Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Псевдокватернионная геометрия,
Функц. анализ и его прил., 2002, том 36, выпуск 1, 1–
15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:40:30

Псевдокватернионная геометрия*

© 2002. В. И. Арнольд

Рассмотрим кватернионное (левое векторное или аффинное) пространство. Умножение векторов (слева) на комплексные числа задает в нем естественную комплексную структуру. Комплексный диффеоморфизм такого комплексного многообразия называется *псевдокватернионным*, если он переводит кватернионные подпространства (соответственно левые векторные, аффинные) в кватернионные (такого же типа).

Примером является любое кватернионное (лево-векторное, аффинное соответственно) преобразование. Другой пример доставляет автоморфизм A тела кватернионов $\mathbb{H}$ (например, переводящий $(1, i, j, k)$ в $(1, i, -j, -k)$). Легко проверить, что $A(x + y) \equiv A(x) + A(y)$, $A(xy) \equiv A(x)A(y)$, так что A естественно действует на кватернионных лево-векторных пространствах $\mathbb{H}^n$ и на соответствующих им аффинных кватернионных пространствах. Это действие — псевдокватернионное (псевдо-лево-линейное, псевдоаффинное) преобразование, не являющееся кватернионно-линейным (аффинным).

Основным результатом настоящей статьи является доказательство того, что, кроме преобразований из двух приведенных примеров и их произведений, других комплексно-гладких псевдокватернионных преобразований (лево-линейных, аффинных кватернионных пространств размерности $n > 1$) нет. Описаны также преобразования кватернионной плоскости, переводящие левые кватернионные прямые в левые, а правые — в правые. Вероятно, часть результатов переносится и на негладкий случай, но я этого не доказываю.

§1. Описание кватернионных автоморфизмов

Пусть $A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ — непрерывный автоморфизм тела кватернионов. Хорошо известна

ЛЕММА. *Существует кватернион q , такой, что для любого кватерниона x выполняется равенство $Ax = qxq^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A(1) = 1$, поэтому для целых (и, следовательно, для рациональных, а в силу непрерывности и для вещественных) значений x имеем $A(x) = x$. Кватернион $xy - yx$ чисто мнимый. Поэтому кватернион

$$A(xy - yx) = (A(x))(A(y)) - (A(y))(A(x))$$

чисто мнимый, т.е. A переводит чисто мнимые кватернионы в чисто мнимые. Если $x = a + b$, где a вещественный, а b чисто мнимый, то $A(\bar{x}) = A(a - b) = A(a) - A(b) = a - A(b) = \bar{A}(x)$, так что A переводит сопряженные кватернионы в сопряженные. Поэтому A сохраняет нормы кватернионов, а следовательно, и расстояния, и углы между ними.

*Частично поддержано грантом РФФИ 99-01-01109.

Два чисто мнимых $\mathbb{R}$ -линейно независимых кватерниона (x, y) задают в пространстве $\mathbb{R}^3$ чисто мнимых кватернионов всегда одну и ту же ориентацию (x, y, xy) (в евклидовой геометрии третий вектор — векторное произведение двух данных). Тройка $A(x), A(y), A(xy) = (A(x))(A(y))$ задает ту же самую ориентацию. Поэтому изометрическое отображение A , действующее в $\mathbb{R}^3$, сохраняет ориентацию и принадлежит группе $SO(3)$.

Рассмотрим отображение $S^3 \rightarrow SO(3)$, сопоставляющее кватерниону q нормы 1 вращение пространства $\mathbb{R}^3$, переводящее x в qxq^{-1} . Определенный этой формулой гомоморфизм групп является локальным диффеоморфизмом, т.е. накрытием. Это накрытие двулистное, так как из условия, что « $qxq^{-1} = x$ для всех x », следует коммутативность: « $qx = xq$ для всех x ». Для $q = a + bi + cj + dk$, $x = i, j, k$ мы получаем последовательно

$$c(-k) + dj = ck - dj, \quad bk - di = -bk + di, \quad -bj + ci = bj - ci,$$

т.е. $c = d = 0$, $b = d = 0$, $b = c = 0$, так что $q = a = \pm 1$.

Поскольку накрытие $S^3 \rightarrow SO(3)$ покрывает всю группу вращений, наше вращение $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ имеет вид $A(x) = qxq^{-1}$ для некоторого кватерниона q нормы 1, не зависящего от x .

Это отображение A переводит каждый вещественный кватернион x в себя; поэтому мы нашли все автоморфизмы тела $\mathbb{H}$. Они образуют группу $SO(3)$, так как мы описали группу автоморфизмов как образ группы S^3 при гомоморфизме $q \mapsto (A: x \mapsto qxq^{-1})$, ядром которого является тривиально действующая группа S^0 из двух элементов $q = \pm 1$.

Лемма доказана.

ПРИМЕР. При $q = i$ мы получаем «псевдосопряжение» $A(a + bi + cj + dk) \equiv a + bi - cj - dk$, так как $Aj = -j$, $Ak = -k$. Кватернионное сопряжение (меняющее знак всей мнимой части) — не автоморфизм, а антиавтоморфизм (порядок сомножителей меняется).

Преобразование из леммы, A , является комплексным, если оно коммутирует с умножением на i , т.е. если $A(i) = i$, для чего требуется коммутирование $qi = iq$, т.е. сопрягающий кватернион $q = e^{i\varphi}$ должен быть комплексным числом. В этом предположении A сохраняет точки плоскости $\mathbb{R}^2$, натянутой на $(1, i)$, поворачивая на угол 2φ ортогональную ей плоскость (натянутую на (j, k)). Такое преобразование A действует там следующим образом:

$$A((c + di)j) = e^{2i\varphi}(c + di)j,$$

поскольку для любого комплексного числа r имеем $jr = \bar{r}j$ (так что для $x = (c + di)j$ получаем $qxq^{-1} = q(c + di)qj$).

§ 2. Псевдокватернионные линейные преобразования

Рассмотрим комплексное (невыврожденное) линейное преобразование $A: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ левого кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$, снабженного лево-кватернионным базисом $\{e_s\}$ и комплексным базисом $\{e_s, f_s = je_s\}$ ($s = 1, \dots, n$); пусть $n > 1$. Векторы пространства $\mathbb{H}^n$ имеют вид $x = \sum (x_s e_s)$, $x_s \in \mathbb{H}$.

ТЕОРЕМА 1. Преобразование A является псевдокватернионным, если и только если оно представимо в виде произведения $A = A_0 U$ кватернионно-лево-

линейного преобразования $A_0: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ и автоморфизма $U: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ (действующего на каждый вектор $x = \sum(x_s e_s)$ ($x_s \in \mathbb{H}$) по формуле $(Ux)_s = qx_s q^{-1}$, где q — некоторый кватернион нормы 1, не зависящий от x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из комплексной невырожденности оператора A следует кватернионная независимость n векторов Ae_s . Обозначим через A_0 тот (единственный) лево-кватернионно-линейный оператор, для которого $A_0 e_s = Ae_s$ (при $s = 1, \dots, n$): он переводит вектор $x = \sum(x_s e_s)$ в вектор $\sum(x_s (Ae_s))$ при любых кватернионных коэффициентах x_s . Этот оператор невырожден и имеет обратный лево-кватернионный оператор, A_0^{-1} .

Оператор $U = A_0^{-1} A$ псевдокватернионный, и он оставляет любую точку e_s на месте.

ЛЕММА. Псевдокватернионный комплексно-линейный оператор U , оставляющий на месте каждый вектор e_s лево-кватернионного базиса, действует на координаты x_s точки $x = \sum(x_s e_s)$ как автоморфизм: $\tilde{x}_s = px_s p^{-1}$, где p — некоторый кватернион, не зависящий от x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $Ue_s = e_s$. Псевдокватернионность оператора U приводит к формуле $Uf_s = q_s e_s$, где q_s — некоторый кватернион, $q_s = a_s + b_s j$ (числа a_s и b_s комплексные).

Для любых комплексных чисел γ_s рассмотрим комплексную линейную комбинацию $\bar{\gamma} = \sum(\bar{\gamma}_s e_s)$ и вектор $j\bar{\gamma} = \sum(\gamma_s f_s)$ (напомним, что $f_s = je_s$ и что $j\bar{\gamma} = rj$ для любого комплексного числа r).

Условие псевдокватернионности оператора U , примененное к кватернионной прямой, содержащей $\bar{\gamma}$, приводит к формуле

$$U(j\bar{\gamma}) = qU(\bar{\gamma}), \quad (1)$$

где q — некоторый (зависящий от γ) кватернион. В терминах компонент разложения по комплексному базису $\{e_s, f_s\}$ мы получаем для левой части формулы (1) выражение

$$U(j\bar{\gamma}) = \sum(\gamma_s U(f_s)) = \sum(\gamma_s q_s e_s) = \sum(\gamma_s a_s e_s) + \sum(\gamma_s b_s f_s)$$

(поскольку $U(f_s) = q_s e_s = (a_s + b_s j)e_s = a_s e_s + b_s f_s$).

Для правой части формулы (1) мы получаем выражение

$$q \sum(\bar{\gamma}_s e_s) = \sum(a \bar{\gamma}_s e_s) + \sum(b \bar{\gamma}_s f_s),$$

поскольку $Ue_s = e_s$. Здесь предполагается, что кватернион q имеет вид $a + bj$ с комплексными a и b и использовано равенство $j\bar{\gamma}_s = \gamma_s j$.

Теперь равенство (1) принимает вид системы уравнений $\gamma_s a_s = a \bar{\gamma}_s$, $\gamma_s b_s = b \bar{\gamma}_s$.

Из этих равенств, полагая, например, все γ_s равными 1, получаем независимость от s коэффициентов $b_s = b$ (не зависящих по определению чисел b_s от γ). Точно так же мы убеждаемся, при $\gamma_s \equiv 1$, что и числа $a_s = a$ не зависят от s . Но, полагая $\gamma_{s_*} = i$ для одного значения ($s = s_*$) и $\gamma_s = 1$ для остальных, мы получаем, что $a_{s_*} = -a$, так что $a = 0$ (если $n > 1$).

Итак, окончательно, при любом $s = 1, \dots, n$ имеем простое описание оператора U :

$$Uf_s = bje_s = bf_s, \quad b \in \mathbb{C} \quad (2)$$

(при $n = 1$ кватернион b — не обязательно комплексное число).

Теперь мы находим, при $n > 1$, вдоль кватернионной прямой, содержащей вектор $e_1 + f_2$, соотношения

$$U(e_1 + f_2) = e_1 + bf_2, \quad U(je_1 + jf_2) = U(f_1) - U(e_2) = bf_1 - e_2.$$

Из псевдокватернионности оператора U вытекает, что эти векторы лежат на одной лево-кватернионной прямой:

$$bf_1 - e_2 = (\sigma + \tau j)(e_1 + bf_2) = \sigma e_1 - \tau \bar{b}e_2 + \tau f_1 + \sigma bf_2.$$

Из этого равенства для комплексных коэффициентов σ и τ следуют соотношения

$$\sigma = 0, \quad \sigma b = 0, \quad \tau = b, \quad \tau \bar{b} = 1,$$

т. е. $|b| = 1$ для комплексного числа b .

Теперь мы убедимся, что формула (2) при $|b| = 1$ определяет автоморфизм U (и, следовательно, псевдокватернионный оператор $U: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$).

Оператор U действует на кватернионные координаты q_s вектора q в базисе $\{e_s\}$ так, что

$$Ue_s = e_s, \quad Uf_s = bf_s.$$

Под действием этого оператора точка $q_s = 1$ переходит в 1, а точка $q_s = j$ переходит в bj . Рассмотрим автоморфизм U_p , переводящий кватернион q в pqp^{-1} , где p — комплексное число (с модулем 1). Этот автоморфизм комплексно-линеен и переводит $q = 1$ в 1, а $q = j$ он переводит в $pjp^{-1} = p\bar{p}^{-1}j$. Поэтому достаточно выбрать p так, чтобы $p/\bar{p} = b$, чтобы представить наш оператор U в виде U_p .

Комплексное число $p/\bar{p}$ имеет модуль 1, и любое комплексное число b , имеющее модуль 1, представимо в виде $p/\bar{p}$.

Лемма доказана.

Теорема сразу следует из леммы, так как $A = A_0U$ (по определению оператора U).

Замечание. Группа псевдокватернионных операторов может быть определена также как группа произведений кватернионных операторов на автоморфизмы, перемноженных в ином порядке, или как группа всех (итерированных) произведений кватернионных операторов и автоморфизмов.

Это вытекает из того, что для кватернионно-линейных операторов A_s и автоморфизмов U_s выполнено тождество $(A_1U_1)(A_2U_2) = A_1A_3U_1U_2$, где $A_3 = U_1A_2U_1^{-1}$ — кватернионно-линейный оператор (ведь для любых кватерниона q и вектора x величина $q(A_2(q^{-1}xq))q^{-1} = qA_2q^{-1}x$ зависит от x кватернионно-лево-линейно).

Кроме представления $A = A_0U$, мы получаем разложение псевдокватернионного преобразования в произведение кватернионного линейного преобразования и автоморфизма в обратном порядке: $A = UA_1$, где $A_1 = U^{-1}A_0U$. Автоморфизм U при этом можно сохранить. Кватернионная линейность оператора A_1 легко проверяется: для любого кватерниона h и кватернионного вектора x имеем (в силу кватернионной линейности оператора A_0 и автоморфности U) соотношения

$$\begin{aligned} A_1(hx) &= (U^{-1}A_0U)(hx) = U^{-1}A_0(U(h))U(x) = U^{-1}A_0(h_1U(x)) \\ &= U^{-1}(h_1A_0(U(x))) = U^{-1}(h_1)(U^{-1}(A_0U(x))) = hA_1(x), \end{aligned}$$

где через h_1 обозначен образ кватерниона h при автоморфизме U (т. е. $h_1 = qhq^{-1}$ в обозначениях леммы из §1).

Из этих формул следует, что произведение автоморфизмов, входящих в представление псевдокватернионного оператора в виде произведения любого числа кватернионно-линейных операторов и автоморфизмов, не зависит от частного выбора представления: мы определили гомоморфизм группы псевдокватернионных операторов на окружность комплексных чисел с модулем 1.

Построенный гомоморфизм является вещественно-гладким отображением, как видно из доказательства теоремы 1: автоморфизм U , а следовательно, и комплексное число b вещественно-гладко зависят от исходного оператора A .

§3. Псевдокватернионные диффеоморфизмы

Пусть $f: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ — голоморфный диффеоморфизм пространства $\mathbb{H}^n$ или какой-нибудь его связной области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Диффеоморфизм f называется *псевдокватернионным*, если его производная (в каждой точке) является псевдокватернионным линейным оператором.

ТЕОРЕМА 2. *Производная псевдокватернионного диффеоморфизма является произведением лево-кватернионного линейного оператора на постоянный (не зависящий от точки) автоморфизм тела кватернионов (действующий как оператор в касательном пространстве, по желанию в прообразе или в образе).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем кватернионные локальные координаты $q_s = x_s + y_s j \in \mathbb{H}$ (где числа x_s и y_s комплексные). Запишем наш диффеоморфизм в виде $Q = f(q)$, обозначая компоненты точки-образа через $Q_s = X_s + Y_s j \in \mathbb{H}$ (здесь X_s и Y_s — голоморфные комплексные функции от $2n$ переменных x и y). Введем еще обозначения для производных этих функций:

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_m} = A_m^k, \quad \frac{\partial X_k}{\partial y_m} = B_m^k, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial x_m} = C_m^k, \quad \frac{\partial Y_k}{\partial y_m} = D_m^k.$$

Будем считать изучаемую точку началом координат и разложим производные в ряды Тейлора (степени 1),

$$A_m^k = A_{(0)m}^k + \sum_s A_{(1)m,s}^k x_s + \sum_s A_{(2)m,s}^k y_s + \dots$$

и аналогично для B , C и D (индекс (1) означает участие дифференцирования по x_s , а индекс (2) — по y_s ; верхний индекс k здесь и далее — номер исследуемой компоненты). Совпадение смешанных производных дает тождества симметрии матрицы вторых производных

$$\begin{aligned} A_{(1)m,s}^k &= A_{(1)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_m \partial x_s} \right), & A_{(2)m,s}^k &= B_{(1)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_m \partial y_s} \right), \\ B_{(2)m,s}^k &= B_{(2)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 X_k}{\partial y_m \partial y_s} \right), & C_{(1)m,s}^k &= C_{(1)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_m \partial x_s} \right), \\ C_{(2)m,s}^k &= D_{(1)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_m \partial y_s} \right), & D_{(2)m,s}^k &= D_{(2)s,m}^k \left(= \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y_m \partial y_s} \right). \end{aligned}$$

Обозначим приращение вектора $q = x + yj$ через $\xi = u + vj$ (с комплексными векторами u и v). Ряд Тейлора степени 1 для f имеет вид

$$f(q + \xi) = f(q) + (Au + Bv) + (Cu + Dv)j + \dots, \quad (3)$$

где компоненты первого дифференциала даются формулами

$$(Au + Bv)^k = \sum_m (A_m^k u_m + B_m^k v_m), \quad (Cu + Dv)^k = \sum_m (C_m^k u_m + D_m^k v_m).$$

Псевдокватернионность производной позволяет нам представить этот комплексно-линейный оператор дифференциала в виде $\xi \mapsto r(\xi h)r^{-1}$, где $h(x, y)$ обозначает некоторую вещественно-гладкую по x и y кватернионную матрицу $h(x, y) = P + Qj$, действующую на кватернионный вектор ξ справа¹⁾. Компоненты вектора ξh выражаются через компоненты u и v вектора ξ по формуле

$$(\xi h)^k = (uP + v\bar{Q})^k + (uQ - v\bar{P})^k j$$

(использованы соотношения $\bar{p}j = jp$ для комплексного числа p). Компоненты, входящие в правую часть этой формулы, выражаются через элементы комплексных матриц P и Q так:

$$\begin{aligned} (uP)^k &= \sum_s (P_s^k u_s), & (uQ)^k &= \sum_s (Q_s^k u_s), \\ (v\bar{Q})^k &= \sum_s (\bar{Q}_s^k v_s), & (-v\bar{P})^k &= \sum_s (-\bar{P}_s^k v_s). \end{aligned}$$

Наконец, умножая вектор ξh на комплексное число r слева и на r^{-1} справа, мы получим

$$r(\xi h)r^{-1} = (uP) + (v\bar{Q}) + \rho(uQ - v\bar{P})j, \quad (4)$$

где $\rho = r/\bar{r}$ — комплексное число с модулем 1 (деление на $\bar{r}$ появляется из-за того, что $j r^{-1} = \bar{r}^{-1} j$).

Теперь мы запишем уравнения симметрии смешанных комплексных производных в терминах записанного в виде (4) дифференциала нашего диффеоморфизма. Эти уравнения симметрии и приведут нас к заключению $r = \text{const}$ теоремы 2.

Из условия $|\rho| = 1$ следует, что ряд Тейлора степени 1 функции ρ имеет вид

$$\rho = \rho_0 \left[1 + i \sum_s (\sigma_s x_s + \bar{\sigma}_s \bar{x}_s + \tau_s y_s + \bar{\tau}_s \bar{y}_s) \right] \quad (5)$$

(вещественная гладкость функции ρ следует из замечания в конце §2). Сравнивая формулу (4) с формулой (3), мы получаем тождества

$$Au = uP, \quad Bv = v\bar{Q}, \quad Cu = \rho uQ, \quad Dv = -\rho v\bar{P}.$$

Иными словами, мы получаем

$$A_m^k = P_m^k, \quad B_m^k = \bar{Q}_m^k, \quad C_m^k = \rho Q_m^k, \quad D_m^k = -\rho \bar{P}_m^k \quad (6)$$

при всех k и m .

¹⁾ Согласно замечанию в конце §2, автоморфизм и кватернионно-линейный оператор можно применять к вектору ξ в любом порядке.

Здесь комплексные матричные функции A, B, C, D голоморфны, комплексная вещественно-гладкая функция ρ имеет модуль 1, а производные голоморфных матриц A, B, C, D удовлетворяют выписанным выше соотношениям симметрии

$$A_{(2)m,s}^k = B_{(1)s,m}^k, \quad C_{(2)m,s}^k = D_{(1)s,m}^k. \quad (7)$$

Из формул (6) мы находим выражения

$$C_m^k = \rho \bar{B}_m^k, \quad D_m^k = -\rho \bar{A}_m^k. \quad (8)$$

Подставляя в произведение (8) выражение (5) для ρ и разлагая произведение в ряд Тейлора степени 1, мы получаем из первой формулы (8) выражение

$$C_m^k = \rho_0 \bar{B}_{(0)m}^k + \rho_0 i \sum_s (\sigma_s x_s \bar{B}_{(0)m}^k + \bar{\sigma}_s \bar{x}_s \bar{B}_{(0)m}^k + \tau_s y_s \bar{B}_{(0)m}^k + \bar{\tau}_s \bar{y}_s \bar{B}_{(0)m}^k) + \rho_0 \sum_s (\bar{B}_{(1)m,s}^k \bar{x}_s + \bar{B}_{(2)m,s}^k \bar{y}_s). \quad (9)$$

Чтобы получилась голоморфная функция C_m^k от x и y , нужно, чтобы коэффициенты при $\bar{x}_s$ и $\bar{y}_s$ обратились в 0:

$$i\bar{\sigma}_s \bar{B}_{(0)m}^k + \bar{B}_{(1)m,s}^k = 0, \quad i\bar{\tau}_s \bar{B}_{(0)m}^k + \bar{B}_{(2)m,s}^k = 0.$$

Итак, производные функций B удается выразить через сами функции:

$$B_{(1)m,s}^k = i\sigma_s B_{(0)m}^k, \quad B_{(2)m,s}^k = i\tau_s B_{(0)m}^k. \quad (10)$$

Кроме того, коэффициент при y_s в формуле (9) доставляет выражение производной от $C_{(0)m}^k$ по y_s :

$$C_{(2)m,s}^k = \rho_0 i \tau_s \bar{B}_{(0)m}^k. \quad (11)$$

Вычисляя подобным же образом ряд для D_m^k при помощи формул (6) и (5), мы получаем из условия голоморфности функции D соотношения

$$A_{(1)m,s}^k = i\sigma_s A_{(0)m}^k, \quad A_{(2)m,s}^k = i\tau_s A_{(0)m}^k, \quad (12)$$

а коэффициент при x_s доставляет выражение для производной от $D_{(0)m}^k$ по x_s :

$$D_{(1)m,s}^k = -\rho_0 i \sigma_s \bar{A}_{(0)m}^k. \quad (13)$$

Теперь первое соотношение симметрии (7), с учетом выражений (12) и (10), принимает вид

$$\tau_s A_{(0)m}^k = \sigma_m B_{(0)s}^k,$$

а второе — с учетом еще (11) и (13) — вид

$$\tau_s \bar{B}_{(0)m}^k = -\sigma_m \bar{A}_{(0)s}^k.$$

Мы заключаем, что $\tau_s/\sigma_m = -\bar{\sigma}_s/\bar{\tau}_m$, т. е. $\tau_s \bar{\tau}_m + \sigma_m \bar{\sigma}_s = 0$ при любых m и s . Полагая $m = s$, мы видим, что $\tau_s = \sigma_m = 0$ (при любых s и m). Следовательно, производная от ρ равна нулю. А так как это доказательство проходит в любой точке, то функция ρ локально постоянна.

Из постоянства $\rho = r/\bar{r}$ следует локальное постоянство равной 1 по модулю функции r (имеющий вдвое меньший аргумент). Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим голоморфный псевдокватернионный диффеоморфизм кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, на себя. Такой диффеоморфизм является произведением кватернионного аффинного преобразования и действия кватернионного автоморфизма на пространство $\mathbb{H}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем наш диффеоморфизм в какой-либо аффинной карте. По теореме 2 его производная в каждой точке является произведением лево-кватернионно-линейного оператора и (однозначно определенного) автоморфизма, который локально постоянен. Мы заключаем, что он всюду постоянен (так как кватернионное пространство связно).

Отсюда следует, что наш голоморфный псевдокватернионный диффеоморфизм является произведением единого автоморфизма тела кватернионов, естественно действующего на лево-кватернионном пространстве, и диффеоморфизма с лево-кватернионно-линейной в каждой точке производной (перемноженных в произвольном порядке).

ЛЕММА. *Голоморфный диффеоморфизм лево-кватернионного пространства $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, производная которого в каждой точке лево-кватернионно-линейна, является кватернионно-аффинным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наш диффеоморфизм является псевдокватернионным (при записи в аффинных кватернионных координатах) по определению начала §3.

Из формул (10) и (12) доказательства теоремы 2 следует, ввиду установленного в конце этого доказательства соотношения $\tau = \sigma = 0$, что матрицы производных, $A_{(0)m}^k$ и $B_{(0)m}^k$, равны нулю. Согласно формуле (8), это верно тогда также для матриц $C_{(0)m}^k$, $D_{(0)m}^k$, т.е. в условиях леммы вся наша кватернионно-линейная производная вдобавок локально постоянна.

Стало быть, наш голоморфный диффеоморфизм записывается в аффинных кватернионных координатах в виде линейного (неоднородного) преобразования $(q = \sum q_s e_s) \mapsto (Q = \sum Q_k e_k)$, где $Q_k(q) = Q_k(0) + \sum_s q_s Q_s^k$ с постоянными кватернионными коэффициентами Q_s^k , что и доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кватернионно-проективное преобразование не обязательно псевдокватернионно. Например, если $Q = q^{-1}$, то $(q + \xi)^{-1} = q^{-1} + \eta$, где приращение образа, $\eta = -q^{-1}\xi q^{-1}$, зависит от кватерниона приращения аргумента ξ нелинейно в кватернионном смысле (так как при умножении ξ слева на кватернион h приращение образа умножается слева не на h , а на $q^{-1}hq$). Впрочем, это преобразование и не голоморфно.

§4. Комплексные структуры кватернионного векторного пространства

Мы использовали в лево-кватернионном векторном пространстве $\mathbb{H}^n$ комплексную структуру, заданную умножением кватернионных компонент векторов на комплексные числа слева. Кватернионная структура в получающемся пространстве $\mathbb{C}^{2n}$ определяется оператором умножения компонент слева на кватернион j . Этот оператор в $\mathbb{C}^{2n}$ будем обозначать через j : $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$. Он антикомплексен: $j(rx) = \bar{r}j(x)$ для любых комплексного числа r и вектора x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимой кватернионной структурой в пространстве $\mathbb{C}^{2n} \approx \mathbb{H}^n$ называется любой антикомплексный оператор J : $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$, квадрат которого равен -1 .

Разумеется, условие антикомплексности состоит в антикоммутировании с оператором умножения на i : $Ji = -iJ$.

ТЕОРЕМА 4. *Всякая допустимая кватернионная структура в $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{H}^n$ получается из оператора j (левого умножения на кватернион j в $\mathbb{H}^n$) при помощи подходящего комплексного изоморфизма $A: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$, переводящего оператор j в подобный ему оператор $J = AjA^{-1}$.*

Эта теорема позволяет распространить результаты предыдущих параграфов на кватернионные пространства с другими комплексными структурами (теми, для которых исходная кватернионная структура допустима — теорема 4 их описывает).

НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4. Пусть J — искомый антикомплексный оператор. Составим оператор $B = Jj^{-1} = -Jj$. Этот оператор B — комплексный: ввиду антикомплексности J и j имеем

$$iB = -iJj = Jij = -Jji = Bi.$$

Точно так же доказывается антикомплексность произведения $J = Bj$ для любого комплексного оператора B :

$$iJ = iBj = Bij = -Bji = -Ji.$$

Пусть $J = Bj$, где B — комплексный оператор.

ЛЕММА 1. $J^2 = -1$, если и только если $B\bar{B} = 1$, где $\bar{B}$ — комплексно-сопряженный к B оператор.

Комплексное сопряжение оператора определяется комплексным сопряжением элементов его матрицы в фиксированном базисе. Из антикомплексности оператора j следует правило его перестановки с комплексными операторами:

$$jB = \bar{B}j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Условие $J^2 = -1$ можно переписать при $J = Bj$ в виде

$$BjBj = j^2, \quad BjB = j.$$

Заменяя здесь jB на $\bar{B}j$, мы приходим к $B\bar{B} = 1$.

Обратно, если $B\bar{B} = 1$, то $J^2 = BjBj = B\bar{B}jj = j^2 = -1$, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Операторы B , удовлетворяющие условию $B\bar{B} = 1$, и только они представимы в виде $B = A\bar{A}^{-1}$, где $A: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ — комплексный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Если $B = A\bar{A}^{-1}$, то $\bar{B} = \bar{A}A^{-1}$, так что $B\bar{B} = A\bar{A}^{-1}\bar{A}A^{-1} = AA^{-1} = 1$.

Если $B\bar{B} = 1$, то достаточно в качестве A взять оператор вида $\varepsilon 1 + \bar{\varepsilon}B$. Тогда $\bar{A} = \bar{\varepsilon}1 + \varepsilon B^{-1}$. Поэтому $B\bar{A} = \varepsilon B + \varepsilon 1 = A$, т. е. $B = A\bar{A}^{-1}$, что и требовалось доказать.

Здесь нужно, чтобы комплексный оператор $\bar{A}$ был обратимым. Для этого оператор B^{-1} не должен иметь число $-\bar{\varepsilon}/\varepsilon$ собственным числом. Этого легко добиться выбором комплексного числа ε . Такой выбор завершает доказательство леммы 2.

КОНЕЦ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 4. Если $J = Bj$, $J^2 = -1$, то $B\bar{B} = 1$ по лемме 1. Значит, $B = A\bar{A}^{-1}$ по лемме 2.

Стало быть, $J = A\bar{A}^{-1}j = AjA^{-1}$ (ввиду антикомплексности оператора j и комплексности оператора A), что и требовалось доказать.

§ 5. Бикватернионная линейность

Пространство $\mathbb{H}^n$ с точками $q = \sum q_s e_s$, $q_s \in \mathbb{H}$, можно рассматривать как лево-кватернионное (с умножением координат q_s вектора q на кватернионы слева) или как право-кватернионное (с умножением справа) векторное пространство. Легко доказывается

ТЕОРЕМА 5. *Оператор $A: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ является линейным по отношению к обоим структурам, если и только если он вещественный: $Ae_s = \sum a_{s,m} e_m$, $a_{s,m} \in \mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ это очевидно: $A(qe) = bqe = qce$, поэтому $c = q^{-1}bq$ не зависит от q , стало быть $c = b$ (можно выбрать $q = 1$). Итак, кватернион b коммутирует со всеми кватернионами и потому веществен, что и требовалось доказать.

В общем случае из условия линейности слева и справа следует, что

$$A(q) = A\left(\sum q_s e_s\right) = \sum q_s a_{s,m} e_m = \sum a_{s,m} q_s e_m.$$

Коэффициенты в обоих случаях равны кватернионам $a_{s,m}$ потому, что можно начать с $q = e_s$. Значит, кватернион $a_{s,m}$ коммутирует со всеми кватернионами q_s (можно, например, выбрать вектор с единственной ненулевой компонентой $q = q_s e_s$ и рассмотреть m -компоненту вектора $A(q)$). Поэтому все элементы матрицы $a_{s,m}$ вещественны, что и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь оператор $A: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, который, не будучи обязательно линейным, все же переводит левые прямые ($\mathbb{H}q$) в левые и правые ($q\mathbb{H}$) — в правые, аддитивен ($A(x + y) = A(x) + A(y)$) и непрерывен. Такие операторы будем называть *псевдобикватернионными*, если они взаимно однозначны.

ПРИМЕР 1. Всякий вещественный невырожденный линейный оператор из теоремы 5 является бикватернионным (и, следовательно, псевдобикватернионным).

ПРИМЕР 2. Всякий автоморфизм U_t ($q \mapsto tq t^{-1}$, где $t \neq 0$ — фиксированный, т. е. не зависящий от q , кватернион) — псевдобикватернионный оператор (здесь не вещественный кватернион t — не обязательно комплексное число):

$$U_t(\lambda\xi) = \tilde{\lambda}U_t(\xi), \quad U_t(\xi\lambda) = U_t(\xi)\tilde{\lambda}, \quad \text{где } \tilde{\lambda} = U_t(\lambda),$$

— этот оператор не бикватернионен и даже не кватернионен ни слева, ни справа, так как $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ для некоторых λ , если t не веществен.

ПРИМЕР 3. Оператор умножения всех компонент кватернионного вектора справа на фиксированный ненулевой не вещественный кватернион p псевдобикватернионен, ибо $(\lambda\xi)p = \lambda(\xi p)$, $(\xi\lambda)p = (\xi p)\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} = p^{-1}\lambda p$. Этот оператор умножения на p справа лево-кватернионен, но не кватернионен справа, так как $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ для некоторых λ , если кватернион p не вещественный.

ТЕОРЕМА 6. *Всякий псевдобикватернионный оператор в $\mathbb{H}^n$ — это произведение бикватернионного линейного оператора (вещественного по теореме 5), автоморфизма (пример 2) и оператора (пример 3) умножения всех компонент кватернионного вектора справа на фиксированный кватернион (в качестве которого можно к тому же взять, например, комплексное число i).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Такие произведения образуют группу. Автоморфизмы коммутируют с вещественными операторами. Произведение автоморфизмов $U_{t_1}U_{t_2}$ есть автоморфизм $U_{t_2t_1}$, а произведение вещественных операторов вещественно. Таким образом, произведения операторов вида 1) и 2) образуют группу: прямое произведение группы бикватернионных (вещественных) операторов и группы автоморфизмов U_t , изоморфной $SO(3) = SU(2)/\pm 1 = S^3/\pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 (при $n = 2$). Базисные векторы $e_1 = e$ и $e_2 = f$ оператор A переводит в $Ae_k = \xi_k = p_k e + q_k f$. Вектор $\xi = pe + qf$ при умножении слева на кватернион r и справа на кватернион s превращается в $\tilde{\xi} = r\xi = rpe + rqf = \tilde{p}e + \tilde{q}f$, $\hat{\xi} = \xi s = pse + qsf = \hat{p}e + \hat{q}f$.

При умножении слева (соответственно справа) сохраняется отношение компонент $h = \tilde{p}^{-1}\tilde{q} = p^{-1}q$ (соответственно $m = \hat{q}\hat{p}^{-1} = qp^{-1}$).

Для данного вектора $\xi \neq 0$ его левые кратные, $\tilde{\xi}$, образуют вещественно-четырёхмерное пространство $\mathbb{H}\xi$, а его правые кратные, $\hat{\xi}$, — также вещественно-четырёхмерное пространство $\xi\mathbb{H}$ в вещественно-восьмимерном пространстве $\mathbb{H}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $\xi \neq 0$ из $\mathbb{H}^2$ назовем *специальным*, если пересечение $(\mathbb{H}\xi) \cap (\xi\mathbb{H})$ имеет вещественную размерность, большую двух.

ЛЕММА. Вектор ξ специален, если и только если для него веществен инвариант $h = p^{-1}q$ (или, что то же, веществен инвариант $m = qp^{-1} = qhq^{-1}$). [В случае $p = 0$ нужно рассматривать $h^{-1} = q^{-1}p$ и $m^{-1} = pq^{-1}$.]

Если вектор $\xi \neq 0$ специален, то $(\mathbb{H}\xi) \cap (\xi\mathbb{H}) = \mathbb{H}\xi = \xi\mathbb{H}$, а если неспециален, то это пересечение вещественно-двумерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Условие $r\xi = \xi s$ означает, что $rp = ps$, $rq = qs$, т. е. $r = psp^{-1} = qsq^{-1}$, $s = p^{-1}rp = q^{-1}rq$ (случай $p = 0$ и $q = 0$ разбираются легче). Итак, если $r\xi = \xi s$, то кватернион s коммутирует с кватернионом $h = p^{-1}q$ (и с $h^{-1} = q^{-1}p$), а r коммутирует с $m = qp^{-1}$ (и с $m^{-1} = pq^{-1}$). Условия $h \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{R}$ эквивалентны, поскольку $m = qhq^{-1}$.

Если h и m не вещественны, то коммутирующие с ними кватернионы r (соответственно ξ) образуют двумерные вещественные плоскости: $r \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}h$, $s \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}m$. Поэтому пересечение $(\mathbb{H}\xi) \cap (\xi\mathbb{H})$ оказывается в этом случае вещественно-двумерным пространством $(\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}h)\xi = \xi(\mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R}m)$.

Если же h и m вещественны, то $m = h$, $q = ph$, $\xi = pe + phf$, $r\xi = rpe + h(rp)f$, $\xi s = pse + h(ps)f$, так что $\tilde{\xi} = \hat{\xi}$ для любого кватерниона r при $s = p^{-1}rp$. Поэтому в случае вещественных h и m $\mathbb{H}\xi = \xi\mathbb{H}$ совпадает с пересечением этих вещественно-четырёхмерных пространств.

Лемма доказана. Мы можем записать полученное условие специальности вектора $\xi = pe + qf$ в виде $q = ph$, $h \in \mathbb{R}$ (или $p = qh^{-1}$, чтобы охватить и случай $p = 0$).

СЛЕДСТВИЕ. Псевдобикватернионный оператор переводит специальные векторы в специальные.

В самом деле, этот изоморфизм вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$ на себя переводит левые кватернионные прямые в левые и правые в правые, а значит, пересечение содержащих фиксированный ненулевой вектор левой и правой прямых — в пересечение их образов, которое, стало быть, должно иметь такую же размерность, как и исходное пересечение.

ПРИМЕР. Вектор e специальный ($p = 1, q = 0, h = 0$), поэтому вектор Ae тоже специальный. Значит, по лемме

$$Ae = p_1e + h_1p_1f, \quad h_1 \in \mathbb{R}.$$

Точно так же

$$Af = p_2e + h_2p_2f, \quad h_2 \in \mathbb{R},$$

так как вектор Af специален (для f компоненты суть $p = 0, q = 1$, так что $pq^{-1} \in \mathbb{R}$).

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $\rho \neq 0$ — вещественное число. Вектор $\xi = e + \rho f$ всегда специален (по лемме): для него $p = 1, q = \rho, h = m = \rho$ вещественно.

Образ этого специального вектора под действием псевдобикватернионного оператора,

$$A\xi = (p_1 + \rho p_2)e + (h_1p_1 + \rho h_2p_2)f,$$

должен (по следствию из леммы) тоже быть специальным. Обозначим кватернионные компоненты этого образа через

$$P = p_1 + \rho p_2, \quad Q = h_1p_1 + \rho h_2p_2.$$

По лемме условие специальости образа, т.е. вектора $A\xi = Pe + Qf$, состоит в соотношении $Q = PH = MP$, где $H = M(\rho)$ — вещественный числовой коэффициент. Иными словами, должно выполняться соотношение

$$h_1p_1 + \rho h_2p_2 = Mp_1 + M\rho p_2, \quad \text{где } M, h_1, h_2, \rho \in \mathbb{R},$$

означающее вещественную линейную зависимость между кватернионами p_1 и p_2 : $(h_1 - M)p_1 = \rho(M - h_2)p_2$.

Точнее, здесь представляются две возможности:

СЛУЧАЙ 1. Кватернионы p_1 и p_2 действительно $\mathbb{R}$ -линейно зависимы.

СЛУЧАЙ 2. $h_1 = h_2 = M$, так что зависимость вырождается. Во втором случае

$$Ae = p_1(e + hf), \quad Af = p_2(e + hf), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Значит, имеют место включения

$$A(\mathbb{H}e) \subset \mathbb{H}p_1(e + hf) \subset \mathbb{H}(e + hf), \quad A(\mathbb{H}f) \subset \mathbb{H}p_2(e + hf) \subset \mathbb{H}(e + hf).$$

Следовательно, в силу аддитивности оператора A

$$A(\mathbb{H}^2) = A(\mathbb{H}e + \mathbb{H}f) \subset \mathbb{H}(e + hf) \approx \mathbb{H}^1,$$

т.е. образ кватернионной плоскости $\mathbb{H}^2$ строго меньше самой этой плоскости, вопреки биективности оператора A .

Итак, второй случай для псевдобикватернионного оператора A встретиться не может, так что кватернионы p_1 и p_2 действительно $\mathbb{R}$ -линейно зависимы: $p_2 = \alpha p_1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$ (ни один из случаев $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$ представиться не может, так как $Ae = p_1(e + h_1f) \neq 0$, $Af = p_2(e + h_2f) \neq 0$ в силу биективности оператора A).

Условия псевдобикватернионности (слева) оператора A означают существование кватернионных коэффициентов $U = U(p)$ и $V = V(q)$ (таких, что $U(1) = 1$, $V(1) = 1$, откуда $U(\lambda \in \mathbb{R}) = V(\lambda) \equiv \lambda$), через которые действие оператора A выражается формулами

$$A(pe) = Up_1e + Uh_1p_1f, \quad A(qf) = Vp_2e + Vh_2p_2f.$$

При $\beta \neq 0$ кватернион U отличен от 0, а при $q \neq 0$ кватернион V отличен от 0, так как оператор A биективен: $Ae \neq 0$, $Af \neq 0$. Используя псевдобикватернионность слева еще раз, мы находим кватернионный коэффициент $W = W(r; p, q)$ (такой, что $W(1; p, q) = 1$, так что $W(\lambda \in \mathbb{R}; p, q) \equiv \lambda$), для которого при любом кватернионе r имеют место соотношения

$$\begin{aligned} A(rpe + rqf) &= W[(Up_1 + Vp_2)e + (Up_1h_1 + Vp_2h_2)f] \\ &= (U_r p_1 + V_r p_2)e + (U_r p_1 h_1 + V_r p_2 h_2)f, \end{aligned}$$

где $U_r = U(rp)$, $V_r = V(rq)$.

Для компонент векторов в правой части мы получаем (при $p_2 = \alpha p_1$) соотношения

$$[U_r + V_r \alpha]p_1 = W[U + V \alpha]p_1, \quad [U_r h_1 + V_r \alpha h_2]p_1 = W[U h_1 + V \alpha h_2]p_1.$$

Поскольку $p_1 \neq 0$, мы можем переписать эти соотношения в виде системы вещественных линейных уравнений

$$I + \alpha II = 0, \quad I h_1 + \alpha II h_2 = 0 \quad (*)$$

относительно кватернионов

$$I = U_r - WU, \quad II = V_r - WV.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$ и $h_2 \neq h_1$ (иначе это был бы разобранный выше невозможный «случай 2»), определитель вещественной системы уравнений (*) относительно кватернионов I и II отличен от нуля, так что $I = II = 0$:

$$U(rp) = W(r; p, q)U(p), \quad V(rq) = W(r; p, q)V(q). \quad (**)$$

Вспоминая, что $U(1) = 1$, мы заключаем, что $U(r) = W(r; 1, q)$, и аналогичным образом из $V(1) = 1$ следует, что $V(r) = W(r; p, 1)$. Кроме того, из (**) видно, что кватернион-коэффициент

$$W(r; p, q) \equiv U(rp)U^{-1}(p) \equiv V(rq)V^{-1}(q) \quad (\text{где } U(p) \neq 0, V(q) \neq 0)$$

не зависит, во-первых, от q и, во-вторых, от p , так что

$$W(r; p, q) = W(r; 1, 1) = U(r) = V(r).$$

Итак, соотношение (**) превращается в уравнения мультипликативности функций U и V :

$$U(rp) \equiv U(r)U(p), \quad V(rq) \equiv V(r)V(q).$$

Совпадение множителей W в обоих уравнениях (**) означает еще и совпадение этих двух мультипликативных функций:

$$U(r) \equiv W(r; 1, 1) \equiv V(r).$$

Поскольку эти функции аддитивны (в силу аддитивности оператора A : $U(p+r) \equiv U(p) + U(r)$), мы заключаем, что U — автоморфизм тела кватернионов. Согласно §1, существует кватернион $t \neq 0$, для которого $U(g) = tgt^{-1}$ для всякого кватерниона g (кватернион t — не обязательно комплексное число).

Возвращаясь к исходным формулам, определяющим U и V , мы видим, что оператор A действует так:

$$A(pe + qf) = (Up_1 + \alpha Vp_1)e + (h_1 Up_1 + h_2 \alpha Vp_1)f.$$

Итак, действие оператора A на пару кватернионов (p, q) представлено в виде произведения следующих трех операций:

1) вещественного невырожденного линейного оператора R ,

$$(p, q) \mapsto (p + \alpha q, h_1 p + h_2 \alpha q),$$

2) автоморфизма U_t (где t — любой ненулевой кватернион); он переводит каждый кватернион g в tgt^{-1} (автоморфизм можно применять до R или после — результат от порядка не зависит: $U_t R = R U_t$),

3) умножения T_{p_1} всех компонент вектора справа на постоянный ненулевой кватернион p_1 .

Каждая из этих операций является псевдобикватернионным оператором (для операции 3) при умножении компонент исходного вектора на r слева результат тоже умножается на r слева, а при умножении компонент исходного вектора на s справа компоненты результата умножаются справа на $p_1^{-1} s p_1$).

Третья операция, T_{p_1} , коммутирует с первой, а при ее коммутации с автоморфизмом U_t нужно, в зависимости от p_1 , менять t :

$$T_{U_t p_1} U_t = U_t T_{p_1}. \quad (T)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отсюда следует, что в качестве операции 3) достаточно добавить к 1) и 2) только умножение справа на i или на какой-нибудь другой фиксированный кватернион θ с квадратом -1 . Действительно, каждый кватернион p_1 с квадратом -1 можно получить из θ подходящим автоморфизмом U_t (а именно, достаточно взять $t = p_1 + \theta$; тогда $t\theta = (p_1 + \theta)\theta = p_1\theta - 1$, $p_1 t = p_1(p_1 + \theta) = -1 + p_1\theta$, так что $p_1 t = t\theta$ и $p_1 = t\theta t^{-1} = U_t \theta$).

Чтобы умножать на любой чисто мнимый кватернион p_1 , достаточно представить его в виде произведения модуля на аргумент, $p_1 = |p_1| \tilde{p}_1$. Тогда $\tilde{p}_1 \bar{\tilde{p}}_1 = 1$, и, поскольку $\tilde{p}_1$ чисто мним, то $\bar{\tilde{p}}_1 = -\tilde{p}_1$, так что $(\tilde{p}_1)^2 = -1$. В этом случае умножение на p_1 представлено как произведение умножения на вещественное число $|p_1|$ (что является операцией типа 1)) и умножения на чисто мнимый кватернион с квадратом -1 (каковое умножение по формуле (T) есть комбинация умножения на $\theta = i$ и подходящего автоморфизма, так как $p_1 = U_t \theta$).

Наконец, для умножения на произвольный кватернион p_1 его надо представить в виде суммы вещественной и чисто мнимой частей

$$p_1 = a + b, \quad T_{p_1} = T_a + T_b.$$

Оператор T_a умножения на вещественное число имеет тип 1), а оператор T_b умножения на чисто мнимый кватернион мы уже представили в виде комбинации оператора T_θ (например, T_i) и подходящих операций 1) и 2).

Таким образом, оператор T_{p_1} умножения справа на кватернион p_1 всегда представляется в виде комбинации оператора T_θ умножения на θ (например, для $\theta = i$), вещественных линейных операторов (1) и автоморфизмов U_t .

Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Понятия бикватернионности и псевдобикватернионности оператора в $\mathbb{H}^n$ зависят от выбора базиса, при помощи которого определялись компоненты вектора и его умножения на кватернион слева и справа.

При изменении базиса понятия левых и правых прямых меняются (лево-кватернионно-линейные операторы переводят левые прямые в левые, но правые становятся нелинейными, а право-кватернионно-линейные — наоборот, оставляют только правые прямые).

Если, однако, замена базиса вещественна, то левые прямые остаются левыми, правые — правыми, а псевдобикватернионные преобразования — псевдобикватернионными.

Действительно, лево-кватернионный оператор переводит левые прямые в левые. Полное кватернионное сопряжение делает левые прямые правыми, а вектор $\sum q_s e_s$ переводит в $\sum \bar{q}_s \bar{e}_s$.

Для вещественного базиса (над $\mathbb{H}$) $\bar{e}_s = e_s$, поэтому кватернионное сопряжение векторов, определенное при помощи любого вещественного базиса, одно и то же. Значит, одними и теми же будут и правые прямые (ведь это образы левых при одном и том же кватернионном сопряжении).

Поэтому, применяя теорему 6, мы можем выбрать вещественный (по отношению к исходному базису e, f) базис в $\mathbb{H}^2$ так, чтобы по возможности упростить матрицу входящего в описание псевдобикватернионного оператора A вещественного линейного оператора $\tilde{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, приведя ее к жордановой форме вещественным линейным преобразованием:

$$(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. В третьем случае мы получаем вещественный по отношению к e, f $\mathbb{H}$ -базис $(\tilde{e}, \tilde{f})$ в кватернионной плоскости $\mathbb{H}^2$, в котором наш псевдобикватернионный оператор A действует так:

$$A(\tilde{p}\tilde{e} + \tilde{q}\tilde{f}) = \tilde{P}\tilde{e} + \tilde{Q}\tilde{f}, \quad \tilde{P} = (t\tilde{p}t^{-1})\alpha + (t\tilde{q}t^{-1}), \quad \tilde{Q} = t\tilde{q}t^{-1},$$

где α — вещественное число, а t — ненулевой кватернион.

Настоящая работа возникла из попытки получить икосаэдр в качестве кватернионизации тетраэдра при кватернионизации групп Кокстера, подобной их комплексификации, обсуждавшейся в [1]. Кватернионизациями групп A_2 и A_3 должны бы быть группы симметрий правильного пятиугольника ($H_2 = I_2(5)$) и икосаэдра (H_3), но это в настоящей статье не доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Комплексификация тетраэдра и псевдопроективные преобразования. Функциональный анализ и его прил., **35**, вып. 4, 1–7 (2001).

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
14 сентября 2001 г.