников на данную тему приближается к двадцати, однако основные результаты содержатся в представляемых на премию четырех работах, опубликованных с 1943 по 1950 год. Созданная в этих работах теория унитарных представлений групп является одним из самых замечательных достижений за последние десять лет в математической науке: она дает новый мощный метод для решения важных и трудных задач в весьма различных областях математики и математического естествознания.

Для современной физики особенно большой интерес имеет применение общих методов Гельфанда к нахождению всех неприводимых унитарных представлений группы Лоренца (и получению из них всех остальных унитарных представлений этой группы). Эта задача полностью и вполне эффективно в смысле простого явного аналитического выражения неприводимых представлений решена в работе [3]. Применения к выводу общего вида релятивистски инвариантных дифференциальных уравнений даны в работе [4]. Эти вопросы после работы Дирака, опубликованной в 1945 году и содержавшей лишь случайные примеры бесконечномерных представлений группы Лоренца, которые все оказались разложимыми (см. введение к [3]), привлекают очень большое внимание также и иностранных исследователей, но первым по времени опубликования и самым полным решением задачи является решение, данное И. М. Гельфандом.

С общематематической стороны самыми существенными этапами работы следует признать

а) установление того, что для любой локально компактной группы существует полная система неприводимых унитарных представлений (этот результат изложен в статье [2] и послужил началом всего цикла исследований), и

б) выполненное вполне эффективными аналитическими средствами вычисление всех неприводимых представлений основных классических групп и доказательство того, что в случае этих групп все унитарные представления разлагаются на неприводимые, т. е. что обзорение всех унитарных представлений этих групп доставляется с полной ясностью перечислением их неприводимых представлений. Эта часть работы вместе с разработкой ее применений оказалась наиболее трудной в смысле аналитического аппарата и выполнена совместно И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Ее результаты и составляют содержание фундаментальной монографии [1].

Явное выражение всех неприводимых представлений какой-либо группы приносит с собою решение целого ряда основных задач, связанных с этой группой. В частности, решается задача нахождения всех положительно определенных функций, инвариантных по отношению к преобразованию данной группы: дается их разложение на «элементарные» положительно определенные функции.

Для группы движений прямой такие элементарные положительно определенные функции исчерпываются функциями

$$f(x) = e^{i\lambda x},$$

и это составляет основу «гармонического анализа» функций одного переменного x . Группа вращений сферы порождает таким же образом сферические функции. В этих случаях неприводимые представления конечномерны, и указанные результаты были известны ранее работ И. М. Гельфанда. Но уже начиная с таких групп, как группа движений плоскости Лобачевского или группа преобразований подобия для полуплоскости, вопрос решается лишь при помощи бесконечномерных унитарных преобразований и теории И. М. Гельфанда. Построение такой обобщенной теории «сферических функций» составляет одну из существенных заслуг И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка. Заметим в связи с этим, что явное выражение всех инвариантных положительно определенных функций решает

в статистической механике непрерывных сред задачу нахождения явного вида всех инвариантных по отношению к данной группе корреляционных функций для связанных с точкой случайных величин.

Большой интерес имеют обобщения на классические непрерывные группы соотношения, которое в случае обычного гармонического анализа называется формулой Планшереля. Чтобы дать это соотношение во вполне эффективной форме (с явным выражением числового множителя в формуле (27.17)), например, для комплексной унитарной группы авторам работы [1] пришлось преодолеть большие трудности.

В виде одного из неожиданных совсем недавних применений методов теории И. М. Гельфанда мне хотелось бы еще указать на нахождение в еще не опубликованной работе И. М. Гельфанда и С. В. Фомина¹⁾ спектров для динамических систем, получающихся из рассмотрения геодезических линий на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Это первый случай полного определения непрерывного спектра классической динамической системы, явно заданной при помощи векторного поля на многообразии (в данном случае на трехмерном многообразии линейных элементов).

Следует отметить, что уже доказательство Хедлундом и Э. Хопфом того факта, что эти динамические системы имеют непрерывный спектр (неизвестной природы), рассматривалось как одно из самых замечательных событий в теории динамических систем.

Дело, впрочем, не в отдельных примерах подобного рода. Они лишь подчеркивают полную эффективность методов И. М. Гельфанда и их приспособленность к решению трудных конкретных задач. Вся же широта открывающихся здесь перспектив может быть оценена в полной мере лишь на основе понимания общепризнанного узлового положения классических непрерывных групп и их линейных представлений в математике. До работ И. М. Гельфанда мы владели должным образом лишь конечномерными (матричными) представлениями и представлениями, на них разлагающимися. Нахождение всех бесконечномерных унитарных представлений и доказательство того, что в основных классических случаях все унитарные представления разлагаются на неприводимые унитарные (конечномерные и бесконечномерные), является самым существенным расширением классической теории линейных представлений групп со времени создания ее основ.

1. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **36**, 1–288 (1950).
2. Гельфанд И. М., Райков Д. А. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. Матем. сб., **13**, 301–316 (1943).
3. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411–504 (1946).
4. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, 703–733 (1948).

¹⁾ Имеется в виду работа: Гельфанд И. М., Фомин С. В. Геодезические потоки на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. УМН, **7**, вып. 1, 118–137 (1952).

Отзыв о работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка по унитарным представлениям групп Ли

Наиболее глубокие конкретные математические вопросы связаны с линейными представлениями групп Ли. В коммутативном и компактном случае все такие представления разлагаются на неприводимые конечномерные, т. е. осуществимые при помощи матриц. Но уже имеющая фундаментальное значение для физики группа Лоренца, группа движений плоскости Лобачевского и ряд других классических групп имеют только очень бедный запас конечномерных представлений, из которых, например, нельзя получить «регулярное» представление функциями с интегрируемым квадратом, заданными на самой группе.

Поэтому возникает задача найти для основных классических групп Ли все их бесконечномерные неприводимые унитарные представления (конечномерные уже были известны) и исследовать возможность разложения любых унитарных представлений на неприводимые. Эта задача и была разрешена после преодоления больших трудностей И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Их работы имеют вполне классический характер по методам, конкретности результатов, данных в виде явных формул, и широте полученных и ожидаемых применений.

Особый интерес для современной физики имеет нахождение всех неприводимых унитарных представлений группы Лоренца и получение из них всех унитарных представлений этой группы. Эта задача решена в работе [1]. О ее значении для физики см. [3]. Важность вопроса была ясна и зарубежным ученым. Но Дирак в 1945 году смог только указать несколько случайных бесконечномерных представлений группы Лоренца, которые все оказались разложимыми. Только после работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка возникла обширная литература за рубежом.

С математической стороны еще большие трудности преодолены в фундаментальной монографии [3], вышедшей в 1950 году. Построенная в ней теория обобщенных «сферических функций» и многие другие результаты представляются нам весьма существенными для анализа.

В целом эти исследования представляют собой одно из самых замечательных явлений в современной математике вообще.

1. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411–504 (1947).
2. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Общие инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, 703–733 (1948).
3. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **36**, 1–288 (1950).

Отзыв о работах И. М. Гельфанда (в связи с его выдвижением в действительные члены АН СССР)

Основные научные достижения Израиля Моисеевича Гельфанда относятся к функциональному анализу, а в той или иной мере связаны с использованием методов и идей функционального анализа почти все его работы. После того

как фундаментальное значение и даже центральное положение функционального анализа в значительной части математических наук выяснилось в классических трудах Вольтерра, Адамара, Гильберта, а общие логические основы его (определения и основные свойства функциональных пространств, функционалов, операторов) были построены Риссом, Банахом и др., в двадцатых годах нашего столетия начался современный этап развития функционального анализа, в течение которого были разработаны и созданы спектральная теория операторов в гильбертовом пространстве, теория колец операторов и бесконечных представлений групп, общая теория банаховых алгебр (нормированных колец), теория обобщенных функций с их разнообразными приложениями к задачам классического анализа (краевые задачи для дифференциальных уравнений и т. п.). Ввиду тесного переплетения классических методов с функциональными почти все представители анализа вообще в течение этих последних десятилетий являлись и специалистами в функциональном анализе, внося в его развитие новые идеи, часто первостепенной важности.

Естественно, однако, что в этот период функциональный анализ нуждался в крупных математиках, для которых общие идеи функционального анализа являлись бы исходным пунктом их интересов и которые способны были бы предвидеть и направлять развитие функционального анализа в целом, владея всеми его основными разделами. Среди математиков этого типа вслед за недавно умершим фон Нейманом в первую очередь следует назвать Израиля Моисеевича Гельфанда. Чтобы убедиться в этом, достаточно перечислить те направления функционального анализа, которые были им созданы или в создании которых он принимал решающее участие¹⁾.

I. В работе [1] дана наиболее полная и совершенная теория абстрактных функций, т. е. функций с действительным аргументом и значениями в линейном пространстве.

II. В работах [2] и [3] излагаются итоги исследований по нормированным кольцам, или, как их теперь называют, банаховым алгебрам. Центральная идея этих работ — возможность представления абстрактной банаховой алгебры как кольца функций на максимальных идеалах — была предвосхищена аналогичной конструкцией Стоуна для булевых алгебр, но в применении к алгебрам над полем действительных или комплексных чисел принадлежит И. М. Гельфанду. Построенная Гельфандом и его продолжателями теория содержит много замечательных глубоких результатов и допускает много применений (у самого И. М. Гельфанда к теории абсолютной сходимости рядов Фурье, почти периодическим функциям и т. д.). Эта теория систематически излагается в некоторых современных руководствах (например, в известной книге Хилле²⁾).

¹⁾ Далее указываются основные полные и обзорные публикации данного направления без указания примыкающих к ним или предшествующих им коротких заметок.

²⁾ Имеется в виду книга Hille E., Phillips R. S. *Functional Analysis and Semi-Groups*. AMS, Providence, RI, 1957; русский перевод: Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы*. Мир, М., 1962. — А. III.

III. Теория бесконечномерных унитарных представлений локально компактных групп имеет своим исходным пунктом работу И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [4], в которой было установлено существование достаточной системы неприводимых представлений. Основное значение эта теория имеет в применении к группам Ли, а для физики особенно существен случай группы Лоренца. Этой более классической проблематикой занималось много крупных математиков различных стран, но работы И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [5–9] во всем этом большом направлении занимают бесспорное первое место. Дальнейшее их развитие дано в работах И. М. Гельфанда и М. И. Граева [10, 11].

IIIа. Знание унитарных представлений группы Лоренца дает систематический метод изучения релятивистски инвариантных уравнений, которому посвящены работы И. М. Гельфанда и А. М. Яглома [12] и др.

IIIб. Представления групп, действующих в однородных пространствах, позволяют систематически изучать сферические функции на однородных пространствах и многие вопросы интегральной геометрии [13–16].

IIIв. С теорией представлений связан существенный прогресс, достигнутый в последнее время в теории автоморфных функций, чему посвящена совместная статья И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [17].

IIIг. Теория представлений позволила достичь замечательных успехов в анализе поведения некоторых динамических систем с непрерывным спектром, что является темой совместной работы И. М. Гельфанда и С. В. Фомина [18]

Работы всего этого цикла (бесконечномерные представления групп) рассматриваются обычно как самый существенный вклад И. М. Гельфанда в математику.

IV. Работы И. М. Гельфанда и его сотрудников по теории обобщенных функций [19–21] начали систематически публиковаться лишь с 1956 года, и полная их оценка еще принадлежит будущему, однако несомненно, что они содержат ряд замечательных идей и результатов. Серия монографий [20–22] переводится сейчас на английский (в США), французский, немецкий и японский языки. Одним из конкретных аспектов этих исследований являются применения к изучению задачи Коши для уравнений в частных производных, которые разрабатываются И. М. Гельфандом совместно с Г. Е. Шиловым, еще начиная с более ранней работы [23].

V. К последним годам относятся и работы И. М. Гельфанда по мерам и интегрированию в функциональных пространствах ([24] и примыкающие короткие публикации). К конкретному вычислению такого рода интегралов сводится ряд задач квантовой физики. Меры в функциональных пространствах рассматривались И. М. Гельфандом, с другой стороны, как аппарат для изучения так называемых обобщенных случайных процессов и работ по теории передачи информации (совместная с А. М. Ягломом работа [25] и др.).

Труднее проследить по печатным публикациям другую сторону научных достижений И. М. Гельфанда: его работы по более специальным вопросам дифференциальных уравнений, вычислительной математике и конкретным задачам физики и механики (см. [26] и [27–30]). Для меня нет, однако, сомнения, что И. М. Гельфанд соединяет в себе исключительный талант математика-теоретика

с незаурядными способностями к решению более грубыми методами, опирающимися на хорошо развитую геометрическую, механическую и физическую интуицию, конкретных задач прикладного характера.

Я считаю, что И. М. Гельфанд уже давно является естественным кандидатом для избрания в действительные члены АН СССР.

А. Колмогоров

1 мая 1960 г.

**Список работ И. М. Гельфанда, упоминаемых
в отзыве А. Н. Колмогорова**

1. Abstrakte funktionen und lineare Operatoren. Матем. сб., **4** (**46**), № 2, 235–286 (1938).
2. Нормированные кольца. Матем. сб., **9** (**51**), № 1, 3–24 (1941).
3. Основная серия представлений комплексной унитарной группы. ДАН СССР, **56**, № 1 (1946) (совм. с М. А. Наймарком).
4. Неприводимые унитарные представления локально бикompактных групп. Матем. сб., **13** (**55**), № 2–3, 301–316 (1943) (совм. с Д. А. Райковым).
5. Унитарные представления группы Лоренца. Изв. АН СССР, **2**, 411–504 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
6. Унитарные представления полупростых групп Ли. 1. Матем. сб., **21** (**63**), № 3, 405–434 (1947) (совм. с М. А. Наймарком).
7. Нормированные кольца с инволюцией. Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, 445–480 (1948) (совм. с М. А. Наймарком).
8. Унитарные представления классических групп. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **36**, 1–288 (1950) (совм. с М. А. Наймарком).
9. Унитарные представления унитарной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы. Труды ММО, **1**, 423–473 (1952) (совм. с М. А. Наймарком).
10. Унитарные представления вещественной унитарной группы (основные невырожденные серии). Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, № 3, 189–249 (1953) (совм. с М. И. Граевым).
11. Аналог формулы Планшереля для классических групп. Труды ММО, **4**, 375–404 (1955) (совм. с М. И. Граевым).
12. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца. ЖЭТФ, **18**, № 8, 703–733 (1948) (совм. с А. М. Ягломом).
13. Сферические функции на симметрических римановых пространствах. ДАН СССР, **70**, № 1, 5–8 (1950).
14. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметричных римановых многообразиях. Труды ММО, **5**, 311–351 (1956) (совм. с Ф. А. Березиным).
15. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. Труды ММО, **8**, 321–390 (1959) (совм. с М. И. Граевым).
16. О разложении представлений группы Лоренца в пространствах функций, заданных на симметрических пространствах, на неприводимые представления. ДАН СССР, **127**, № 2, 250–253 (1959) (совм. с М. И. Граевым).
17. Теория представлений и теория автоморфных функций. УМН, **14**, вып. 2 (86), 171–194 (1959) (совм. с И. И. Пятачким-Шапиро).
18. Геодезические потоки на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. УМН, **7**, вып. 1, 118–137 (1952) (совм. с С. В. Фоминым).
19. Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées. J. Math. Pures Appl., **35**, 383–413 (1956) (совм. с Г. Е. Шиловым).
20. Обобщенные функции и действия над ними. Обобщенные функции, вып. 1. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).
21. Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции, вып. 2. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).

22. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, вып. 3. М., Физматгиз, 1958 (совм. с Г. Е. Шиловым).
23. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. УМН, **8**, вып. 6, 3–54 (1953) (совм. с Г. Е. Шиловым).
24. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике. УМН, **11**, вып. 1 (67), 77–114 (1956) (совм. с А. М. Ягломом).
25. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции. УМН, **12**, вып. 1 (73), 3–52 (1957) (совм. с А. М. Ягломом).
26. Интегральные уравнения. БСЭ, изд. 2-е, т. 18, 1953.
27. О структуре областей устойчивости линейных канонических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. УМН, **10**, вып. 1, 3–40 (1955) (совм. с В. Б. Лидским).
28. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 3, 65–72, 1958 (совм. с И. Г. Петровским и Г. Е. Шиловым).
29. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений. УМН, **14**, вып. 2 (86), 321–390 (1959).
30. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции, вып. 4. М., Физматлит, 1961 (совм. с Н. Я. Виленкиным).