Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, Образующие элементы аннулирующего идеала для модулярных символов, *Функц. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 4, 27–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:18:12

Образующие элементы аннулирующего идеала для модулярных символов*

© 2003. В. А. Быковский

Посвящается И. М. Гельфанду в связи с его 90-летием

Введение

Периоды модулярных форм и собственные значения операторов Гекке содержат в себе важную арифметическую информацию о специальных абелевых алгебраических многообразиях (эллиптических кривых, якобианах модулярных кривых, многообразиях Куги–Сато, ...) и неприводимых двумерных l -адических представлениях группы Галуа. Отображение пространств модулярных форм в периоды, построенное в основополагающей работе М. Эйхлера [1] и детально изученное Г. Шимурой [2], отождествляет их со специальными подпространствами в $\mathbb{R}^n$, выделяемыми с помощью соотношений Эйхлера–Шимуры. Дальнейшее развитие этих идей в работах Ю. И. Манина [3–5] и других авторов (см. [6, 7]) привело к фундаментальному понятию «модулярный символ». Речь идет о следующей конструкции.

Пусть $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$ ($s = 2, 3, \dots$) состоит из всех целочисленных матриц

$$M = (m^1, \dots, m^s)$$

с ненулевыми s -столбцами m^i . Обозначим через $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$ фактормодуль

$$\mathbb{Z}[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]/\mathbb{Z}_0[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})],$$

где $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]$ — свободная абелева группа, порожденная формальными образующими M из $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$, а $\mathbb{Z}_0[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]$ — ее подгруппа, порожденная элементами

- (1) $(a_1 m^1, \dots, a_s m^s) - (m^1, \dots, m^s)$ с любыми целыми $a_i \neq 0$;
 - (2) $(m^{\sigma(1)}, \dots, m^{\sigma(s)}) - \text{sign}(\sigma)(m^1, \dots, m^s)$ для всех перестановок σ ;
 - (3) $(m^1, \dots, m^s)$, если $m^1, \dots, m^s$ линейно зависимы;
 - (4) $\sum_{i=0}^s (-1)^i (m^0, \dots, m^{i-1}, m^{i+1}, \dots, m^s) = \sum_{i=0}^s (-1)^i (m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s)$
- для всех ненулевых s -столбцов $m^0, m^1, \dots, m^s$.

При каноническом проектировании $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]$ на $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$ элементы M из $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$ переходят в классы $[M]$ из $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$, именуемые *модулярными символами*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Модулярные символы можно интерпретировать как классы наборов $(\alpha^1, \dots, \alpha^s)$ с точками α^i из $(s-1)$ -мерного проективного пространства над полем рациональных чисел относительно следующей эквивалентности:

- (i) $(\alpha^{\sigma(1)}, \dots, \alpha^{\sigma(s)}) \sim \text{sign}(\sigma)(\alpha^1, \dots, \alpha^s)$;

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №01-01-96301) и Президиума ДВО РАН (грант №03-1-0-01-003).

- (ii) $(\alpha^1, \dots, \alpha^s) \sim 0$, если $\alpha^1, \dots, \alpha^s$ линейно зависимы;
 (iii) $\sum_{i=0}^s (-1)(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha^s) \sim 0$ для любых $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha^s$.

Именно в таком виде они были впервые введены Ю. И. Маниным в случае $s = 2$, для которого (i) и (ii) следуют из (iii).

Левое умножение элементов групп

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_s = GL(s; \mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_s(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = \pm 1\},$$

$$\Gamma = \Gamma_s = SL(s; \mathbb{Z}) = \{M \in \bar{\Gamma} \mid \det(M) = 1\}$$

на матрицы из $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$ определяет структуры левых $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ - и $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -модулей на $\mathbb{Z}[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]$ и $\mathbb{Z}_0[\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})]$, которые канонически переносятся на $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$. Обозначим через E единичную матрицу $(e^1, \dots, e^s)$ из Γ с соответствующими s -столбцами e^i , $i = 1, \dots, s$. Для $s = 2$ Манин [3], а для $s \geq 3$ Эш и Рудольф [6] установили, что

$$\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z}) = \{R \cdot [E] \mid R \in \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]\} = \{R \cdot [E] \mid R \in \mathbb{Z}[\Gamma]\}.$$

То есть $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$ есть циклический модуль над групповыми кольцами $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ и $\mathbb{Z}[\Gamma]$ с образующей $[E]$.

Введем следующие обозначения для специальных элементов из $\bar{\Gamma}$:

$$S = (-e^2, e^1, e^3, \dots, e^s), \quad \bar{S} = (e^2, e^1, e^3, \dots, e^s),$$

$$P = (e^2, e^3, \dots, e^s, (-1)^{s+1}e^1), \quad \bar{P} = (e^2, e^3, \dots, e^s, e^1),$$

$$I = (-e^1, e^2, \dots, e^s), \quad U = (-e^1 - e^2, e^1, e^3, \dots, e^s).$$

Отметим, что $\bar{P} = P$ для нечетных s .

Главным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Левый идеал $\mathcal{L}(s) = \{R \in \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}] \mid R \cdot [E] = 0\}$ в $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ порождается образующими*

$$E - I, \quad E + \bar{S}, \quad E + (-1)^s \bar{P}, \quad E + U + U^2.$$

Из нее следует

ТЕОРЕМА 2. *Левый идеал $\mathcal{L}(s) = \{R \in \mathbb{Z}[\Gamma] \mid R \cdot [E] = 0\}$ в $\mathbb{Z}[\Gamma]$ порождается образующими*

$$E + S, \quad E + (-1)^s P, \quad E + U + U^2.$$

В сформулированных утверждениях $\mathcal{L}(s)$ и $\mathcal{L}(s)$ есть *аннулирующие идеалы* в $\mathbb{Z}[\Gamma]$ и $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ для образующей $[E]$ из $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$.

Пусть L — произвольный левый модуль над коммутативным кольцом K с единицей, на котором справа действует группа $\Gamma = SL(s; \mathbb{Z})$. Назовем

$$\mathcal{E}(L) = \text{Hom}_{\Gamma}(\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z}), L)$$

модулем Эйлера, а

$$\mathcal{E}'(L) = L \otimes_{\Gamma} \mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$$

двойственным модулем Эйлера. Модуль $\mathcal{E}(L)$ каноническим способом интерпретируется как левый модуль над K , состоящий из всех функций

$$\Phi: \mathcal{M}_s(\mathbb{Z}) \rightarrow L,$$

таких, что

- а) $\Phi(a_1 m^1, \dots, a_s m^s) = \Phi(m^1, \dots, m^s)$ для всех целых $a_i \neq 0$;
 б) $\Phi(m^{\sigma(1)}, \dots, m^{\sigma(s)}) = \text{sign}(\sigma) \Phi(m^1, \dots, m^s)$ для любой перестановки σ ;
 в) $\Phi(m^1, \dots, m^s) = 0$, если $m^1, \dots, m^s$ линейно зависимы;
 д) для произвольных ненулевых столбцов $m^0, m^1, \dots, m^s$

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i \Phi(m^0, \dots, \widehat{m}^i, \dots, m^s) = 0;$$

- е) $\Phi(QM) = \Phi(M) \circ Q^{-1}$ для любого $Q \in \Gamma$.

Для размерности $s = 2$ модуль параболических коциклов Эйхлера (см. [2–4]), ассоциированный с пространством модулярных функций для подгрупп конечного индекса в $SL(2; \mathbb{Z})$, при соответствующем выборе модуля L канонически изоморфен $\mathcal{E}(L)$. В частности, в качестве L пространству $SL(2; \mathbb{Z})$ -инвариантных модулярных форм четного положительного веса k соответствует вещественное линейное пространство однородных полиномов степени $k - 2$ от двух переменных, на котором стандартно действует $SL(2; \mathbb{Z})$ путем линейной замены последних. Именно по этой причине мы называли $\mathcal{E}(L)$ модулем Эйхлера.

Обозначим через $\mathfrak{M}(L)$ подмодуль в L , состоящий из всех $A \in L$, для которых

$$A + A \circ S = A + (-1)^s A \circ P = A + A \circ U + A \circ U^2 = 0,$$

а через $\mathfrak{M}'(L)$ фактормодуль модуля L по подмодулю

$$L_0 = \{A_1 \circ (E + S) + A_2 \circ (E + (-1)^s P) + A_3 \circ (E + U + U^2) \mid \forall A_1, A_2, A_3 \in L\}.$$

Мы их назовем модулями Эйхлера–Шимуры ($\mathfrak{M}'(L)$ — двойственный к $\mathfrak{M}(L)$), продолжая традицию, относящуюся к случаю $s = 2$. Из теоремы 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3. Соответствия

$$\Phi \rightarrow \Phi(E), \quad A \otimes_{\Gamma} [E] \rightarrow A + L_0$$

определяют канонические изоморфизмы

$$\mathcal{E}(L) \cong_K \mathfrak{M}(L), \quad \mathcal{E}'(L) \cong_K \mathfrak{M}'(L).$$

Этот результат позволяет стандартным способом построить теорию операторов Гекке в $\mathfrak{M}(L)$ и $\mathfrak{M}'(L)$ для произвольных модулей L , на которых действует справа полугруппа целочисленных матриц Q из $\mathcal{M}_s(\mathbb{Z})$ с $\det(Q) > 0$. Очевидно, что для конкретных конечномерных модулей L модули Эйхлера–Шимуры (алгебраические аналоги пространств модулярных форм) и собственные значения операторов Гекке можно непосредственно вычислить. Этот факт имеет принципиальное значение при проведении численных экспериментов по поводу многомерной гипотезы Серра о модулярных представлениях группы Галуа (см. [8]).

Теорема 2 позволяет вычислить гомологии и когомологии

$$H_\nu(\Gamma': L), \quad H^\nu(\Gamma': L)$$

для подгрупп Γ' конечного индекса в Γ . Здесь $\nu = s(s-1)/2$ — виртуальная когомологическая размерность группы Γ (см. [9]). Предположим, что кручения группы Γ обратимы в кольце K . Борель и Серр [10] доказали, что модуль Стейнберга

$$St_{\Gamma'}(s) = H^\nu(\Gamma': \mathbb{Z}[\Gamma'])$$

есть свободная от кручения абелева группа счетного ранга с левым действием группы Γ' . При этом имеют место канонические изоморфизмы Бореля–Серра

$$H_k(\Gamma': L) \cong_K H^{\nu-k}(\Gamma': \text{Hom}(St_{\Gamma'}(s), L)),$$

$$H^k(\Gamma': L) \cong_K H^{\nu-k}(\Gamma': L \otimes St_{\Gamma'}(s))$$

для $0 \leq k \leq \nu$. С помощью леммы Шапиро для $k = \nu$ их можно представить в виде

$$H_\nu(\Gamma': L) \cong_K H^0\left(\Gamma: \text{Hom}(St(s), \mathcal{F}(\Gamma/\Gamma') \otimes_K L)\right),$$

$$H^\nu(\Gamma': L) \cong_K H_0\left(\Gamma: (\mathcal{F}(\Gamma/\Gamma') \otimes_K L) \otimes St(s)\right),$$

где $St(s) = St_\Gamma(s)$. Здесь $\mathcal{F}(\Gamma/\Gamma')$ левый модуль над K , состоящий из функций $F: \Gamma/\Gamma' \rightarrow K$. Правое действие группы Γ на $\mathcal{F}(\Gamma/\Gamma') \otimes L$ определяется по правилу

$$(F \otimes A) \circ Q = (F \circ Q) \otimes (A \circ Q), \quad (F \circ Q)(G\Gamma') = F(QG\Gamma')$$

для всех A из L , а также Q и G из Γ .

Поскольку (см. [6] и [7])

$$K \otimes St(s) \cong_K \mathfrak{S}_s(\mathbb{Z}),$$

то справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$H_\nu(\Gamma': L) \cong_K \mathfrak{M}(\mathcal{F}(\Gamma/\Gamma') \otimes_K L), \quad H^\nu(\Gamma': L) \cong_K \mathfrak{M}'(\mathcal{F}(\Gamma/\Gamma') \otimes_K L).$$

Тем самым утверждение теоремы (4.13) из [11] распространяется на остальные $s \geq 5$.

Теперь несколько слов по поводу истории вопроса.

Утверждение теоремы 1 при $s = 2$ (в несколько ином виде) получено Маниным [3], а также Ридером (см. [12] и [13]), который отметил, что топологические методы Суле [14] и Эша [11] позволяют доказать ее и для $s = 3, 4$. Однако они не работают при $s > 4$ по причинам, объясненным в [11].

Автор благодарен А. Эшу и М. Ридеру за обсуждение полученных результатов, а также рецензенту за ценные замечания.

§1. Модулярные элементы

Пусть $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ состоит из всех целочисленных $s \times s$ -матриц $M = (m^1, \dots, m^s)$ с s -столбцами m^i , у которых

$$\text{НОД}(m_1^i, \dots, m_s^i) = 1$$

(т.е. с примитивными s -столбцами). Назовем невырожденную матрицу N из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ приведенной, если она верхнетреугольная и

$$N = (n_1^1 e^1, n_1^2 e^1 + n_2^2 e^2, \dots, n_1^i e^1 + \dots + n_i^i e^i, \dots, n_1^s e^1 + \dots + n_s^s e^s)$$

с $0 \leq n_j^i < n_i^i$ ($1 \leq j < i \leq s$). Ее диагональные элементы положительны и всегда $n_1^1 = 1$.

Из теории целочисленных решеток хорошо известно, что любую невырожденную матрицу $M \in \mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ можно представить в виде $M = QN$ с приведенной матрицей $N \in \mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ и $Q \in \bar{\Gamma}$. Если

$$M = QN = Q'N'$$

— два таких разложения, то

$$N = Q^{-1}Q'N' = Q_1N',$$

где $Q_1 \in \bar{\Gamma}$ — верхнетреугольная матрица. Последовательная проверка условия приведенности матриц N и N' по столбцам, начиная со второго, немедленно приводит к равенству

$$Q^{-1}Q' = Q_1 = E.$$

Поэтому разложение $M = QN$ единственно. Этот факт в дальнейшем играет принципиальную роль.

Пусть $t = t(M)$ есть наибольшее натуральное t , для которого $n_i^i = 1$ при всех $1 \leq i < t$. При этом $t(M) = s + 1$ только для M из $\bar{\Gamma}$. В случае $t(M) \leq s$ положим

$$M_i = Q(e^t, n^1, \dots, \hat{n}^i, \dots, n^s) = (Q(e^t), m^1, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s) \quad (1.1)$$

(столбцы n^i и m^i удаляются). Это снова элементы из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$. Легко проверить, что

$$|\det(M_i)| < |\det(M)| \quad (1 \leq i \leq s). \quad (1.2)$$

Зафиксируем произвольный левый $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ -модуль $\mathcal{H}$ (абелеву группу, на которой слева действует группа $\bar{\Gamma}$) и обозначим через $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ подгруппу в $\mathcal{H}$, состоящую из всех элементов H , для которых

$$(E - I) \cdot H = (E + \bar{S}) \cdot H = (E + (-1)^s \bar{P}) \cdot H = (E + U + U^2) \cdot H = 0. \quad (1.3)$$

ПРИМЕР. Для левого идеала $\bar{\mathcal{L}}(s)$ в $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ из теоремы 1, сформулированной во введении, определим фактормодуль $\mathcal{H} = \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}] / \bar{\mathcal{L}}(s)$. Тогда $H = E + \bar{\mathcal{L}}(s)$ есть элемент из $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$.

Зафиксируем произвольный элемент H из $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ и построим отображение

$$M \rightarrow [M]_H$$

из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ в $\mathcal{H}$ по следующему правилу:

- 1) $[M]_H = 0$, если $\det(M) = 0$;
- 2) $[M]_H = M \cdot H$, если $M \in \bar{\Gamma}$;
- 3) если $|\det(M)| > 1$, то $[M]_H$ определяется рекурсивно из соотношения

$$[M]_H + \sum_{i=1}^s (-1)^i [M_i]_H = 0 \quad (1.4)$$

в соответствии с (1.1) и (1.2).

Элементы $[M]_H$ из $\mathcal{H}$ мы будем называть *модулярными элементами*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В основу этой конструкции положен алгоритм для вычисления модулярных символов через унимодулярные символы $[M]$ с $M \in \Gamma$ из [6].

Содержательная часть настоящей работы связана с доказательством следующего утверждения.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для модулярных элементов $[M]_H = [m^1, \dots, m^s]_H$ выполняются следующие соотношения:

- (I) $[QM]_H = Q[M]_H$ для любого $Q \in \bar{\Gamma}$;
- (II) $[\varepsilon_1 m^1, \dots, \varepsilon_s m^s]_H = [m^1, \dots, m^s]_H$ для любых $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$;
- (III) для любой перестановки σ

$$[m^{\sigma(1)}, \dots, m^{\sigma(s)}]_H = \text{sign}(\sigma)[m^1, \dots, m^s]_H;$$

- (IV) если $\det(M) = 0$, то $[M]_H = 0$;
- (V) для любых s -столбцов $m^0, m^1, \dots, m^s$

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i [m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s]_H = 0.$$

Эту теорему мы докажем позднее. А сейчас покажем, как из нее выводятся теоремы 1 и 2, сформулированные во введении. В соответствии с замечанием 1 из введения мы можем рассматривать модулярные символы $[M]$ только для матриц M из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$.

Применяя основную теорему с $H = E + \bar{\mathcal{L}}(s)$, получаем, что соответствие

$$R \cdot (E + \bar{\mathcal{L}}(s)) \rightarrow R[E] \quad \forall R \in \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$$

определяет изоморфизм между $\mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]/\bar{\mathcal{L}}(s)$ и $\mathfrak{S}_s(\mathbb{Z})$, что и утверждается в теореме 1. Каждый элемент $R \in \mathbb{Z}[\bar{\Gamma}]$ однозначно представляется в виде $R = R_0 + R_1 I$ с R_0 и R_1 из $\mathbb{Z}[\Gamma]$. При этом $I \cdot \mathbb{Z}[\Gamma] = \mathbb{Z}[\Gamma] \cdot I$. Кроме того,

$$E + \bar{S} = (E + S) - S(E - I),$$

$$I(E + \bar{S}) = (E - S + S^2)(E + S) - (E - I),$$

$$E + (-1)^s \bar{P} = (E - S)(E + S) + S^2(E + (-1)^s P) - (-1)^s S^2 P(E - I),$$

$$I(E + (-1)^s \bar{P}) = (E + (-1)^s P) - (E - I),$$

$$I = SES^{-1}I, \quad IU = SU^2 S^{-1}I, \quad IU^2 = SUS^{-1}I.$$

Отсюда следует, что элементы R из $\mathbb{Z}[\Gamma]$, принадлежащие идеалу $\bar{\mathcal{L}}(s)$, составляют идеал $\mathcal{L}(s)$ в $\mathbb{Z}[\Gamma]$, определенный во введении. А это и есть утверждение теоремы 2.

§2. Вспомогательные утверждения

Положим по определению

$$\delta_H(m^0, m^1, \dots, m^s) = \sum_{i=0}^s (-1)^i [m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s]_H.$$

В п. (V) основной теоремы утверждается, что это выражение всегда равно нулю. Нашим главным инструментом при его доказательстве будет следующее очевидное утверждение (аналог равенства $dd(\dots) = 0$ из гомологической алгебры).

ЛЕММА 1. Пусть $m, m^0, m^1, \dots, m^s$ — некоторые примитивные s -столбцы, для которых

$$\delta_H(m, m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s).$$

Тогда $\delta_H(m^0, m^1, \dots, m^s) = 0$.

Действуя на $\delta_H(\dots)$ слева матрицами из $\bar{\Gamma}$, получим еще одно полезное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $\delta_H(m^0, m^1, \dots, m^s) = 0$. Тогда $\delta_H(n^0, n^1, \dots, n^s) = 0$ для любой матрицы $(n^0, n^1, \dots, n^s)$, которая получается из $(m^0, m^1, \dots, m^s)$ перестановкой строк, изменением у некоторых из них знака, а также добавлениями к любой строке целочисленной линейной комбинации остальных строк.

ЛЕММА 3. Пусть $M = (m^1, \dots, m^s)$ — любая матрица из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$ с $\det(M) = 0, \pm 1$. Тогда

- (a) $[\varepsilon_1 m^1, \dots, \varepsilon_s m^s]_H = [m^1, \dots, m^s]_H$ для любых $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$;
- (b) для любой перестановки σ

$$[m^{\sigma(1)}, \dots, m^{\sigma(s)}]_H = \text{sign}(\sigma)[m^1, \dots, m^s]_H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально для $\det(M) = 0$. Пусть теперь $M = Q \in \bar{\Gamma}$. Так как $H \in \mathfrak{N}(\mathcal{H})$, то

$$[I]_H = [E]_H, \quad [\bar{S}]_H = -[E]_H, \quad [\bar{P}]_H = (-1)^s [E]_H.$$

Элементы $\bar{S}$ и $\bar{P}$ порождают конечную мультипликативную группу $\{E(\sigma) = (e^{\sigma(1)}, \dots, e^{\sigma(s)}) \mid \text{все перестановки } \sigma\}$. Поэтому $[E(\sigma)]_H = \text{sign}(\sigma)[E]_H$ и

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1 m^{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_s m^{\sigma(s)}]_H &= [Q(\varepsilon_1 e^{\sigma(1)}, \dots, Q(\varepsilon_s e^{\sigma(s)})]_H = QE(\sigma) \cdot [\varepsilon_1 e^1, \dots, \varepsilon_s e^s]_H \\ &= QE(\sigma) I^{\varepsilon_1} (\bar{P}^{-1} I^{\varepsilon_2} \bar{P}^1) \dots (\bar{P}^{-(s-1)} I^{\varepsilon_s} \bar{P}^{s-1}) \cdot [E]_H \\ &= QE(\sigma) \cdot [E]_H = \text{sign}(\sigma)[Q]_H = \text{sign}(\sigma)[m^1, \dots, m^s]_H. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $M = QN$ — невырожденная матрица из $\mathcal{P}_s(\mathbb{Z})$, где $Q \in \bar{\Gamma}$ и N — приведенная матрица с $n_1^s = \dots = n_{s-1}^{s-1} = 1$. Тогда для любой перестановки σ с $\sigma(s) = s$

$$[m^{\sigma(1)}, \dots, m^{\sigma(s-1)}, m^s]_H = \text{sign}(\sigma)[m^1, \dots, m^{s-1}, m^s]_H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n_s^s = 1$ утверждение следует из леммы 3. Далее проводим индукцию по n_s^s с помощью (1.4).

Следующее утверждение — одно из ключевых мест в работе.

ЛЕММА 5. Пусть $m^0, m^1, \dots, m^s$ — примитивные s -столбцы с

$$\det(m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s) \in \{0, \pm 1\} \quad (i = 0, 1, \dots, s).$$

Тогда $\delta_H(m^0, \dots, m^s) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\det(m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s) = 0$ при всех $i = 0, 1, \dots, s$, то утверждение тривиально. Предположим теперь, что это не так и $n+1$ есть число номеров i , для которых $\det(m^0, \dots, \hat{m}^i, \dots, m^s) = \pm 1$. Докажем нужное равенство индукцией по n . Принимая во внимание лемму 3, мы можем считать, что $Q = (m^1, \dots, m^s) \in \bar{\Gamma}$. После умножения на Q^{-1} слева доказываемое равенство приобретает вид $\delta_H(Q^{-1} \cdot m^0, e^1, \dots, e^s) = 0$. При этом компоненты столбца

$Q^{-1} \cdot m^0$ принимают значения $0, \pm 1$. Последнее равенство с помощью леммы 3 преобразуется к виду

$$\delta_H(e^1 + \dots + e^n, e^1, \dots, e^s) = 0. \quad (2.1)$$

При $n = 1$ оно тривиально, а в случае $n = 2$ речь идет о соотношении

$$[e^1, \dots, e^s]_H - [e^1 + e^2, \hat{e}^1, e^2, \dots, e^s]_H + [e^1 + e^2, e^1, \hat{e}^2, \dots, e^s]_H = 0.$$

Оно также выполнено, поскольку (см. лемму 3)

$$\begin{aligned} [e^1 + e^2, e^1, \hat{e}^2, \dots, e^s]_H &= [-e^1 - e^2, e^1, e^3, \dots, e^s]_H = U \cdot [E]_H, \\ -[e^1 + e^2, \hat{e}^1, e^2, \dots, e^s]_H &= [e^2, -e^1 - e^2, e^3, \dots, e^s]_H = U^2 \cdot [E]_H \end{aligned}$$

и по условию (см. (1.3))

$$[E]_H + U \cdot [E]_H + U^2 \cdot [E]_H = H + U \cdot H + U^2 \cdot H = 0.$$

Пусть теперь $n \geq 3$. Положим в лемме 1

$$m = e^1 + \dots + e^{n-1}, \quad m^0 = e^1 + \dots + e^n, \quad m^i = e^i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Заметим, что (предположение индукции)

$$\delta_H(m, m^1, \dots, m^s) = 0,$$

поскольку среди матриц

$$(e^1 + \dots + e^{n-1}, e^1, \dots, \hat{e}^j, \dots, e^s)$$

ровно $n - 1$ невырожденных для $1 \leq j < n$. По той же причине

$$\delta_H(m, m^0, \dots, \hat{m}^j, \dots, m^s) = 0 \quad (1 \leq j < n),$$

$$\delta_H(m, m^0, \dots, \hat{m}^n, \dots, m^s) = 0,$$

$$\delta_H(m, m^0, \dots, \hat{m}^j, \dots, m^s) = 0 \quad (n < j \leq s).$$

В первом случае среди матриц, получаемых удалением столбца из

$$(e^1 + \dots + e^{n-1}, e^1 + \dots + e^n, e^1, \dots, e^{j-1}, e^{j+1}, \dots, e^n, \dots, e^s),$$

только три невырожденные (удаляются первый или второй столбцы или e^n). Во втором случае только после удаления одного из $n - 1$ столбцов $e^1, \dots, e^{n-1}$ или первого столбца из набора

$$(e^1 + \dots + e^{n-1}, e^1 + \dots + e^n, e^1, \dots, e^{n-1}, e^{n+1}, \dots, e^s)$$

получаются невырожденные матрицы (всего n). В третьем случае после удаления любого столбца из

$$(e^1 + \dots + e^{n-1}, e^1 + \dots + e^n, e^1, \dots, e^n, \dots, e^{j-1}, e^{j+1}, \dots, e^s)$$

получаются только вырожденные матрицы. Лемма 5 полностью доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $m = m_1 e^1 + \dots + m_s e^s$ — произвольный примитивный s -столбец с неотрицательными m_i , среди которых только одно максимальное. Тогда $\delta_H(e^1, \dots, e^s, m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае максимального m_s утверждение непосредственно следует из (1.4) и леммы 4. Применяя лемму 2 и лемму 4, распространяем его на общий случай.

ЛЕММА 7. Пусть m есть любой примитивный s -столбец. Тогда $\delta_H(e^1, \dots, e^s, m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|m|_\infty = \max\{|m_1|, \dots, |m_s|\}$. Для $|m|_\infty = 1$ утверждение непосредственно следует из леммы 5. Пусть оно справедливо для всех m с $|m|_\infty < q$, где $q > 1$. Предположим теперь, что $|m|_\infty = q$. Умножив доказываемое равенство на подходящую матрицу $Q \in \bar{\Gamma}$, представим его в виде (см. также лемму 4)

$$\delta_H(e^1, \dots, e^s, m_1 e^1 + \dots + m_t e^t) = 0, \quad (2.2)$$

где $m_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, t$). Положим $\varepsilon_i = \text{sign}(m_i)$. Из леммы 5 следует, что $\delta_H(\varepsilon_1 e^1 + \dots + \varepsilon_t e^t, e^1, \dots, e^s) = 0$. Для $t < i \leq s$

$$\delta_H(\varepsilon_1 e^1 + \dots + \varepsilon_t e^t, e^1, \dots, \hat{e}^i, \dots, e^s, m) = 0, \quad (2.3)$$

поскольку все i -компоненты из рассматриваемого набора s -столбцов равны нулю. Пусть теперь $1 \leq i < t$. В этом случае после умножения слева на подходящую матрицу из $\bar{\Gamma}$ равенство (2.3) (пока предполагаемое) преобразуется к виду

$$\delta_H(e^1, \dots, e^s, m^i) = 0, \quad m^i = |m^i| e^i + \sum_{\substack{1 \leq j < t \\ j \neq i}} \varepsilon_j (|m_j| - |m_i|) e^j. \quad (2.4)$$

При этом $|m^i|_\infty \leq |m|_\infty$. Принимая во внимание лемму 1 и предположение индукции, отсюда заключаем, что равенство (2.2) достаточно доказать для случая $m_t = q$, $|m_i| < q$ ($1 \leq i < t$). Для неотрицательных $m_1, \dots, m_{t-1}$ оно следует из леммы 6. В оставшихся случаях мы можем считать, что

$$m = - \sum_{1 \leq i \leq l} m_i e^i + \sum_{l < i \leq t} m_i e^i$$

с $1 \leq l < t$ и положительными m_i . Пусть

$$\tilde{m} = \sum_{1 \leq i \leq l} (q - m_i) e^i + \sum_{l < i \leq t} m_i e^i.$$

Прибавив к каждой из первых l строк строку с номером t (лемма 2) и переставив столбец с номером t на первое место (лемма 4), преобразуем (2.4) к виду

$$\delta_H(e^1 + \dots + e^l + e^t, e^1, \dots, \hat{e}^t, \dots, e^s, \tilde{m}) = 0.$$

Это равенство следует из соотношений (в лемме 1 полагаем $m = e^t$)

$$\begin{aligned} \delta_H(e^1 + \dots + e^l + e^t, e^1, \dots, e^s) &= 0, & \delta_H(e^1, \dots, e^s, \tilde{m}) &= 0, \\ \delta_H(e^1 + \dots + e^l + e^t, e^1, \dots, \hat{e}^i, \dots, e^s, \tilde{m}) &= 0 & (i \neq t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первое вытекает из леммы 5, а второе из леммы 6. Осталось проверить третью серию соотношений (2.5). Если $t < i \leq s$, то оно тривиально, поскольку i -е компоненты соответствующих s -столбцов равны нулю. Пусть теперь $l < i < t$. Вычитая из строки с номером t i -ю строку (лемма 2), заменим в (2.5) $\tilde{m}_t = m_t = q$ на $q - m_i$. Применяя лемму 1 (с e^i в качестве вспомогательного m), получим (2.5) с помощью предположения индукции. Осталось рассмотреть случай $1 \leq i \leq l$. Он также сводится к предположению индукции вычитанием i -й строки из каждой из остальных первых l строк и строки с номером t . Таким образом, равенство (2.5), а вместе с ним (2.4) и (2.3) выполнены. Тем самым лемма 7 полностью доказана.

ЛЕММА 8. Для любого примитивного s -столбца m выполняется равенство

$$[-e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H = [e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально для $m_s = 0$. В остальных случаях с помощью леммы 2 оно приводится к случаю, когда $|m_i| < |m_s|$ ($1 \leq i < s$). Проводя индукцию по $|m_s|$ (см. также лемму 5), получим

$$\begin{aligned} [-e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H &= I \cdot [e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, I(m)]_H \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} I \cdot [e^s, e^1, \dots, \hat{e}^i, \dots, e^{s-1}, I(m)]_H \\ &\quad + (-1)^{s-1} I \cdot [e^s, e^1, \dots, e^{s-1}]_H \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} (-1)^{i-1} [e^s, e^1, \dots, \hat{e}^i, \dots, e^{s-1}, m]_H \\ &\quad + (-1)^{s-1} [e^s, e^1, \dots, e^{s-1}]_H \\ &= [e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H. \end{aligned}$$

Лемма 8 доказана.

Из леммы 1 (с вспомогательным столбцом e^s) и леммы 5 непосредственно следует

ЛЕММА 9. При $s \geq 3$ для любого примитивного s -столбца m выполняется равенство

$$\begin{aligned} [e^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H - [-e^1 - e^2, \hat{e}^1, e^2, \dots, e^{s-1}, m]_H \\ + [-e^1 - e^2, e^1, \hat{e}^2, \dots, e^{s-1}, m]_H = 0. \end{aligned}$$

§3. Доказательство основной теоремы

Заметим, что пп. (I) и (IV) непосредственно следуют из определений. Для доказательства п. (V) проведем индукцию по s .

База индукции ($s = 2$). Речь идет о соотношении

$$\delta_H(m^0, m^1, m^2) = [m^1, m^2]_H - [m^0, m^2]_H + [m^0, m^1]_H = 0 \quad (3.1)$$

с любыми примитивными 2-столбцами m^0, m^1, m^2 . Если $\det(m^0, m^1) = 0$, то $m^1 = \varepsilon m^0$ с $\varepsilon = \pm 1$ и равенство (3.1) приобретает вид $[\varepsilon m^0, m^2]_H = [m^0, m^2]_H$. Для $\det(m^0, m^2) = 0$ оно тривиально, а в остальных случаях непосредственно следует из леммы 8. Выбрав подходящим образом 2-столбец m' и матрицу $Q \in \bar{\Gamma}$ (для $s = 2$), получим (3.1) из соотношения (лемма 7)

$$[e^2, m']_H - [e^1, m']_H + [e^1, e^2]_H = 0$$

для случая $\det(m^0, m^1) = \pm 1$. Далее с помощью леммы 1 и соотношения (1.4) проводим индукцию по $|\det(m^0, m^1)|$.

Переход от $s - 1$ к s . Пусть $\det(m^0, \dots, m^{s-1}) = 0$. Тогда для некоторой матрицы Q из $\bar{\Gamma}$

$$(m^0, \dots, m^{s-1}) = Q(\bar{n}^0, \dots, \bar{n}^{s-1}), \quad (3.2)$$

где у $(\bar{n}^0, \dots, \bar{n}^{s-1})$ последняя строка состоит из одних нулей. Удалив ее, получим примитивные $(s-1)$ -столбцы n^i . Для любого примитивного s -столбца m обозначим через $\mathcal{H}_m(H)$ $\mathbb{Z}$ -подмодуль в $\mathcal{H}$, порожденный всеми элементами

$$[N]_H^m = [n^1, \dots, n^{s-1}]_H^m = [\bar{n}^1, \dots, \bar{n}^{s-1}, m]_H = [\bar{N}, m]_H$$

с $N = (n^1, \dots, n^{s-1})$ из $\mathcal{P}_{s-1}(\mathbb{Z})$ (N никак не связано с ранее фигурировавшими приведенными $s \times s$ -матрицами N). На $\mathcal{H}_m(H)$ определим левое действие группы $GL(s-1; \mathbb{Z})$ по правилу

$$Q \cdot [N]_H^m = [QN]_H^m = [\overline{QN}, m]_H.$$

Из лемм 4, 8, 9 следует, что для матриц $E', I', \bar{S}', \bar{P}', U'$ из $GL(s-1; \mathbb{Z})$ (они соответствуют матрицам $E, \dots, U$ из $GL(s; \mathbb{Z}) = \bar{\Gamma}$) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (E' - I') \cdot [E']_H^m &= 0, & (E' + S') \cdot [E']_H^m &= 0, \\ (E' + (-1)^{s-1} \bar{P}') \cdot [E']_H^m &= 0, & (E' + U' + (U')^2) \cdot [E']_H^m &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание предположение индукции, отсюда получаем равенство

$$\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [\bar{n}^0, \dots, \hat{\bar{n}}^i, \dots, \bar{n}^{s-1}, m]_H = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i [n^0, \dots, \hat{n}^i, \dots, n^{s-1}]_H^m = 0.$$

Умножив его на Q из (3.2), приходим к утверждению основной теоремы для $\det(m^0, \dots, m^{s-1}) = 0$. В случае $\det(m^0, \dots, m^{s-1}) = \pm 1$ оно непосредственно следует из леммы 7. Проведя еще одну индукцию по $|\det(m^0, \dots, m^{s-1})|$ (точно так же, как при $s = 2$), с помощью (1.4) и леммы 1 получим нужное утверждение в остальных случаях. Таким образом, равенство (V) полностью доказано. Утверждения (II) и (III) легко из него получаются индукцией по $|\det(m^1, \dots, m^s)|$. Основная теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eichler M. Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale. Math. Z., **67**, 267–298 (1957).
2. Shimura G. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton Univ. Press, NJ, 1971. [Имеется перевод: Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. Мир, М., 1973.]
3. Манин Ю. И. Параболические формы и дзета-функции модулярных кривых. Изв. АН СССР, сер. матем., **36**, 19–66 (1972).
4. Манин Ю. И. Периоды параболических форм и p -адические ряды Гекке. Матем. сб., **92**, № 3, 378–401 (1973).
5. Manin Yu. I. Explicit formulas for the eigenvalues of Hecke operators. Acta Arith., **24**, 239–249 (1973).
6. Ash A., Rudolph L. The modular symbol and continued fractions in higher dimensions. Invent. Math., **55**, 241–250 (1979).
7. Ash A. Unstable cohomology of $SL(n, \mathcal{O})$. J. Algebra, **167**, No. 2, 330–342 (1994).
8. Ash A., Sinnott W. An analogue of Serre's conjecture for Galois representations and Hecke eigenclasses in the mod p cohomology of $GL(n, \mathbb{Z})$. Duke Math. J., **105**, No. 2, 1–24 (2000).
9. Brown K. Cohomology of Groups. Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982. [Имеется перевод: Браун К. Когомологии групп. Наука, М., 1987.]

10. *Borel A., Serre J.-P.* Corners and arithmetic groups. *Comm. Math. Helv.*, **48**, 436–491 (1973).
11. *Ash A.* Cohomology of congruence subgroups of $SL(n, \mathbb{Z})$. *Math. Ann.*, **249**, No. 1, 55–73 (1980).
12. *Reeder M.* Modular Symbols and Steinberg representation. Preprint. 1990
13. *Reeder M.* The Steinberg Module and the Cohomology of Arithmetic Groups. *J. Algebra*, **141**, No. 2, 287–315 (1991).
14. *Soule C.* The cohomology of $SL_3(\mathbb{Z})$. *Topology*, **17**, 1–22 (1978).

Хабаровское отделение Института прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук
e-mail: vab@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
13 мая 2002 г.