Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Березанский, Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами, *Функци. анализ и его прил.*, 2003, том 37, выпуск 4, 86–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:57:40

Обобщенная проблема моментов, связанная с корреляционными мерами*

© 2003. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

И. М. Гельфанду — с благодарностью

Хорошо известно, что степенная проблема моментов, включая ее бесконечномерный аналог, тесно связана со спектральными представлениями позитивных функционалов в некоторых коммутативных алгебрах (см., например, [1]). В [2] была введена свертка, позволившая авторам описать меры на пространстве конечных конфигураций, являющиеся корреляционными для мер на пространстве бесконечных конфигураций. В [3] эти результаты были продолжены с помощью техники получения спектральных представлений в соответствующей коммутативной алгебре; их можно было воспринимать как изучение некоторой проблемы моментов.

В этой заметке, продолжающей работу [3], получены и исследованы спектральные представления в более общей ситуации, когда роль корреляционных мер играют соответствующие функционалы. Методы основаны на разложении по обобщенным собственным векторам самосопряженного оператора и восходят к [4–7]. Здесь существенную роль играет также K -преобразование, введенное в [8] и изученное в [8, 2].

1. Пусть X — связное ориентированное C^∞ -риманово некомпактное многообразие, $\mathcal{D} = C_{\text{fin}}^\infty(X)$ — пространство действительных бесконечно дифференцируемых финитных функций на X с классической топологией, $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ — его комплексификация. Положим $\mathcal{F}_n(\mathcal{D}) := \mathcal{D}_\mathbb{C}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ ($\mathcal{F}_0(\mathcal{D}) = \mathbb{C}$), где $\hat{\otimes} n$ — симметрическая тензорная степень, и введем топологическую прямую сумму этих пространств:

$$\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(\mathcal{D}). \quad (1)$$

Векторы f «фоковского» пространства (1) имеют вид финитных последовательностей $f = (f_n)_{n=0}^\infty$, $f_n \in \mathcal{F}_n(\mathcal{D})$; их сходимость — равномерно финитная со сходимостью каждой координаты в соответствующем $\mathcal{F}_n(\mathcal{D})$. Такая топология превращает $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ в ядерное пространство.

Нам будет необходимо интерпретировать векторы из (1) как функции на пространстве $\check{\Gamma}_{X,0}$ кратных конфигураций. Под такой конфигурацией порядка $n \in \mathbb{N}$ понимается множество $\xi_n = [x_1, \dots, x_n]$ из n точек $x_j \in X$ (среди них могут быть одинаковые). Иными словами, совокупность $\check{\Gamma}_X^{(n)}$ всех таких конфигураций равна факторпространству X^n/S_n , где S_n — группа перестановок n точек; топология в $\check{\Gamma}_X^{(n)}$ индуцируется топологией пространства X^n . Аналогично (1)

*Работа частично поддержана INTAS, проект 00-257, и DFG, проект 436 UKR 113/61.

образуем дизъюнктивную сумму топологических пространств $\ddot{\Gamma}_X^{(n)}$:

$$\ddot{\Gamma}_{X,0} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \ddot{\Gamma}_X^{(n)}, \quad \ddot{\Gamma}_X^{(0)} = \emptyset. \quad (2)$$

Вектор $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ из (1) можно интерпретировать как некоторую функцию на $\ddot{\Gamma}_{X,0}$: в самом деле, f_n принадлежит $\mathcal{D}_c^{\otimes n}$ для $n \in \mathbb{N}$ и является симметрической, гладкой и финитной функцией $f(x_1, \dots, x_n)$ на X^n ; поэтому можно положить $f(\xi_n) = f([x_1, \dots, x_n]) = f(x_1, \dots, x_n)$ ($f_0 \in \mathbb{C}$ есть функция одной точки $\emptyset$). В результате весь вектор f интерпретируется как (финитная по n) функция на $\ddot{\Gamma}_{X,0}$. Мы не будем различать вектор $f \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ и соответствующую функцию $f(\xi)$, $\xi \in \ddot{\Gamma}_{X,0}$.

Для любого замкнутого множества $\Lambda \subset X$ через $\ddot{\Gamma}_{\Lambda}^{(n)}$ и $\ddot{\Gamma}_{\Lambda,0}$ будут обозначаться введенные выше пространства с заменой X на Λ .

2. Превратим пространство $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ в коммутативную алгебру $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, введя для любых $f, g \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ умножение $\star$ [2, 3]:

$$(f \star g)(\xi) = \sum_{\xi' \cup \xi'' \cup \xi''' = \xi} f(\xi' \cup \xi'') g(\xi'' \cup \xi'''), \quad \xi \in \ddot{\Gamma}_{X,0}, \quad (3)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям конфигурации ξ в объединение непересекающихся конфигураций ξ' , ξ'' , ξ''' . В алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ имеется инволюция $f \rightarrow \bar{f}$ (переход к обычной комплексной черте) и единица $e = e(\xi)$, равная 1 при $\xi = \emptyset$ и нулю при $\xi \neq \emptyset$.

Мы будем рассматривать спектральные представления положительных функционалов r в $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, т.е. таких линейных непрерывных функционалов $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \ni f \mapsto r(f) \in \mathbb{C}$, для которых $r(f \star \bar{f}) \geq 0$, $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. В соответствии с ГНС конструкцией введем в $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ квазискалярное произведение $(f, g) := r(f \star \bar{g})$, $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Оно порождает соответствующее гильбертово пространство $\mathcal{H}_r$, строящееся как пополнение классов $\{f\} = \{f' \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \mid (f - f', f - f') = 0\}$.

Представление будет получено при помощи спектральной теории семейства коммутирующих самосопряженных операторов $\tilde{A}(\varphi)$, действующих в пространстве $\mathcal{H}_r$ и порожденных следующей операцией в алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{D})$: $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \ni f \mapsto \varphi \star f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Из вида $(\cdot, \cdot)$ следует, что эта операция эрмитова, поэтому сохраняет классы и может быть записана как оператор $A(\varphi)$ в пространстве классов $\{\mathcal{A}(\mathcal{D})\} \subset \mathcal{H}_r$. Операторы $A(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, эрмитовы, вещественны относительно введенной инволюции, линейно зависят от параметра φ и формально коммутируют.

Известно [9], что их замыкания $\tilde{A}(\varphi)$ в пространстве $\mathcal{H}_r$ будут самосопряженными, коммутирующими, линейно зависящими от φ и вещественными операторами, если выполнено следующее предположение: (i) *существует множество $D \subset \{\mathcal{A}(\mathcal{D})\}$, инвариантное относительно действия операторов $A(\varphi)$, тотальное в $\mathcal{H}_r$ и такое, что любой вектор $\{f\} \in D$ будет квазианалитическим для каждого оператора $A(\varphi)$ (т.е. класс $C\{m_n\}$, где $m_n = \|(A(\varphi))^n \{f\}\|_{\mathcal{H}_r}$, $n \in \mathbb{N}_0$, квазианалитический).*

Предположение (i) будем считать выполненным. В ряде случаев можно выписать достаточные условия на функционал r , обеспечивающие выполнение (i).

Мы приведем такое условие в важном случае, когда r порожден σ -конечной борелевской мерой на $\ddot{\Gamma}_{X,0}$:

$$r(f) = \int_{\ddot{\Gamma}_{X,0}} f(\xi) d\rho(\xi), \quad f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Для позитивного функционала вида (4) условие (i) будет выполнено, если для каждой компакта $\Lambda \subset X$ и $k \in \mathbb{N}$ будет квазианалитическим класс $C\{m_n\}$, где*

$$m_n = \left(\sum_{l=k}^{2k} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(l+j-1)!}{(l-1)!} \rho(\ddot{\Gamma}_{\Lambda}^{(l+j)}) \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Эта теорема содержит некоторые более обозримые условия выполнения предположения (i). Так, например, (i) *будет выполнено, если для каждого компакта $\Lambda \subset X$ существует константа $C_{\Lambda} > 0$, такая, что $\rho(\ddot{\Gamma}_{\Lambda}^{(n)}) \leq C_{\Lambda}^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

3. Построение разложения по совместным обобщенным собственным векторам (с.о.с.в.) коммутирующего семейства самосопряженных операторов $A = (\tilde{A}(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}$ в пространстве $\mathcal{H}_r$, линейно зависящих от параметра φ , ведется согласно схеме книги [9].

Согласно этой схеме, требуется построить гильбертово оснащение пространства $\mathcal{H}_r$, стандартно связанное с семейством A . Его построение ведется последовательно с учетом следующих моментов. 1) Пространство $\mathcal{D}$ является проективным пределом взвешенных соболевских пространств H_{τ} (по римановой мере m), где $\tau = (\tau_1, \tau_2(x))$ ($\tau_1 \in \mathbb{N}_0$ — порядок производных, $1 \leq \tau_2(x) \in C^{\infty}(X)$ — вес). 2) Пространство $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ является проективным пределом взвешенных фоковских пространств $\mathcal{F}(H_{\tau}, p)$, построенных по всевозможным H_{τ} и весам $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$. 3) Функционал r принадлежит $(\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}))'$ и поэтому непрерывен на некотором $\mathcal{F}(H_{\tau}, p)$. 4) Свертка $\star$ непрерывна в $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ и поэтому действует непрерывно в шкале пространств $\mathcal{F}(H_{\tau}, p)$; квазискалярное произведение (f, g) определено для $f, g \in \mathcal{F}(H_{\tau'}, p')$ при некоторых τ' и p' . 5) Выбирая теперь τ^0 и p^0 «достаточно большими» по отношению к τ' и p' , можно добиться, чтобы в цепочке с нулевым пространством $\mathcal{H}_r$

$$\{\mathcal{F}(H_{\tau^0}, p^0)\}_{-} \supset \mathcal{H}_r \supset \{\mathcal{F}(H_{\tau^0}, p^0)\} \supset \{\mathcal{A}(\mathcal{D})\} \quad (5)$$

вложение позитивного пространства в $\mathcal{H}_r$ было квазиядерным; цепочка (5) — основная для построения разложения. 6) Наряду с (5) рассмотрим цепочку

$$(\mathcal{F}(H_{\tau^0}, p^0))_{-} \supset \mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(H) \supset \mathcal{F}(H_{\tau^0}, p^0), \quad (6)$$

где $\mathcal{F}(H)$ — обычное фоковское пространство, построенное по $H = L^2(X, dm(x))$; так как в (5) и (6) позитивные пространства совпадают (с точностью до образования классов), то негативные пространства будут изоморфными [1]. 7) Последнее позволяет с.о.с.в. семейства A понимать как векторы из $(\mathcal{F}(H_{\tau^0}, p^0))_{-}$.

Отметим также, что, как следует из (3), оператор $A(\varphi)$ порождается оператором $a_{+}(\varphi) + a_0(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, где $a_{+}(\varphi)$ и $a_0(\varphi)$ — классические оператор рождения

и нейтральный оператор в $\mathcal{F}(H)$. Это дает возможность доказать наличие сильного циклического вектора для семейства A и подсчитать с.о.с.в. для A . Мы наметили доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 2. Семейство $A = (\tilde{A}(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{D}}$ порождает преобразование Фурье I при разложении по его с.о.с.в.:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} &\mapsto (If)(\omega) =: \hat{f}(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(\omega))_{\mathcal{F}_n(H)} \in L^2(\mathcal{D}', d\mu(\omega)). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $P(\omega) = (P_n(\omega))_{n=0}^{\infty}$, $P_n(\omega) \in (\mathcal{D}')^{\hat{\otimes} n}$, — с.о.с.в. семейства A , отвечающий «собственному числу» $\omega \in \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'$ — классическое пространство обобщенных функций и μ — борелевская вероятностная мера на $\mathcal{D}'$ (спектральная мера семейства A).

Оператор Фурье I после замыкания по непрерывности является унитарным оператором, переводящим пространство $\mathcal{H}_r$ в $L^2(\mathcal{D}', d\mu(\omega))$; при этом образом оператора $\tilde{A}(\varphi)$ будет оператор умножения на функцию $(\omega, \varphi)_H$. Равенство Парсеваля сейчас имеет вид

$$(f, g)_{\mathcal{H}_r} = r(f \star \bar{g}) = \int_{\mathcal{D}'} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\mu(\omega), \quad f, g \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}). \quad (8)$$

Векторы $P_n(\omega)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению, с помощью которого они могут быть подсчитаны:

$$\begin{aligned} &(P_{n+1}(\omega), \varphi^{\otimes(n+1)})_{\mathcal{F}_{n+1}(H)} \\ &= \frac{1}{n+1} [(P_n(\omega) \hat{\otimes} \omega, \varphi^{\otimes(n+1)})_{\mathcal{F}_{n+1}(H)} - (P_n(\omega), n\varphi^2 \hat{\otimes} \varphi^{\otimes(n-1)})_{\mathcal{F}_n(H)}], \quad (9) \\ &n \in \mathbb{N}_0, \varphi \in \mathcal{D}, P_0(\omega) = 1, P_1(\omega) = \omega. \end{aligned}$$

Полагая в (8) $g = e$ и учитывая (7), получаем

$$\begin{aligned} r(f) &= \int_{\mathcal{D}'} (If)(\omega) d\mu(\omega), \quad f \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}), \\ r(f_n) &= \int_{\mathcal{D}'} (f_n, P_n(\omega))_{\mathcal{F}_n(H)} d\mu(\omega), \quad f_n \in \mathcal{D}_c^{\hat{\otimes} n}, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Последняя формула решает рассматриваемую проблему моментов: *позитивный функционал r при выполнении условия (i) имеет представление (10); обратно, функционалы вида (10) будут позитивными.*

Первая из формул (10) показывает, что в понятном смысле $r = I^* \mu$ и r можно воспринимать как «корреляционный функционал» меры μ . Тогда приведенный результат дает достаточное условие того, что функционал $r \in (\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}))'$ будет корреляционным.

4. Остановимся на случае функционала r , порожденного по формуле (4) мерой ρ или зарядом на $\dot{\Gamma}_{X,0}$ (т.е. вещественнозначной σ -конечной борелевской мерой на $\dot{\Gamma}_{X,0}$). Будем говорить, что $\omega \in \mathcal{D}'$ порожден зарядом, если $\omega(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\sigma_{\omega}(x)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, где σ_{ω} — некоторый заряд на X .

ТЕОРЕМА 3. Пусть позитивный функционал r порожден мерой ρ на $\check{\Gamma}_{X,0}$. Тогда для спектральной меры μ в представлении (10) множество тех $\omega \in \mathcal{D}'$, которые порождены зарядами на X , имеет полную меру. Обратно, пусть указанное множество имеет полную меру. Тогда позитивный функционал порожден зарядом на $\check{\Gamma}_{X,0}$.

Более того, пусть позитивный функционал r на $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ таков, что его сужение на $\mathcal{F}_1(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ порождено мерой на X . Тогда весь функционал r порожден зарядом на $\check{\Gamma}_{X,0}$.

5. Перейдем к рассмотрению аналогичных вопросов в случае пространства $\Gamma_{X,0}$ обычных конфигураций. Оно определяется как дизъюнктивная сумма $\Gamma_{X,0} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_X^{(n)}$, где $\Gamma_X^{(n)}$ лежит в $\check{\Gamma}_X^{(n)}$ и состоит из точек $\xi_n = [x_1, \dots, x_n]$, в которых все x_j различны. Таким образом, $\Gamma_{X,0} \subset \check{\Gamma}_{X,0}$ и топология пространства $\check{\Gamma}_{X,0}$ индуцирует в $\Gamma_{X,0}$ относительную топологию. Аналогичные объекты вводятся с заменой X на замкнутое множество $\Lambda \subset X$ (в частности, $\Gamma_{\Lambda}^{(n)}$).

Нам понадобится также пространство Γ_X бесконечных конфигураций, т.е. множеств $\gamma = [x_1, x_2, \dots]$, где x_j — различные точки из X , причем в каждом компакте $\Lambda \subset X$ имеется лишь конечное число этих точек; $\Gamma_X \supset \Gamma_X^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Каждую такую конфигурацию γ можно отождествить с σ -конечной мерой $\sum_{j=0}^{\infty} \delta_{x_j}$ (δ_x — дельта-функция, сосредоточенная в x) и тем самым с функционалом $\gamma \in \mathcal{D}'$. Таким образом, $\Gamma_X \subset \mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}'$ индуцирует на Γ_X относительную топологию.

Введем отображение K , переводящее функции из $\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D})$ в функции на Γ_X , по формуле

$$\mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{D}) \ni f \mapsto (Kf)(\gamma) = \sum_{\xi \subset \gamma} f(\xi) \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \Gamma_X \quad (11)$$

(в (11) сумма для каждой f конечна). Оказывается, что при некоторых ограничениях на меру ρ , порождающую, согласно (4), позитивный функционал r , оператор Фурье из (7), (8), (10) совпадает с оператором K из (11):

ТЕОРЕМА 4. Пусть мера ρ в (4) сосредоточена на пространстве обычных конфигураций, т.е. $\rho(\check{\Gamma}_{X,0} \setminus \Gamma_{X,0}) = 0$, и удовлетворяет следующей оценке: для каждого компакта $\Lambda \subset X$ существуют $C_{\Lambda}, \varepsilon_{\Lambda} > 0$, такие, что

$$\rho(\Gamma_{\Lambda}^{(n)}) \leq C_{\Lambda}(2 + \varepsilon_{\Lambda})^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Тогда пространство $\Gamma_X \subset \mathcal{D}'$ имеет полную спектральную меру μ , $I = K$ и $\mathcal{D}'$ в формулах (8), (10) можно заменить на Γ_X .

Отметим, что оценка (12) по существу совпадает с аналогичной оценкой из [3]; представляется, что (12) может быть ослаблена. При доказательстве теоремы существенную роль играет то обстоятельство, что в общем случае теоремы 2 может быть подсчитано преобразование Фурье (7) вектора $f = (\varphi^{\otimes n})_{n=0}^{\infty}$, $\varphi \in \mathcal{D}$. Оказывается, $\hat{f}(\omega) = \exp(\omega, \log(1 + \varphi))_H$ при $\sup_{x \in X} |\varphi(x)| < 1$.

В предположениях этой теоремы корреляционный функционал r совпадает с обычной корреляционной мерой ρ меры μ , заданной на пространстве бесконечных конфигураций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berezansky Yu. M.* Integral Equations Operator Theory, **44**, 255–289 (2002).
2. *Konratiev Yu. G., Kuna T.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **5**, No. 2, 201–233 (2002) (препринт: Bonn University, 1999).
3. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G., Kuna T., Lytvynov E.* Methods Funct. Anal. Topology, **5**, No. 4, 87–100 (1999).
4. *Гельфанд И. М., Костюченко А. Г.* ДАН СССР, **103**, No. 3, 349–352 (1955).
5. *Березанский Ю. М.* ДАН СССР, **108**, №3, 379–382 (1956).
6. *Березанский Ю. М.* ДАН СССР, **110**, №6, 893–896 (1956).
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
8. *Lenard A.* Arch. Rational Mech. Anal., **59**, 241–256 (1975).
9. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Наукова думка, Киев, 1988.

Институт математики НАН Украины
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Поступило в редакцию
15 сентября 2003 г.

УДК 517.986.24

О суммах проекторов в C^* -алгебрах

© 2003. Т. В. ШУЛЬМАН

Посвящается И. М. Гельфанду в связи с его 90-летием

В работе [1] рассматривалась задача о существовании набора $p_1, \dots, p_n$ самосопряженных проекторов в гильбертовом пространстве с суммой $\lambda 1$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Было получено полное описание множества Σ_n всех λ , для которых такие проекторы существуют — при $n \geq 5$ оно представляет собой отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$, объединенный с двумя последовательностями S_n^1 и S_n^2 , сходящимися к α_n и β_n соответственно. Через $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ обозначалась универсальная C^* -алгебра этой задачи, т.е. C^* -алгебра с образующими $p_1, \dots, p_n$ и соотношениями $p_i = p_i^* = p_i^2$, $\sum_{i=1}^n p_i = \lambda e$. Наборы проекторов указанного выше вида соответствуют представлениям алгебры $\mathcal{P}_{n,\lambda}$. Соответственно унитарные гомоморфизмы алгебры $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ в произвольную унитарную C^* -алгебру A характеризуются наборами проекторов из A , удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n p_i = \lambda e$. Множество всех λ , для которых такие проекторы существуют, обозначим через $\Sigma_n(A)$ (таким образом, $\Sigma_n = \Sigma_n(\mathcal{B}(H))$).

Напомним (см. [2]), что C^* -алгебра называется алгеброй типа I, если ее образ при любом неприводимом представлении содержит все компактные операторы в пространстве представления. В [1] было доказано, что $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ является C^* -алгеброй типа I при $\lambda \in S_n^1$, $\lambda \in S_n^2$ и не является алгеброй типа I при $\lambda \in (\alpha_n, \beta_n)$, и был поставлен вопрос, имеет ли $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ тип I при $\lambda = \alpha_n$ и $\lambda = \beta_n$. Мы даем ответ на этот вопрос в п. 1, получив общее описание множества $\Sigma_n(A)$ для C^* -алгебр типа I. Описание множества $\Sigma_n(A)$ для AF-алгебр в п. 2 дает ответ на другой вопрос авторов работы [1]: для всякой ли C^* -алгебры A множество $\Sigma_n(A)$ замкнуто?

1. ТЕОРЕМА 1. *Если A есть C^* -алгебра типа I, то $\Sigma_n(A)$ состоит из конечного множества рациональных чисел.*

Так как $\lambda \in \Sigma_n(\mathcal{P}_{n,\lambda})$, то мы получаем