Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рождественский, Точная оценка скорости сходимости в среднем биркгофовых сумм для некоторых классов периодических дифференцируемых функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 43–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:01:29

Точная оценка скорости сходимости в среднем биркгофовых сумм для некоторых классов периодических дифференцируемых функций*

© 2006. А. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

§1. Введение

Пусть $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ есть d -мерный тор, $d \in \mathbb{N}$. Тор $\mathbb{T}^d$ будем представлять как d -мерный куб $[0, 1]^d$ с отождествленными противоположными гранями. Для заданного вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ через $T_\alpha: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ обозначим преобразование сдвига тора $\mathbb{T}^d$ на вектор α , $T_\alpha x_i = x_i + \alpha_i \pmod{1}$ ($i = 1, \dots, d$).

Для заданной суммируемой функции $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ и вектора α положим

$$S_n(f)(x) = S_n^\alpha(f)(x) = \left(\sum_{s=0}^{n-1} f \circ T_\alpha^s \right)(x) = \sum_{s=0}^{n-1} f(x + s\alpha),$$

т. е. $S_n(f)$ есть *сумма Биркгофа* порядка n над преобразованием T_α .

Из теоремы Кронекера–Вейля о равномерном распределении последовательности $\{s\alpha\}$ следует, что для всякой непрерывной на $\mathbb{T}^d$ функции f биркгофовы средние $\frac{1}{n}S_n^\alpha(f)$ равномерно сходятся к «пространственному среднему» $I(f) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) dx$ тогда и только тогда, когда вектор α иррационален, т. е. числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ (см. [1, §§4.1, 4.2]). Отсюда в силу плотности множества непрерывных функций в пространствах $L_p(\mathbb{T}^d)$ (см. [2, гл. 1, §11]) и соотношения $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\infty$, $0 < p < \infty$ (см. [2, гл. 1, §10]), немедленно следует, что средние $\frac{1}{n}S_n^\alpha(f)$ сходятся к $I(f)$ в смысле L_p -топологии для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$ ¹). Ясно, что $\frac{1}{n}S_n(f) - I(f) = \frac{1}{n}S_n(f - I(f))$, и, значит, проблема оценки скорости сходимости биркгофовых средних сводится к оценке роста суммы $S_n(f)$ для функций f с нулевым средним. Отметим здесь, что, какой бы иррациональный вектор α ни взять, даже среди аналитических на $\mathbb{T}^d$ функций с нулевым средним найдется функция f , для которой величина $\|S_n^\alpha(f)\|_p$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (см. [3, гл. 1, §3]). С другой стороны, тривиальную оценку скорости сходимости биркгофовых средних, $\|S_n^\alpha(f)\|_p = o(n)$ ($f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $I(f) = 0$), нельзя уточнить для *всего* класса непрерывных на $\mathbb{T}^d$ функций. Действительно, из результатов работы [4] следует, что для всякой последовательности положительных чисел $a_n = o(n)$ и всякого иррационального вектора α найдется всюду плотное G_δ -подмножество

*Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 03-51-5070) и РФФИ (гранты 05-01-00066, 04-01-00066).

¹) Для $p \in (0, +\infty)$ и измеримой функции f , для которой сходится интеграл $\int_{\mathbb{T}^d} |f(t)|^p dt$, мы полагаем $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{T}^d} |f(t)|^p dt)^{1/p}$. В случае $p \geq 1$ функционал $\|\cdot\|_p$ является нормой пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$, а когда $p \in (0, 1)$ — квазинормой, и в этом случае $\|f + g\|_p \leq 2^{1/p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$ для любых $f, g \in L_p(\mathbb{T}^d)$.

непрерывных на $\mathbb{T}^d$ функций f с нулевым средним, для которых последовательность $\frac{1}{a_n} S_n^\alpha(f)$ не ограничена по мере.

В данной работе для случая плохо приближаемого вектора α мы, во-первых, устанавливаем точную оценку $\|S_n^\alpha(f)\|_p = o(\sqrt{\ln n})$ ($0 < p < \infty$) для абсолютно непрерывных периодических функций с нулевым средним и для функций из пространства бесселевых потенциалов $L_1^d(\mathbb{T}^d)_0$ (среди которых есть функции с логарифмическими особенностями), а во-вторых, для абсолютно непрерывных периодических функций с нулевым средним, у которых производная суммируема в степени $q > 1$, и для функций из пространства $L_q^d(\mathbb{T}^d)_0$ ($q > 1$) доказываем справедливость неутрачиваемой оценки $\|S_n^\alpha(f)\|_p = O(1)$ ($0 < p < \infty$).

§2. Определения и формулировки основных результатов

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = \sum_\nu x_\nu y_\nu$, $|x| = |x|_\infty = \max_\nu |x_\nu|$, а для $z \in \mathbb{R}$ через $\|z\|$ обозначим расстояние от z до ближайшего целого числа, $\|z\| = \min\{\{z\}, 1 - \{z\}\}$. Отметим, что $2\|z\| \leq |\sin \pi z| \leq \pi\|z\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ называется *плохо приближаемым*, если существует положительная константа C_α , такая, что

$$|q|^d \|q\alpha\| \geq C_\alpha \quad (\forall q \in \mathbb{Z}^d, q \neq 0).$$

Заметим, что, согласно теореме Дирихле о совместном приближении линейных форм [5, гл. 2, §1], $\liminf_{|q| \rightarrow \infty} |q|^d \|q\alpha\| \leq 1$ для любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

Положим $e(y) := \exp(2\pi i y)$ для $y \in \mathbb{R}$ и $e_k(x) := \exp(2\pi i k x)$ для $x \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Для суммируемой на $\mathbb{T}^d$ функции f через $\hat{f}_k$ или $\hat{f}(k)$ будем обозначать ее коэффициенты Фурье, $\hat{f}_k = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e_{-k}(t) dt$ ($k \in \mathbb{Z}^d$).

Введем в рассмотрение следующий класс функций целого аргумента:

$$\Theta = \{\theta: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : |\theta(k)| \equiv 1, \theta(0) = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для $\theta \in \Theta$ через $B^\theta(x) = B_d^\theta(x)$ обозначим *обобщенное ядро Бесселя–Макдональда порядка d* — суммируемую на $\mathbb{T}^d$ функцию с коэффициентами Фурье $\widehat{B^\theta}(k) = \theta(k)|k|^{-d}$ ($k \neq 0$) и $\widehat{B^\theta}(0) = 0$.

Пусть $1 \leq q \leq \infty$. Введем в рассмотрение *обобщенное пространство бесселевых потенциалов*

$$L_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d) = \{f \in L_q(\mathbb{T}^d) : f(x) = I(f) + B^\theta * \tilde{f}(x), \tilde{f} \in L_q(\mathbb{T}^d)\}.$$

Через $L_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ будем обозначать подпространство функций f , для которых $I(f) = 0$, пространства $L_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)$. Пространство $L_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ наделим нормой $\|f\| := \|\tilde{f}\|_q$. Через $BL_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ обозначим шар радиуса единица в этом нормированном пространстве.

Еще в работе Лерха [6] было доказано, что для всякого плохо приближаемого числа α справедлива оценка $S_n^\alpha(B_1)(0) = O(\ln n)$ ($n \rightarrow \infty$). Из неравенства Коксмса [7, гл. 2, §5] и известной оценки отклонения последовательности $\{n\alpha\}$ для плохо приближаемого числа α [7, гл. 2, §3] следует соотношение $\|S_n^\alpha(B_1)\|_\infty = O(\ln n)$ ($n \rightarrow \infty$). Из последнего, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2, заключаем, что

$$\|S_n^\alpha(f)\|_\infty = o(\ln n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

для всякой абсолютно непрерывной функции f с нулевым средним (доказательство этого соотношения содержится также в работе [4]).

Более того, в работе [4] установлена неулучшаемость последней оценки, а именно доказано, что для всякой последовательности $\{a_n\}$ стремящихся к нулю положительных чисел существует всюду плотное G_δ -подмножество $W_1^1(\mathbb{T})_0$ функций f , для которых неравенство $\|S_n^\alpha(f)\|_\infty \geq a_n \ln n$ справедливо для бесконечно многих n .

Положим $R_n = R_n^\alpha = S_n^\alpha(B^\theta)$.

Нетрудно вычислить коэффициенты Фурье функции R_n . При $k \neq 0$ имеем

$$\widehat{R}_n(k) = (R_n * e_k(x))e_{-k}(x) = \theta(k) \frac{e_k(n\alpha) - 1}{|k|^d(e_k(\alpha) - 1)}.$$

Для заданного вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\lambda_\alpha(k) = (|k|^d \|\alpha k\|)^{-1}$$

при $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ и $\lambda_\alpha(0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие простые оценки модулей коэффициентов Фурье функции R_n ($q \neq 0$):

$$|\widehat{R}_n(q)| \leq \frac{1}{|\sin \pi q \alpha| |q|^d} \leq \lambda_\alpha(q), \quad (1)$$

$$|\widehat{R}_n(q)| \leq \frac{|\sin \pi n q \alpha|}{|q|^d |\sin \pi q \alpha|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{\|n q \alpha\|}{|q|^d \|q \alpha\|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{n}{|q|^d}, \quad (2)$$

$$|\widehat{R}_n(q)| \geq \frac{1}{(2d)^{d/2}} \frac{|\sin \pi n q \alpha|}{|q|^d |\sin \pi q \alpha|}. \quad (3)$$

В теоремах 1–4 будем предполагать, что $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — плохо приближаемый вектор, а $\theta \in \Theta$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < \infty$.

1. Существует положительная константа $C^1 = C^1(\alpha, d, p)$, такая, что

$$\|R_n^\alpha\|_p \leq C^1 \sqrt{\ln(1+n)}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Найдутся положительная константа $C^2 = C^2(\alpha, d, p)$ и последовательность $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ натуральных чисел, такие, что

$$\|R_{n_m}^\alpha\|_p \geq C^2 \sqrt{\ln(1+n_m)}$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < p < \infty$.

1. Для каждой функции f из пространства $L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ справедливо соотношение

$$\|S_n^\alpha(f)\|_p = o(\sqrt{\ln n}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4)$$

2. Справедлива формула

$$\sup_{f \in BL_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0} \|S_n^\alpha(f)\|_p = O(\sqrt{\ln n}) \quad (n \rightarrow \infty); \quad (5)$$

в формуле (5) символ « O » нельзя заменить на « o ».

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовем α -жесткой, если последовательность векторов $v_k = (n_k \alpha_1 \pmod{1}, \dots, n_k \alpha_d \pmod{1})$ ($k = 1, 2, \dots$) стремится к нулю.

Будем говорить, что последовательность измеримых функций $g_k: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — не ограничена по мере и писать $\text{P-}\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_k = \infty$, если

$$\forall A > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k : \text{mes}\{x \in \mathbb{T}^d : |g_k(x)| > A\} > 1 - \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < q \leq \infty$, $f \in L_q^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$. Тогда для любого $p \in (0, \infty)$

$$\|S_n^\alpha(f)\|_p = O(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

и

$$\|S_{n_k+1}^\alpha(f) - f\|_p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad (7)$$

для всякой α -жесткой последовательности $\{n_k\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие на вектор α в теореме 3, вообще говоря, нельзя ослабить. А именно, в случае $d = 1$ в работе [4] доказано, что если число α не является плохо приближаемым, то существует неограниченно растущая последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, такая, что $\text{P-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} S_n^\alpha(f) = \infty$ для функции f из некоторого всюду плотного G_δ -подмножества пространства $W_\infty^1(\mathbb{T})_0$.

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ назовем α -допустимой, если последовательность векторов $v_k = (n_k \alpha_1 \pmod{1}, \dots, n_k \alpha_d \pmod{1})$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет предел.

В теореме 4 пространство $L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ наделено топологией сходимости по мере.

ТЕОРЕМА 4. Существует α -допустимая последовательность $\{n_k\}$, такая, что для каждой стремящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется всюду плотное G_δ -подмножество функций f из $L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$, для которых

$$\text{P-}\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k} \sqrt{\ln n_k}} S_{n_k}(f) = \infty.$$

§3. Доказательства теорем 1–4

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ введем в рассмотрение «круговой слой» $\Delta_j = \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^j \leq |k|_\infty \leq 2^{j+1} - 1\}$.

Для функции целого аргумента $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим через $\lambda^*(s; \Omega)$ ее невозрастающую перестановку на множестве $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$,

$$\lambda^*(s; \Omega) = \inf\{z > 0 : \text{card}\{q \in \Omega : |\lambda(q)| > z\} \leq s\}.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие три леммы, доказанные в работе [8].

ЛЕММА А. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — плохо приближаемый вектор. Тогда существует положительная константа C , такая, что

$$\lambda_\alpha^*(s; \Delta_j) \leq C/s$$

при всех $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$.

(Функция λ_α определена в §2.)

Будем говорить что последовательность $\{q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^d$, $0 < |q_1| < |q_2| < \dots$, есть *последовательность векторов наилучшего приближения для α* , если $|q_s|^d \|q_s \alpha\| \leq 1$ при всех $s \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА В. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — плохо приближаемый вектор, и пусть $\{q_s\}_{s=1}^\infty$ — последовательность векторов наилучшего приближения для α .

Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует целое n , $|q_m|^d / C_\alpha \leq n \leq 2|q_m|^d / C_\alpha$, такое, что

$$\sum_{s=1}^m \frac{\sin^2 \pi n q_s \alpha}{|q_s|^{2d} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq \frac{m}{4\pi^2}.$$

ЛЕММА С. Предположим, что для функции $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda(0) = 0$, найдется константа $c_1 > 0$, такая, что справедливо неравенство

$$\lambda^*(s; \Delta_j) \leq c_1/s$$

при всех $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$.

Тогда для каждого $q \in [2, \infty)$ существуют положительные константы C_1 и C_2 , такие, что для любой функции $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ существует функция $\Lambda g \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} L^q(\mathbb{T}^d)$, коэффициенты Фурье которой равны $\lambda(k) \hat{g}_k$ и для которой выполняется неравенство

$$\|\Lambda g\|_q \leq C_1 \int_{\mathbb{T}^d} |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + C_2.$$

(Здесь $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ обозначает класс суммируемых на $\mathbb{T}^d$ функций g , для которых конечен интеграл $\int_{\mathbb{T}^d} |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Представим функцию R_n в виде суммы, $R_n(x) = R_n^1(x) + R_n^2(x)$, где $R_n^1(x) = \sum_{|q|=1}^{2^l-1} \hat{R}_n(q) e_q(x)$, $R_n^2(x) = \sum_{|q|=2^l}^\infty \hat{R}_n(q) e_q(x)$, $l = [(p/d) \log_2 n] + 1$.

Везде ниже константы C_k положительны и не зависят от выбора n . Пусть $p \in [2, \infty)$. Оценим $\|R_n^2\|_p$ сверху. По неравенству Хаусдорфа–Юнга

$$\|R_n^2\|_p^{p'} \leq \sum_{|q|=2^l}^\infty |\hat{R}_n(q)|^{p'},$$

где $p' = p/(p-1)$. Из неравенства (2) заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{|q|=2^l}^\infty |\hat{R}_n(q)|^{p'} &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p'} n^{p'} \sum_{|q|=2^l}^\infty \frac{1}{|q|^{dp'}} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p'} n^{p'} \sum_{s=2^l}^\infty \frac{\text{card}\{q : |q| = s\}}{s^{dp'}} \\ &\leq C_1 n^{p'} \sum_{s=2^l}^\infty \frac{1}{s^{dp'-d+1}} \leq C_2. \end{aligned}$$

Теперь оценим $\|R_n^1\|_p$. Имеем $\deg R_n^1 \leq 2^l - 1 \leq n^{p/d}$. Положим $N = n^{p/d}$. Пусть $V_N(x)$ есть d -мерное ядро Валле–Пуссена степени $2N$, т. е. $V_N(x) = \prod_{j=1}^d (2F_{2N}(x_j) - F_N(x_j))$, $F_N(x_j) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N (1 - k/N) \cos 2\pi k x_j$. Из определения ядра $V_N(x)$ немедленно следует, что $\hat{V}_N(q) = 1$, когда $|q| \leq N$, а из известных свойств ядра Фейера F_N заключаем, что $1 \leq \|V_N\|_1 \leq 3^d$, $\|V_N\|_\infty \leq 2^d N^d$.

Из последних двух неравенств и определения числа N следует, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} |V_N(x)| \ln^{1/2}(1 + |V_N(x)|) dx \leq 3^d \ln^{1/2}(1 + 2^d N^d) \leq C_3 \sqrt{\ln(1 + N)}.$$

Из неравенства (1) и леммы А заключаем, что коэффициенты полинома R_n^1 удовлетворяют условиям леммы С. В силу этой леммы и последнего неравенства

$$\|R_n^1 * V_N\|_p \leq C_4 \int_{\mathbb{T}^d} |V_N(x)| \ln^{1/2}(1 + |V_N(x)|) dx + C_5 \leq C_6 \sqrt{\ln(1 + n)}.$$

Отсюда, учитывая равенство $R_n^1(x) = R_n^1 * V_N(x)$, заключаем, что $\|R_n^1\|_p \leq C_6 \sqrt{\ln(1 + n)}$.

Итак, для $p \in [2, \infty)$ мы доказали неравенство

$$\|R_n\|_p \leq \|R_n^1\|_p + \|R_n^2\|_p \leq C_7 \sqrt{\ln(1 + n)}, \quad (8)$$

а для $p \in (0, 2)$ воспользуемся тривиальной оценкой $\|R_n\|_p \leq \|R_n\|_2$.

2. Докажем теперь п. 2 теоремы 1.

Из теоремы Дирихле о совместном приближении линейных форм следует, что для всякого плохо приближаемого d -мерного вектора существуют последовательность векторов наилучшего приближения $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ и константа $E > 0$, такие, что

$$|q_k| \leq E^k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Из неравенства (3) и леммы В вытекает, что существует последовательность $\{n_m\}_{m=1}^\infty$, для которой

$$\|R_{n_m}\|_2^2 \geq \sum_{s=1}^m |\widehat{R}_{n_m}(q_s)|^2 \geq \frac{1}{(2d)^d} \sum_{s=1}^m \frac{\sin^2 \pi n_m q_s \alpha}{|q_s|^{2d} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq \frac{m}{4(2d)^d \pi^2} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

и $|q_m|^d \leq C_\alpha n_m \leq 2|q_m|^d$. Отсюда, имея в виду неравенство (9), заключаем, что

$$\|R_{n_m}\|_2 \geq C_9 \sqrt{\ln(1 + n_m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Если $2 < p < \infty$, то $\|R_{n_m}\|_p \geq \|R_{n_m}\|_2 \geq C_9 \sqrt{\ln(1 + n_m)}$ ($m = 1, 2, \dots$).

Пусть теперь $0 < p < 2$. Определим $\theta \in (0, 1)$ из уравнения $1/2 = \theta/p + (1 - \theta)/4$. В силу выпуклости функции $\eta(x) := \ln \|R_{n_m}\|_{1/x}$, $x \in (0, +\infty)$ (см. [2, гл. 1, §10]), имеет место неравенство $\|R_{n_m}\|_2 \leq \|R_{n_m}\|_p^\theta \|R_{n_m}\|_4^{1-\theta}$. Поэтому $\|R_{n_m}\|_p \geq \|R_{n_m}\|_2^{1/\theta} \|R_{n_m}\|_4^{1-1/\theta}$. Отсюда, используя неравенства (8) и (10), получаем, что

$$\|R_{n_m}\|_p \geq C_{10} \sqrt{\ln(1 + n_m)} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1. Пусть $f \in L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$. Из определения пространства $L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)$ следует, что найдется функция $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$, $I(g) = 0$, такая, что $f(x) = B_d^\theta * g(x)$ (для п. в. x) и, значит, $S_n(f)(x) = R_n * g(x)$ (для п. в. x).

Положим $K_n(x) = \ln^{-1/2}(1 + n)R_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Пусть сначала $p \in [1, \infty)$. В силу п. 1 теоремы 1 найдется положительная константа C_1 , такая, что для любых $h \in L_1(\mathbb{T}^d)$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\|K_n * h\|_p \leq \|K_n\|_p \|h\|_1 \leq C_1 \|h\|_1. \quad (11)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть t_ε — тригонометрический полином с нулевым свободным коэффициентом, такой, что $\|g - t_\varepsilon\|_1 < \varepsilon/(2C_1)$.

Из формулы (1) и определения функции λ_α следует, что величины $|\hat{R}_n(q)|$ равномерно ограничены по n и q . Поэтому

$$\|K_n * t_\varepsilon\|_p \leq \ln^{-1/2}(1+n) \sum_q |\hat{R}_n(q)| |\hat{t}_\varepsilon(q)| \leq C_2 \ln^{-1/2}(1+n),$$

где $C_2 > 0$ не зависит от выбора n . Следовательно, существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\|K_n * t_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon/2$. Поэтому из (11) заключаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $n \geq N$

$$\|K_n * g\|_p \leq \|K_n * (g - t_\varepsilon)\|_p + \|K_n * t_\varepsilon\|_p \leq C_1 \|g - t_\varepsilon\|_1 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|\ln^{-1/2}(1+n)S_n(f)\|_p = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Теперь, чтобы доказать соотношение (4) для $p \in (0, 1)$, воспользуемся свойством монотонного неубывания (по параметру p) величины $\|S_n(f)\|_p$.

2. Формула (5) непосредственно следует из соотношения (11). Пусть последовательность $\{n_m\}$ и константа C^2 — те, существование которых доказано в п. 2 теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_\varepsilon = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-d}, & \text{если } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $\|\chi_\varepsilon\|_1 = 1$. Если $1 \leq p < \infty$ и $g \in L_p(\mathbb{T}^d)$, то $\|g - g * \chi_\varepsilon\|_p \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [9, гл. 1, §1]). Следовательно, для каждого m и любого $p \in [1, \infty)$ найдется константа $\varepsilon_{m,p} > 0$, такая, что $\|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_{\varepsilon_{m,p}}\|_p < \frac{1}{2}\|R_{n_m}\|_p$. Отсюда следует, что

$$\|R_{n_m} * \chi_{\varepsilon_{m,p}}\|_p \geq \|R_{n_m}\|_p - \|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_{\varepsilon_{m,p}}\|_p > \frac{1}{2}\|R_{n_m}\|_p$$

при всех $p \in [1, \infty)$ и $m \in \mathbb{N}$. В случае $p \in (0, 1)$ воспользуемся неравенствами $\|R_{n_m}\|_p \leq 2^{1/p-1}(\|R_{n_m} * \chi_\varepsilon\|_p + \|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_\varepsilon\|_p)$, $\|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_\varepsilon\|_p \leq \|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_\varepsilon\|_1$ и выберем $\varepsilon_{m,p} > 0$ так, чтобы $\|R_{n_m} - R_{n_m} * \chi_{\varepsilon_{m,p}}\|_1 < 2^{-1/p}\|R_{n_m}\|_p$.

Теперь, полагая $f_{m,p} := B^\theta * \chi_{\varepsilon_{m,p}}$, из п. 2 теоремы 1 заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\ln n_m}} \|S_{n_m}^\alpha(f_{m,p})\|_p &= \frac{1}{\sqrt{\ln n_m}} \|R_{n_m}^\alpha * \chi_{\varepsilon_{m,p}}\|_p \\ &\geq \frac{1}{2^{\max(1,1/p)}} \frac{1}{\sqrt{\ln n_m}} \|R_{n_m}^\alpha\|_p \geq \frac{C^2}{2^{\max(1,1/p)}} \end{aligned}$$

(и при этом $f_{m,p} \in BL_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0$), что доказывает п. 2 теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В работе [8] доказано, что для всякой функции f из пространства $L_q^{\theta}(\mathbb{T}^d)_0$ ($q > 1$) найдется функция $w \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mathbb{T}^d)$, такая, что $f = w \circ T_\alpha - w$.

Отсюда заключаем, что $S_n^\alpha(f) = w \circ T_\alpha^n - w$ и

$$\|S_n^\alpha(f)\|_p = \|w \circ T_\alpha^n - w\|_p \leq \begin{cases} 2\|w\|_p, & \text{если } p \geq 1, \\ 2^{1/p}\|w\|_p, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее,

$$\begin{aligned} \|S_{n_k+1}^\alpha(f) - f\|_p &= \|w \circ T_\alpha^{n_k+1} - w - f\|_p = \|w \circ T_\alpha^{n_k+1} - w \circ T_\alpha\|_p \\ &= \|w \circ T_\alpha^{n_k} - w\|_p \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где последнее свойство является следствием того факта, что непрерывные функции всюду плотны в пространстве $L_p(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть последовательность $\{n_m\}$ — та, существование которой доказано в п. 2 теоремы 1. Выберем из нее α -допустимую подпоследовательность $\{n_{m_k}\}$, которую для простоты записи обозначим через $\{n_k\}$. Положим $K_k(f) = S_{n_k}(f)/(a_{n_k}\sqrt{\ln n_k})$, $H = (L_1^{d,\theta}(\mathbb{T}^d)_0, \rho_0)$, где

$$\rho_0(f, g) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

— метрика, индуцирующая топологию сходимости по мере.

Положим $U = \{f \in H : \text{P-}\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} K_k(f) = \infty\}$.

Докажем, что $U \neq \emptyset$. Пусть $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset L_2(\mathbb{T}^d)$ — заданная последовательность функций. В работах [10] и [11] доказано, что если

$$\forall A > 0 \quad \forall B > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : \|T_k\|_1 > A + B \ln(1 + \|T_k\|_2), \quad (12)$$

то для некоторой функции $g_0 \in L_1(\mathbb{T}^d)$ последовательность $\{T_k * g_0\}_{k=1}^\infty$ не ограничена по мере.

Положим $T_k(x) = K_k(B^\theta)(x)$. Заметим, что если $f_0 = B^\theta * g_0$, то $K_k(f_0) = K_k(B^\theta * g_0) = K_k(B^\theta) * g_0 = T_k * g_0$ в силу перестановочности операций свертки и сдвига.

Из теоремы 1 следует, что таким образом выбранная последовательность функций $\{T_k\}$ удовлетворяет условию (12). Следовательно, найдется функция $g_0 \in L_1(\mathbb{T}^d)$, такая, что последовательность $\{T_k * g_0\}_{k=1}^\infty$ не ограничена по мере.

Положим $f_0 = B^\theta * g_0$. Тогда $f_0 \in H$, $K_k(f_0) = T_k * g_0$ и, значит, $\text{P-}\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} K_k(f_0) = \infty$, что и требовалось.

Докажем теперь, что U — всюду плотное подмножество в H . Без ограничения общности можно считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt{\ln n} = \infty$.

Пусть $f_0 \in U$, а p — произвольный тригонометрический полином с нулевым свободным членом. Из того, что α — плохо приближаемый вектор, в частности, следует, что числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ и, значит, найдется полином τ , такой, что $p(x) = \tau(T_\alpha x) - \tau(x)$.

Поэтому $K_k(p)(x) = (\tau(T_\alpha^{n_k} x) - \tau(x))/(a_{n_k}\sqrt{\ln n_k})$, а значит, $\|K_k(p)\|_\infty \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда и из предположения о f_0 немедленно следует, что $\text{P-}\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} K_k(f_0 + p) = \infty$.

В силу произвольности выбора полинома p последнее равенство означает, что множество U всюду плотно в H .

Наконец, докажем, что U — множество типа G_δ .

Для измеримой функции h и положительного числа t положим $E(h, t) = \text{mes}\{x : |h(x)| > t\}$. Нетрудно доказать, что $E(h, t)$ — непрерывная справа функция от t и что для любых измеримых h_1, h_2 и положительных t_1 и t_2 справедливо неравенство

$$E(h_1 \pm h_2, t_1 + t_2) \leq E(h_1, t_1) + E(h_2, t_2). \quad (13)$$

Отметим также, что $E(h, t) \leq (1 + 1/t)\rho_0(h, 0)$.

Представим U в виде $U = \bigcap_{N,m=1}^{\infty} U_{N,m}$, где

$$U_{N,m} = \{f \in H : \exists k \ E(K_k(f), N) > 1 - 1/m\},$$

и докажем, что каждое из множеств $U_{N,m}$ открыто в H .

Зафиксируем $N, m, f \in U_{N,m}$ и определим k из условия $E(K_k(f), N) > 1 - 1/m$. Положим $\sigma = E(K_k(f), N)$. В силу непрерывности справа функции $E(K_k(f), \cdot)$ найдется такое $\delta > 0$, что $E(K_k(f), N + \delta) > \frac{1}{2}(\sigma + 1 - 1/m)$.

Тогда в силу (13) имеем

$$E(K_k(f), N + \delta) \leq E(K_k(f + g), N) + E(K_k(g), \delta).$$

При этом

$$\begin{aligned} E(K_k(g), \delta) &= E\left(\sum_{s=0}^{n-1} g \circ T_{\alpha}^s, \delta a_n \sqrt{\ln n}\right) \leq \sum_{s=0}^{n-1} E\left(g \circ T_{\alpha}^s, \frac{\delta a_n \sqrt{\ln n}}{n}\right) \\ &= nE\left(g, \frac{a_n \sqrt{\ln n} \delta}{n}\right) \leq n\left(1 + \frac{n}{\delta a_n \sqrt{\ln n}}\right)\rho_0(g, 0). \end{aligned}$$

Значит, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $g \in H$, таком, что $\rho_0(g, 0) < \varepsilon$, имеем $E(K_k(g), \delta) < \frac{1}{2}(\sigma - 1 + 1/m)$. Следовательно, для такого g

$$\begin{aligned} E(K_k(f + g), N) &\geq E(K_k(f), N + \delta) - E(K_k(g), \delta) \\ &> \frac{1}{2}\left(\sigma + 1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma - 1 + \frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

т. е. $f + g \in U_{N,m}$.

Автор признателен Б. С. Кашину и Н. Г. Мощевитину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Факториал, М., 1999.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2, Мир, М., 1965.
3. Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. Физматлит, М., 1963.
4. Liardet P., Volny D. Sums of continuous and differentiable functions in dynamical systems. Israel J. Math., **98**, 29–60 (1997).
5. Шмидт В. М. Диофантовы приближения. Мир, М., 1983.
6. Lerch M. Question 1547. L'Intermediaire Math., **11**, 144–145 (1904).
7. Кейперс Л., Нидерпрейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. Наука, М., 1985.
8. Рождественский А. В. Об аддитивном когомологическом уравнении и замене времени в линейном потоке на торе с диофантовым вектором частот. Матем. сб., **195**, №5, 115–156 (2004).
9. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Мир, М., 1974.
10. Пичугов С. А. Последовательности ограниченных по мере операторов. Матем. сб., **185**, №1, 43–72 (1994).
11. Пичугов С. А. Оценки норм операторов, непрерывных по мере. Матем. заметки, **50**, №1, 146–148 (1991).