Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Шульман, О суммах проекторов в C^* -алгебрах,
Функц. анализ и его прил., 2003, том 37, вы-
пуск 4, 91–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:55:16

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berezansky Yu. M.* Integral Equations Operator Theory, **44**, 255–289 (2002).
2. *Konratiev Yu. G., Kuna T.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **5**, No. 2, 201–233 (2002) (препринт: Bonn University, 1999).
3. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G., Kuna T., Lytvynov E.* Methods Funct. Anal. Topology, **5**, No. 4, 87–100 (1999).
4. *Гельфанд И. М., Костюченко А. Г.* ДАН СССР, **103**, No. 3, 349–352 (1955).
5. *Березанский Ю. М.* ДАН СССР, **108**, №3, 379–382 (1956).
6. *Березанский Ю. М.* ДАН СССР, **110**, №6, 893–896 (1956).
7. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
8. *Lenard A.* Arch. Rational Mech. Anal., **59**, 241–256 (1975).
9. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Наукова думка, Киев, 1988.

Институт математики НАН Украины
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Поступило в редакцию
15 сентября 2003 г.

УДК 517.986.24

О суммах проекторов в C^* -алгебрах

© 2003. Т. В. ШУЛЬМАН

Посвящается И. М. Гельфанду в связи с его 90-летием

В работе [1] рассматривалась задача о существовании набора $p_1, \dots, p_n$ самосопряженных проекторов в гильбертовом пространстве с суммой $\lambda 1$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Было получено полное описание множества Σ_n всех λ , для которых такие проекторы существуют — при $n \geq 5$ оно представляет собой отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$, объединенный с двумя последовательностями S_n^1 и S_n^2 , сходящимися к α_n и β_n соответственно. Через $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ обозначалась универсальная C^* -алгебра этой задачи, т.е. C^* -алгебра с образующими $p_1, \dots, p_n$ и соотношениями $p_i = p_i^* = p_i^2$, $\sum_{i=1}^n p_i = \lambda e$. Наборы проекторов указанного выше вида соответствуют представлениям алгебры $\mathcal{P}_{n,\lambda}$. Соответственно унитарные гомоморфизмы алгебры $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ в произвольную унитарную C^* -алгебру A характеризуются наборами проекторов из A , удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n p_i = \lambda e$. Множество всех λ , для которых такие проекторы существуют, обозначим через $\Sigma_n(A)$ (таким образом, $\Sigma_n = \Sigma_n(\mathcal{B}(H))$).

Напомним (см. [2]), что C^* -алгебра называется алгеброй типа I, если ее образ при любом неприводимом представлении содержит все компактные операторы в пространстве представления. В [1] было доказано, что $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ является C^* -алгеброй типа I при $\lambda \in S_n^1$, $\lambda \in S_n^2$ и не является алгеброй типа I при $\lambda \in (\alpha_n, \beta_n)$, и был поставлен вопрос, имеет ли $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ тип I при $\lambda = \alpha_n$ и $\lambda = \beta_n$. Мы даем ответ на этот вопрос в п. 1, получив общее описание множества $\Sigma_n(A)$ для C^* -алгебр типа I. Описание множества $\Sigma_n(A)$ для AF-алгебр в п. 2 дает ответ на другой вопрос авторов работы [1]: для всякой ли C^* -алгебры A множество $\Sigma_n(A)$ замкнуто?

1. ТЕОРЕМА 1. *Если A есть C^* -алгебра типа I, то $\Sigma_n(A)$ состоит из конечного множества рациональных чисел.*

Так как $\lambda \in \Sigma_n(\mathcal{P}_{n,\lambda})$, то мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. При иррациональном $\lambda \in \Sigma_n$ алгебра $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ не принадлежит к типу I.

Поскольку α_n и β_n иррациональны, следствие 2 дает ответ на вопрос из [1].

2. Как обычно, под следом на C^* -алгебре мы понимаем положительный линейный непрерывный функционал f , такой, что $f(xy) = f(yx)$.

ТЕОРЕМА 3. Если A сепарабельна и имеет след, то $\Sigma_n(A)$ счетно.

Следует отметить, что существуют сепарабельные алгебры, для которых множество $\Sigma_n(A)$ несчетно. Например, из результатов [1] следует, что таким свойством обладает алгебра $M_3(O_2)$, где O_2 — алгебра Кунца.

Напомним (см. [3]), что C^* -алгебра A называется аппроксимативно-конечной (или АФ-алгеброй), если она является замыканием объединения возрастающей последовательности конечномерных подалгебр A_n . Если каждая A_n изоморфна полной матричной алгебре $M_{k(n)}$, то A называется равномерно-гиперфинитной алгеброй. Последовательность $\vec{k} = (k(1), k(2), \dots)$ полностью характеризует равномерно-гиперфинитную алгебру и называется ее супериндексом.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для всякой унитарной аппроксимативно-конечной C^* -алгебры A множество $\Sigma_n(A)$ счетно.

Доказательство следствия 4 основано, разумеется, на существовании следа на всякой унитарной аппроксимативно-конечной C^* -алгебре. Ниже мы приводим формулировку более общего результата такого рода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если C^* -алгебра A является замыканием объединения возрастающей сети своих подалгебр, каждая из которых содержит единицу алгебры A и имеет след, то A имеет след.

Для равномерно-гиперфинитных алгебр множество $\Sigma_n(A)$ можно выписать явно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если A — равномерно-гиперфинитная алгебра супериндекса $\vec{k}$, то $\Sigma_n(A)$ состоит из всех $\lambda \in \Sigma_n$ вида p/q , где $q | k_n$ для некоторого n .

В частности, если A — алгебра антикоммутирующих соотношений, то $\Sigma_n(A)$ — множество двоично-рациональных чисел из Σ_n и, следовательно, не является замкнутым.

Таким образом, для C^* -алгебр множество $\Sigma_n(A)$ не всегда замкнуто.

Автор благодарит Ю. С. Самойленко за полезное обсуждение рассмотренных в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. О суммах проекторов. Функциональный анализ и его прил., **36**, вып. 3, 20–35 (2002).
2. Arveson W. B. An Invitation to C^* -algebras. Springer-Verlag, New York, 1976.
3. Davidson K. R. C^* -Algebras by Examples. Fields Inst. Monographs, Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.