Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Ю. В. Якубович, Асимптотика равномерной меры на симплексах, случайные композиции и разбиения, *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 4, 39–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:51:30

Асимптотика равномерной меры на симплексах, случайные композиции и разбиения*

© 2003. А. М. ВЕРШИК, Ю. В. ЯКУБОВИЧ

К 90-летию Израиля Моисеевича Гельфанда¹⁾

§1. Введение: симплексы, композиции, разбиения

Пусть $\Sigma^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ обозначает $(m-1)$ -мерный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^m$, а ℓ^m — равномерную вероятностную меру на Σ^m , т. е. меру Лебега, отнормированную таким образом, что $\ell^m(\Sigma^m) = 1$. Первая задача, которую мы изучаем в этой работе, состоит в исследовании предельных свойств мер ℓ^m при $m \rightarrow \infty$, более точно, — вопроса о том, как выглядит в асимптотическом пределе «типичная точка» симплекса, снабженного лебеговой мерой. Этот относительно простой вопрос решается здесь (см. ниже теорему 1 и следствие): предельное распределение типичной точки симплекса после нормировки есть *экспоненциальное распределение*. Постановка этого вопроса, естественного самого по себе, возникла в связи с более трудной задачей, являющейся его дискретным или решетчатым аналогом.

Речь идет об асимптотике композиций и разбиений натуральных чисел. Начнем с первых; напомним, что композиция натурального числа — это представление натурального числа n в виде суммы m натуральных слагаемых $n = \omega_1 + \dots + \omega_m$ с учетом порядка слагаемых, см. [1]. Мы записываем указанную композицию в виде $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ и обозначаем множество всех таких композиций через $\mathcal{C}(n, m)$. Рассмотрим отображение $\pi: \mathcal{C}(n, m) \rightarrow \Sigma^m$, сопоставляющее композиции $n = \omega_1 + \dots + \omega_m$ точку $(\omega_1/n, \dots, \omega_m/n) \in \Sigma^m$. Образ множества всех композиций $\mathcal{C}(n, m)$ при отображении π есть пересечение целочисленной решетки с шагом $1/n$ с симплексом Σ^m . Рассмотрим равномерную меру $\nu^{n,m}$ на композициях числа n на m слагаемых. Если n значительно превосходит m , т. е. $m = o(n)$, то образ равномерной меры на композициях под действием отображения π есть дискретное приближение нормированной меры Лебега ℓ^m на симплексе Σ^m . Мы увидим, что асимптотика типичной композиции при этом условии такая же, как и в случае непрерывной меры (теорема 2 и следствие), — экспоненциальное распределение. Случай пропорционального стремления m и n к бесконечности выделен особо (теорема 3) — здесь предельное распределение

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ НШ-145.2003.1.

¹⁾Мой первый подробный математический разговор с И. М. Гельфандом произошел в самом начале 70-х гг. Я рассказывал ему о недавно сделанной работе об асимптотике случайных подстановок и о планах исследования представлений симметрической группы и диаграмм Юнга. Его замечания и, главное, общая одобрительная оценка этой темы (которую я позже назвал асимптотической теорией представлений) были исключительно ценны для меня. Начиная с 1972 г., мы много работали с ним и М. И. Граевым над другими задачами (представления бесконечномерных групп Ли). Настоящая работа посвящена той первой теме — асимптотической комбинаторике. — *Прим. первого автора.*

дискретно. Таким образом, теоремы 2 и 3 и их следствия исчерпывают вопрос об асимптотическом поведении композиций относительно равномерной меры.

Гораздо сложнее обстоит дело с асимптотикой разбиений. Разбиение натурального числа есть разложение его в сумму натуральных слагаемых без учета порядка. В литературе уже отмечалось (см. [1]), что более элементарный по сравнению с теорией разбиений анализ композиций иногда помогает изучать и разбиения. В настоящей статье мы иллюстрируем это, применяя доказанный результат об асимптотике композиций к более сложному вопросу о предельном распределении разбиений.

Предельная форма разбиения натурального числа без ограничений на рост числа слагаемых относительно равномерной меры была найдена первым автором в 80-х гг. (см. [13])¹. В работах [15, 16] подробно изучался вопрос об асимптотическом поведении разбиений и их флуктуаций; в них приведены предельные формы для разбиений как с фиксированным, так и не фиксированным ростом числа слагаемых разбиений; при этом рассматривались обобщения равномерной статистики (так называемые мультипликативные статистики). Особенно интересны задачи с фиксированным ростом числа слагаемых. Множество разбиений с заданным числом слагаемых и есть аналог микроканонического ансамбля в теории идеального квантового газа.

Совокупность композиций $\mathcal{C}(n, m)$ расслаивается над пространством разбиений $\mathcal{P}(n, m)$, и слой над данным разбиением есть совокупность всех композиций с одинаковым составом слагаемых. Обозначим соответствующую проекцию через $\pi_{n,m}$. Таким образом, *на множестве $\mathcal{P}(n, m)$ разбиений натурального числа n на m слагаемых есть две канонические меры* — равномерная мера, обозначаемая через $\mu^{n,m}$, и образ равномерной меры $\nu^{n,m}$ на композициях при проекции $\pi_{n,m}: \mathcal{C}(n, m) \mapsto \mathcal{P}(n, m)$. *Основной вопрос — каково асимптотическое соотношение между этими мерами.* Поведение предельной формы разбиений, найденное аналитическими методами в [15], описывается так: если рост числа слагаемых в разбиении есть $m = o(n^{1/2})$, то предельное распределение разбиений, типичных относительно равномерной меры $\mu^{n,m}$, есть экспоненциальное распределение и, следовательно (см. выше), оно совпадает с предельным распределением композиций относительно равномерной меры или, иначе, с предельным распределением относительно меры $\nu^{n,m}$. Таким образом, композиции и разбиения имеют в этом диапазоне роста числа слагаемых одинаковые по отношению к своим равномерным мерам предельные распределения.

Но для роста числа слагаемых $m = O(n^{1/2})$ ситуация меняется, и предельные распределения различны: для композиций из $\mathcal{C}(n, m)$ оно по-прежнему остается экспоненциальным во всем диапазоне роста $m = o(n)$, а для разбиений оно уже более сложно, см. работы [15, 16]. Причина состоит в том, что описанные выше две меры на пространстве разбиений становятся асимптотически взаимно сингулярными и имеют существенно различные множества разбиений в качестве носителей. Нельзя ли использовать апостериорное совпадение предельных распределений разбиений и композиций для упрощения вывода формул для разбиений, которые были получены переходом к большому каноническому ансамблю

¹Как сообщил нам недавно профессор Д. Кнут, эта предельная форма была выписана без доказательства Темперли еще в 50-х гг. [12]. Как замечено в [13], результат о предельной форме может быть также извлечен из оценок работы [11].

с последующим доказательством эквивалентности? Такой чисто комбинаторный план реализован здесь для интервала роста до $m = o((n \log n)^{1/3})$. Для интервала роста m между степенями $(n \log n)^{1/3}$ и $n^{1/2}$ прямое комбинаторное доказательство совпадения предельных форм пока отсутствует.

Оказалось, что к этим вопросам имеет прямое отношение одна старая теорема Эрдёша–Ленера [4]; они показали, что если $n, m \rightarrow \infty$ и $m = o(n^{1/3})$, то количество разбиений числа n на m слагаемых асимптотически эквивалентно $\frac{1}{m!} \binom{n-1}{m-1}$, т. е. количеству композиций числа n на m слагаемых, поделенному на $m!$. Это означает, в частности, что почти все разбиения (т. е. все, за исключением $o(\#\mathcal{P}(n, m))$ разбиений) имеют различные слагаемые. Следовательно, прообраз почти всех разбиений при естественной проекции $\pi_{n,m}$ множества композиций на множество разбиений состоит из $m!$ композиций. Таким образом, для почти всех разбиений доля слагаемых, больших заданного, совпадает с долей таких же слагаемых в соответствующих композициях, т. е. две меры — $\mu^{m,n}$ и $\pi_{n,m}(\nu^{n,m})$, описанные ранее, «почти совпадают», т. е. плотность одной по другой равна единице на множестве, мера которого стремится к единице с ростом n . Это и дает другое доказательство совпадения при $m = o(n^{1/3})$ предельных форм. Более прозрачный вариант доказательства теоремы Эрдёша–Ленера дал Гупта [5]; см. также [1]. Мы кратко намечаем еще одно по существу комбинаторное доказательство и показываем точность показателя $1/3$ (теорема 5) в следующем смысле: если число слагаемых растет быстрее чем $n^{1/3}$, слагаемые в типичных (по равномерной статистике) разбиениях и композициях уже могут повторяться и две указанные меры не являются асимптотически тождественно равными. Мы вернемся к этому в другой работе.

Тем не менее, если число слагаемых растет медленнее, чем $n^{1/2}$, предельные формы композиций и разбиений по теореме 4 не меняются и, таким образом, все еще совпадают. Объясняется это тем, что, хотя группа симметрий (т. е. стабилизатор) типичного разбиения отлична от единичной (так как появляются неустрашимым образом равные слагаемые), по-видимому, порядки стабилизаторов приблизительно одинаковы. Однако прямого доказательства этого факта пока нет. Если же рост числа слагаемых равен или превышает квадратный корень из их суммы, то различие становится уже существенным: композиции, как отмечалось, по-прежнему имеют предел e^{-t} , а предельная форма разбиений — иная и, более того, она различна для Бозе- и Ферми-статистик (см. [16]).

Точные формулировки содержатся в следующем параграфе, а в третьем параграфе приводятся доказательства. Мы завершаем работу замечаниями о других мерах на симплексах.

§2. Точные формулировки результатов

Для случая непрерывного симплекса наш основной результат состоит в следующем:

ТЕОРЕМА 1. Для всех $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$ выполнено равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ell^m \left\{ x \in \Sigma^m : \left| \frac{1}{m} \# \left\{ i : x_i > \frac{t}{m} \right\} - e^{-t} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

равномерно по t .

Наша нормировка соответствует интерпретации точек симплекса как вероятностных мер на некотором конечном множестве, и теорема отвечает на вопрос, каково предельное распределение типичной точки симплекса как конечного дискретного распределения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$ выполнено равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ell^m \left\{ x \in \Sigma^m : \left| \sum_{i: x_i > t/m} x_i - (t+1)e^{-t} \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Стоит отметить, что слабый предел равномерных мер на симплексах (при вложении конечномерных симплексов как финитных в бесконечномерный симплекс Σ^∞) есть δ -мера, сосредоточенная в нуле, в отличие, например, от случая мер Эберляйна и Пуассона–Дирихле (см. §4). Поэтому решение задачи, сформулированной в начале работы, не может быть сведено к изучению предельного объекта; более того, и ответ (экспонента как предельное распределение) выглядит не соответствующим пределу (δ -мера в нуле).

Дискретным аналогом этих результатов для композиций является

ТЕОРЕМА 2. Для всех $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m=o(n)}} \frac{\#\{\omega \in \mathcal{C}(n, m) : |\frac{1}{m} \#\{i : \omega_i/n > t/m\} - e^{-t}| < \varepsilon\}}{\#\mathcal{C}(n, m)} = 1$$

равномерно по t .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m=o(n)}} \frac{\#\{\omega \in \mathcal{C}(n, m) : |\sum_{i: \omega_i/n > t/m} \omega_i/n - (t+1)e^{-t}| < \varepsilon\}}{\#\mathcal{C}(n, m)} = 1.$$

В предыдущих утверждениях число слагаемых (m) в композиции росло медленнее суммы (n); аналогичный вопрос о композициях в предположении, что $m/n \rightarrow A > 0$, чуть более сложен. Такие композиции уже не являются решеточной моделью симплекса.

ТЕОРЕМА 3. Для всех $\varepsilon > 0$, $A > 0$ и целых $k \geq 1$

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m/n \rightarrow A}} \frac{\#\{\omega \in \mathcal{C}(n, m) : |\frac{1}{m} \#\{i : \omega_i = k\} - A(1-A)^{k-1}| < \varepsilon\}}{\#\mathcal{C}(n, m)} = 1.$$

Другими словами, теоремы 2 и 3 утверждают, что при $n, m \rightarrow \infty$, если отношение m/n стремится к нулю, то типичная композиция после нормировки ведет себя так же, как координаты симплекса Σ^m с равномерной мерой, а если отношение m/n стремится к $A > 0$, то относительные количества слагаемых $1, 2, \dots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $1 - A$, иначе говоря, предельное распределение есть (дискретное) геометрическое распределение.

Теорема 3 может быть использована для получения информации об относительном количестве слагаемых в типичной композиции числа n . Пусть $\mathcal{C}(n) = \bigcup_{m=1}^n \mathcal{C}(n, m)$ обозначает множество всех композиций числа n .

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всех $\varepsilon > 0$ и натуральных $k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\omega \in \mathcal{C}(n) : |\frac{1}{m} \#\{i : \omega_i = k\} - 2^{-k}| < \varepsilon\}}{\#\mathcal{C}(n)} = 1.$$

Как уже отмечалось, в диапазоне роста $m = o(n^{1/2})$ асимптотика типичных разбиений относительно равномерной меры такая же, как и асимптотика типичных композиций относительно своей равномерной меры, описанная выше. Связь с разбиениями и была поводом для рассмотрения более простой задачи о композициях. Для полноты приведем без доказательства формулировку соответствующей теоремы из нашей работы [15]. Пусть $\mathcal{P}(n, m)$ обозначает множество разбиений натурального числа n на m слагаемых. При $\lambda \in \mathcal{P}(n, m)$ обозначим через $r_k(\lambda)$ число слагаемых k в разбиении λ .

ТЕОРЕМА 4. При всех $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m = o(n^{1/2})}} \frac{1}{\#\mathcal{P}(n, m)} \#\left\{\lambda \in \mathcal{P}(n, m) : \left|\frac{1}{m} \sum_{k > tn/m} r_k(\lambda) - e^{-t}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 5. Рассмотрим последовательность равномерных мер $\nu^{n, m}$ на множествах композиций $\mathcal{C}(n, m)$.

Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) рост числа слагаемых в композициях подчинен условию $m = o((n \log n)^{1/3})$;
- 2) почти все композиции имеют различные слагаемые, точнее

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \nu^{n, m}\{\omega \in \mathcal{C}(n, m) : \omega_i \neq \omega_j, i \neq j\} > 1 - \varepsilon.$$

В одну сторону импликация является незначительным усилением результата Эрдёша и Ленера [4].

§3. Доказательства

Доказательство первых теорем основано на следующей конструкции равномерной меры на симплексе.

ЛЕММА 1. Пусть $Y_1, \dots, Y_{m-1}$ — независимые случайные величины, распределенные равномерно на $[0, 1]$. Положим $Y_0 = 0$ и $Y_m = 1$. Рассмотрим (случайную) перестановку $\sigma \in S_{m-1}$, такую, что $X_{\sigma(1)} \leq \dots \leq X_{\sigma(m-1)}$. Положим $X_i = Y_{\sigma(i)} - Y_{\sigma(i-1)}$, $i = 1, \dots, m$ ($\sigma(0) = 0$ и $\sigma(m) = m$). Тогда вектор $(X_1, \dots, X_m)$ имеет равномерное распределение на Σ^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение леммы по индукции. При $m = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно выполнено для симплекса Σ^m , и покажем, что для симплекса Σ^{m+1} оно также справедливо. Действительно, при $t \in [0, 1]$ для симплекса Σ^{m+1} имеем $\ell^{m+1}(\{x \in \Sigma^{m+1} : x_{m+1} \leq t\}) = 1 - (1 - t)^m$. Для описываемой конструкции $\mathbf{P}\{X_{m+1} \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{X_{m+1} > t\} = 1 - \mathbf{P}\{Y_i < 1 - t, i = 1, \dots, m\} = 1 - (1 - t)^m$. Таким образом, распределение последних координат совпадает для обеих конструкций. Условное распределение $(X_1/t, \dots, X_m/t)$ при условии $X_{m+1} = 1 - t$ совпадает с распределением, полученным при помощи нашего построения для $m - 1$ случайных величин Y_i . Аналогично, распределение $(x_1/t, \dots, x_m/t)$ на симплексе Σ^{m+1} при условии $x_{m+1} = 1 - t$ будет равномерным распределением на симплексе Σ^m . Поэтому

условные распределения также совпадают по предположению индукции, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу симметрии мер ℓ^m все координаты симплекса имеют одинаковое распределение. Используя лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned}\ell^m\{(x_1, \dots, x_m) \in \Sigma^m : x_1 > t/m\} &= \mathbf{P}\{X_1 > t/m\} \\ &= \mathbf{P}\{Y_i > t/m, i = 1, \dots, m-1\} = (1 - t/m)^{m-1} \rightarrow e^{-t}.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение теоремы сводится к эргодической теореме (сходимости эмпирического распределения к теоретическому). $\square$

Отметим, что распределение точек $(mY_1, \dots, mY_{m-1})$ слабо сходится при $m \rightarrow \infty$ к распределению скачков точечного процесса Пуассона с интенсивностью 1. Другими словами, распределение количества точек, попавших в фиксированный интервал $[A, B]$, слабо сходится к распределению Пуассона с параметром $B - A$. Это дает другое доказательство теоремы 1, поскольку, как известно, расстояния между соседними скачками процесса Пуассона имеют экспоненциальное распределение¹⁾.

Перейдем к аналогичным утверждениям для композиций. Мы всегда предполагаем, что $n \geq m$ — положительные целые числа.

ЛЕММА 2. Пусть $Y_1, \dots, Y_{m-1}$ — случайные величины со следующим распределением: Y_1 распределена равномерно на $\{1, \dots, n-1\}$, а при $i \geq 2$, если известна реализация $Y_1, \dots, Y_{i-1}$, случайная величина Y_i распределена равномерно на $\{1, \dots, n-1\} \setminus \{Y_1, \dots, Y_{i-1}\}$ ²⁾. Положим $Y_0 = 0$ и $Y_m = n$. Рассмотрим (случайную) перестановку $\sigma \in S_{m-1}$, такую, что $Y_{\sigma(1)} \leq \dots \leq Y_{\sigma(m-1)}$. Положим $X_i = Y_{\sigma(i)} - Y_{\sigma(i-1)}$, $i = 1, \dots, m$ ($\sigma(0) = 0$ и $\sigma(m) = m$). Тогда вектор $(X_1, \dots, X_m)$ имеет равномерное распределение на $\mathcal{C}(n, m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лемму по индукции. При $m = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно выполнено для m , и покажем, что оно справедливо и для $m + 1$. Прежде всего, отметим известный факт: $\#\mathcal{C}(n, m) = \binom{n-1}{m-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\#\{\omega \in \mathcal{C}(n, m+1) : \omega_{m+1} = k\}}{\#\mathcal{C}(n, m+1)} &= \frac{\#\mathcal{C}(n-k, m)}{\#\mathcal{C}(n, m+1)} \\ &= \frac{\binom{n-k-1}{m-1}}{\binom{n-1}{m-1}} = m \frac{(n-k-1)!}{(n-k-m)!} \frac{(n-1-m)!}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

Проверим, что X_{m+1} имеет такое же распределение. Действительно,

$$\mathbf{P}\{Y_i \leq n-k, i = 1, \dots, m\} = \frac{n-k}{n-1} \frac{n-k-1}{n-2} \dots \frac{n-k-m+1}{n-m} \quad (1)$$

¹⁾ Авторы выражают признательность проф. Б. Вейссу, напомнившему эту простую модель построения равномерной меры на симплексе, использование которой значительно упростило первоначальные доказательства.

²⁾ То же распределение получается, если на $m-1$ независимых случайных величин, распределенных равномерно на $\{1, \dots, n-1\}$, наложить условие, что они все принимают различные значения. Это может быть использовано для другого доказательства леммы, но мы предпочитаем приводимое доказательство, поскольку оно аналогично доказательству леммы 1.

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{m+1} = k\} &= \mathbf{P}\{Y_i \leq n - k, i = 1, \dots, m\} \\ &- \mathbf{P}\{Y_i \leq n - k - 1, i = 1, \dots, m\} = m \frac{(n - k - 1)!}{(n - k - m)!} \frac{(n - m - 1)!}{(n - 1)!}. \end{aligned}$$

Это показывает, что распределения величин ω_{m+1} и X_{m+1} совпадают. Условное распределение вектора $(X_1, \dots, X_m)$ при условии $X_{m+1} = k$ совпадает с распределением вектора $(X_1, \dots, X_m)$, полученным при помощи $m - 1$ случайных величин Y_i , которые принимают значения из множества $\{1, \dots, n - k - 1\}$. Что касается композиций, то условное распределение вектора $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ при условии $\omega_{m+1} = k$ будет равномерным распределением на $\mathcal{C}(n - k, m)$. Поэтому они совпадают по предположению индукции. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и в случае равномерной меры на симплексе, все координаты $X_1, \dots, X_m$ распределены одинаково. Используя (1), получаем

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq k\} = \left(1 - \frac{k-1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{k-1}{n-2}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n-m+1}\right). \quad (2)$$

Пусть теперь $n, m \rightarrow \infty$, $m = o(n)$, и положим $k = \lceil tn/m \rceil$ в (2). Получаем

$$\mathbf{P}\{X_1 \geq \lceil tn/m \rceil\} \sim (1 - t/m)^m \rightarrow e^{-t},$$

что опять сводит утверждение теоремы к совпадению предела эмпирического распределения с теоретическим. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Полагая $k \geq 1$ фиксированным и используя соотношение (2), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_1 = k\} &= \mathbf{P}\{X_1 \geq k\} - \mathbf{P}\{X_1 \geq k + 1\} \\ &= \frac{(n - k) \cdots (n - k - (m - 2)) - (n - k - 1) \cdots (n - k - (m - 1))}{(n - 1)(n - 2) \cdots (n - (m - 1))} \\ &= \frac{(n - k - 1) \cdots (n - k - (m - 2))}{(n - 2) \cdots (n - (m - 1))} \frac{m - 1}{n - 1} \\ &= \frac{(n - m)(n - m - 1) \cdots (n - m - (k - 2))}{(n - 2)(n - 3) \cdots (n - 2 - (k - 2))} \frac{m - 1}{n - 1}, \end{aligned}$$

где в последней строчке первую дробь мы полагаем равной 1 при $k = 1$. Устремляя n , m к ∞ и m/n к A и используя тот факт, что распределение X_i не зависит от i , получаем утверждение теоремы. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Поскольку для почти всех композиций числа n количество слагаемых эквивалентно $n/2$ при $n \rightarrow \infty$, следствие вытекает из утверждения теоремы 3 при $A = 1/2$. $\square$

Доказательство теоремы 5 следует из двух лемм.

ЛЕММА 3. Рассмотрим множество $X_n^m = \{(c_1, \dots, c_m), c_i \in \{1, \dots, n\}, i = 1, \dots, m\}$, — произведение $m = m(n)$ экземпляров множества $\{1, \dots, n\}$. Следующие два условия равносильны:

1) $m = o(n^{1/2})$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что при $n > N$ число последовательностей в X_n^m , у которых все элементы различны, больше чем $(1 - \varepsilon)n^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число последовательностей, у которых все координаты различны, равно $n^m \cdot \prod_{i=1}^m (1 - i/n)$; для того чтобы последнее произведение сходилось к единице, необходимо и достаточно, чтобы $m = o(n^{1/2})$. $\square$

В вероятностных терминах лемма утверждает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_i \neq \xi_j \text{ при } i \neq j, i, j = 1, \dots, m\} = 1,$$

где $m = o(n^{1/2})$ и ξ_i — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $\{1, \dots, n\}$.

Следующее утверждение уточняет лемму 3:

Если $m = o(n^{1/2})$ и $k = k(n, m)$ меняется так, что $(k \log n)/(nm)$ отделено от нуля и бесконечности, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\xi_i \neq \xi_j \text{ при } i \neq j, i, j = 1, \dots, m \mid \sum_{i=1}^m \xi_i = k\right\} = 1.$$

Другими словами, условная вероятность при условии, что сумма величин ξ_i принимает фиксированное значение, не слишком далекое от среднего, тоже стремится к 1. Доказательство следует из локальной предельной теоремы.

Следующая лемма вытекает из точных формул для числа композиций.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, m \rightarrow \infty \\ m = o(n^\alpha)}} \nu^{n, m} \left\{ \omega \in \mathcal{C}(n, m) : \left| \frac{\max\{\omega_i, i = 1, \dots, m\}}{\frac{n}{m} \log m} - 1 \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Иначе говоря, максимальное слагаемое типичной композиции растет, как $\frac{n}{m} \log m$. Эта лемма есть частный случай общей теоремы об асимптотике и флуктуациях максимальных слагаемых разбиений, которая будет изложена в другой работе. Она также утверждает, что распределение флуктуаций максимального слагаемого есть известное распределение Гамбела $e^{-e^{-x}}$.

§4. Замечания

1. Бесконечномерные симплексы. В упомянутых выше работах (см. литературу в них, а также [9, 14]) рассматривался также ряд мер на бесконечномерном симплексе Σ^m и их предельные свойства при $m \rightarrow \infty$. В частности, в качестве примера приведем меры Эберляйна на бесконечномерном симплексе $\Sigma^\infty = \{(x_i)_{i=1}^\infty : x_i \geq 0, \sum_i x_i \leq 1\}$ (также называемые GEM-распределениями) и тесно связанные с ними распределения Пуассона–Дирихле, которые появляются во многих задачах (случайные перестановки, процесс «ломания палки», распределение простых чисел и т. д.). Напомним, что мера Эберляйна — это образ равномерной меры на бесконечномерном кубе Q^∞ при отображении $Q^\infty \ni (y_1, y_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma^\infty$, где $x_i = y_i(1 - y_1) \cdots (1 - y_{i-1})$. Она была введена Эберляйном в работе [3], где были даны ее простейшие свойства. Затем она была обобщена и детально изучена; см., например, [7, 9, 10, 14].

Бесконечномерный симплекс Σ^∞ также расслаивается над бесконечномерным симплексом $\tilde{\Sigma}^\infty = \{(x_i)_{i=1}^\infty : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i = 1\}$ (см. [14]), и слой над типичной точкой есть группа S_∞ подстановок слагаемых. Например, мера Эберляйна есть поднятие мер Пуассона–Дирихле, определенных на $\tilde{\Sigma}^\infty$, на Σ^∞ .

База естественно вкладывается в большой симплекс как множество рядов с монотонно убывающими членами; в то же время имеется общая процедура поднятия мер с базы на симплекс (size-biased method) (см. например, [9]). Хотя наиболее интересными являются асимптотики мер на базе (т.е. зависящие только от распределения членов ряда, а не от порядка слагаемых), статистика перестановок членов ряда, приводящих данный ряд к монотонному (т.е. переводящих в базу) очень важна и мало изучена (см. [14], где сформулирована одна задача такого типа). К обсуждаемым вопросам относится также связь с распределением Пуассона–Дирихле и мерой Эберляйна на пространстве положительных рядов, которое возникает во многих задачах.

2. Вторичные разбиения и случайные подгруппы Юнга. Пусть λ — разбиение числа $n(\lambda)$, содержащее $m(\lambda)$ ненулевых слагаемых. Помимо $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ как важнейших характеристик разбиения λ имеет смысл ввести еще *вторичное разбиение* $\rho(\lambda)$, а именно разбиение множества слагаемых на блоки из равных слагаемых. Это — в точности «числа заполнения» или вектор кратностей, рассматриваемые как слагаемые вторичного разбиения. Если фиксировано число слагаемых ($m = m(\lambda)$) в исходном разбиении, то вторичное разбиение есть разбиение этого числа. Число слагаемых вторичного разбиения — это число различных слагаемых исходного. Пусть задана некоторая статистика на разбиениях; тогда она порождает новую статистику на вторичных разбиениях; по-видимому, она не изучалась, даже если исходная мера — равномерная мера на разбиениях с заданным числом слагаемых. В работе Эрдёша и Ленера [4] рассматривалась средняя кратность слагаемых и число различных слагаемых (т.е. средняя длина блока вторичного разбиения и число блоков) для равномерной меры без ограничения числа слагаемых. Их результат был затем уточнен Вилфом [17]. Более точные результаты относительно кратностей случайно выбранного слагаемого в случайном разбиении получены в работе Кортис и др. [2].

Интересно изучить характеристики группы автоморфизмов разбиения, т.е. подгруппы Юнга, отвечающей разбиению, например, асимптотику ее порядка относительно данной статистики. По-видимому, это естественный способ получать случайную подгруппу симметрической группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. Наука, М., 1982.
2. Corteel S., Pittel B., Savage C. D., Wilf H. S. On the multiplicity of parts in a random partition. Random Structures and Algorithms, **14**, No. 2, 185–197 (1999).
3. Eberlein W. An integral over function space. Canad. J. Math., **14**, 370–384 (1962).
4. Erdős P., Lehner J. The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. Duke Math. J., **8**, 335–345 (1941).
5. Gupta H. On an asymptotic formula in partitions. Proc. Indian Acad. Sci., **A16**, 101–102 (1942).
6. Hwang H.-K., Yeh Y.-N. Measures of distinctness for random partitions and compositions of an integer. Adv. in Appl. Math., **19**, No. 3, 378–414 (1997).
7. Kingman J. F. C. Random discrete distributions. J. Roy. Statist. Soc. B, **37**, 1–15 (1975).
8. Knopfmacher A., Mays M. E. Compositions with m distinct parts. Ars Combinatoria, **53**, 111–128 (1999).
9. Pitman J., Yor M. The two-parameter Poisson–Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. Ann. Probab., **25**, 855–900 (1997).

10. *Shepp L., Lloyd S.* Ordered cycle lengths in a random permutation. Trans. Amer. Math. Soc., **121**, 340–357 (1966).
11. *Szalay M., Turan R.* On some problems of statistical theory of partitions. I. Acta Math. Acad. Sci. Hungary, **29**, 361–379 (1977).
12. *Temperley H. N. V.* Statistical mechanics and the partition of number. II. Proc. Cambridge Philos. Soc., **48**, 683–697 (1952).
13. *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотика максимальной и типичной размерности неприводимых представлений симметрической группы. Функц. анализ и его прил., **19**, вып. 1, 25–36 (1985).
14. *Вершик А. М., Шмидт А. А.* Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. Чч. 1, 2. Теория вероятностей и ее применения, **22**, вып. 1, 72–88 (1977); **23**, вып. 2, 42–54 (1978).
15. *Vershik A., Yakubovich Yu.* Limit shape and fluctuations of random partitions of naturals with fixed number of summands. Moscow Math. J., **1**, No. 3, 457–468 (2001).
16. *Вершик А.* Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации. Функц. анализ и его прил., **30**, вып. 2, 19–30 (1996).
17. *Wilf H.* Three problems in combinatorial asymptotics. J. Combin. Theory, Ser. A, **35**, 199–207 (1983).

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
Международный институт Э. Шрёдингера
С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова

Поступило в редакцию
15 сентября 2003 г.