Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Произведения Рисса, случайное блуждание и спектр, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 16–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:13:28

Произведения Рисса, случайное блуждание и спектр*

© 2002. Р. С. ИСМАГИЛОВ

Введение; произведения Рисса и вероятность

Произведение Рисса — это формальное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k \cos(c_k x + \alpha_k)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где числа $a_k \in [0, 1]$, $c_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ фиксированы. Если $c_{k+1}/c_k \geq 3$, $\sum_k a_k^2 = \infty$, то произведение (1) слабо сходится к неотрицательной сингулярной мере (см. [1, с. 219]). Существует связь между произведениями Рисса и случайными блужданиями. Чтобы объяснить ее, перепишем (1) в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} |\sqrt{p_k} + \sqrt{q_k} e^{i(c_k x + \alpha_k)}|^2, \quad (2)$$

где $p_k \geq 0$, $q_k \geq 0$, $p_k + q_k = 1$, $a_k = 2\sqrt{p_k q_k}$. Рассмотрим следующее случайное блуждание по $\mathbb{R}$: в момент времени $k = 1, 2, \dots$ блуждающая точка смещается на величину c_k с вероятностью q_k либо остается на месте с вероятностью p_k ; распределение начального положения точки эквивалентно мере Лебега. Группа $\mathbb{R}$ действует сдвигами на пространстве всех траекторий, а потому и на остаточной алгебре, т. е. алгебре множеств, измеримых относительно положения блуждающей точки в сколь угодно далеком будущем (точные определения и некоторые ссылки будут приведены в §2). Возникающую таким образом динамическую систему (для краткости пишем ДС) назовем *остаточной*. Оказывается, что последовательность α_k , $k = 1, 2, \dots$, порождает коцикл указанной ДС со значениями в группе $\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Эта ДС и ее коцикл обычным образом задают однопараметрическую группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Эта группа имеет простой спектр, а ее спектральный тип задается мерой, к которой сходится произведение Рисса (2). В этом и состоит связь произведений Рисса со случайными блужданиями.

Изложенное — весьма частный случай результатов из §3 этой статьи, относящихся к *разреженным* случайным блужданиям на топологической группе G . *Разреженность* означает, грубо говоря, что размеры скачков блуждающей точки в момент времени k весьма быстро растут при $k \rightarrow \infty$. Возникающая остаточная ДС и ее коцикл приводят к унитарному представлению группы G . Оно действует в пространстве вектор-функций, а скалярное произведение выражается через бесконечные операторные произведения; мы назвали их операторными произведениями Рисса (в простейшем случае это произведения вида (2)). Они изучаются в §1 и используются в §4 для изучения спектра представления группы $G = \mathbb{R}^N$,

*Работа поддержана РФФИ, грант 01-01-00490.

порожденного остаточной ДС и ее коциклом; содержательные выводы о природе спектра удастся сделать при случайном выборе коцикла. Наконец, в §5 рассмотрены некоторые некоммутативные группы (например, $G = SL(2, \mathbb{R})$).

Эта работа имеет точки соприкосновения с работой автора [2] о спектре действия Макки и произведениях Рисса; однако данная статья не требует обращения к работе [2].

Заметим, что для разреженного случайного блуждания остаточная алгебра всегда нетривиальна (т. е. не сводится лишь к множествам меры 0 либо 1). Критерий тривиальности остаточной алгебры произвольного (неоднородного) случайного блуждания получен в [3]. Для упомянутого выше случайного блуждания по $\mathbb{R}$ этот критерий использует произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (p_k + q_k e^{i c_k x})$$

(внешне оно похоже на (2)). Остаточная алгебра тривиальна тогда и только тогда, когда для любого $m \geq 1$ и любого отрезка, не содержащего нуля, кусок этого произведения от $k = m$ до $k = n$ стремится к нулю (при $n \rightarrow \infty$) в локальной винеровской норме. (Точные формулировки содержатся в [3].)

При исследовании спектра сдвига в марковских компактах появлялись произведения Рисса весьма специального вида (см. обзор [4] и статью [5]). Автор не видит какой-либо связи между этими статьями и результатами данной работы.

Несколько обозначений. Если V — метрическое, а K — гильбертово пространство, то $C(V, K)$ — это пространство непрерывных вектор-функций $f: V \rightarrow K$, а $C_0(V, K)$ — пространство вектор-функций с компактным носителем. Если (X, τ) — пространство с мерой, то $L_2(X, \tau; K)$ — обычное гильбертово пространство измеримых вектор-функций. При $K = \mathbb{C}$ мы пишем просто $C(V)$ и т. д. Через $L(K)$ и $U(K)$ обозначаем алгебру ограниченных линейных операторов и соответственно группу унитарных операторов пространства K . Наконец, используются обозначения $\prod_{k=m \rightarrow}^n g_k$ и $\prod_{\leftarrow k=m}^n g_k$ для произведений $g_m \cdots g_n$ и $g_n \cdots g_m$, $m < n$.

§1. Операторные произведения Рисса

Пусть K — конечномерное комплексное гильбертово пространство. Для чисел $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, и оператора $u \in U(K)$ положим $s(p, q, u) = \sqrt{p} I + \sqrt{q} u$. В этом разделе мы изучим (формальные) произведения вида

$$\prod_{k=1 \rightarrow}^{\infty} s(p_k, q_k, u_k^*) \prod_{\leftarrow k=1}^{\infty} s(p_k, q_k, u_k), \quad u_k \in U(K); \quad (3)$$

здесь p_k, q_k фиксированы, $p_k + q_k = 1$, $p_k \geq 0$, $q_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Назовем (3) *операторным* произведением Рисса и рассмотрим его при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k q_k = \infty. \quad (4)$$

Мы покажем, что оно сходится к неотрицательной мере со значениями в алгебре $L(K)$, и изучим свойства этой меры. В дальнейшем это будет применено для изучения спектра остаточной ДС, связанной с разреженным случайным блужданием.

1.1. Мера σ и гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma; K)$. Начнем с известных понятий. Пусть T — локально-компактное метрическое пространство и σ — неотрицательная борелевская мера на T со значениями в $L(K)$. Для любых $a, b \in K$ определена числовая мера $(\sigma a, b)$, неотрицательная при $a = b$. Для вектор-функций $f_i \in C_0(T, K)$, $i = 1, 2$, определим скалярное произведение $\int_T (\sigma(dt) f_1(t), f_2(t))$. Гильбертово пространство, полученное пополнением, обозначим через $\mathcal{L}_2(T, \sigma; K)$.

Обратимся к произведению (3). Пусть du — (вероятностная) мера Хаара на $U(K)$. Обозначим через Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, пространство всех наборов $\omega_n = (u_1, \dots, u_n)$ и через Ω пространство всех последовательностей $\omega = (u_1, u_2, \dots)$, $u_k \in U(K)$. На этих пространствах введем меры $d\omega_n = du_1 \times \dots \times du_n$, $d\omega = du_1 \times du_2 \times \dots$ и естественную топологию. Имеем естественную проекцию $\Omega \rightarrow \Omega_n$; пользуясь ею, условимся отождествлять функцию от ω_n с функцией от ω , зависящей только от ω_n . Взяв в двух бесконечных произведениях из (3) лишь сомножители с номерами $k = 1, \dots, n$, получаем функции $r_n(\omega_n)$, $\omega_n = (u_1, \dots, u_n) \in \Omega_n$, со значениями в $L(K)$. Легко проверяются равенства

$$r_n(\omega_n) = r_{n-1}(\omega_{n-1}) + \sqrt{p_n q_n} \prod_{k=1}^{n-1} s(p_k, q_k, u_k^*)(u_n + u_n^*) \prod_{k=1}^{n-1} s(p_k, q_k, u_k), \quad (5)$$

$$\int_{U(K)} r_n(u_1, \dots, u_n) du_n = r_{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}). \quad (6)$$

Таким образом, если функция $f \in C(\Omega)$ зависит только от ω_m , то при $n \geq m$ интеграл

$$\int_{\Omega} f(\omega) r_n(\omega_n) d\omega = \int_{\Omega_n} f(\omega_m) d\omega_n$$

не зависит от n . Отсюда вытекает, что последовательность операторных мер $r_n(\omega_n) d\omega$ слабо сходится к неотрицательной мере со значениями в $L(K)$; обозначим этот предел через σ . Как пояснялось выше, он позволяет определить гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma; K)$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma; K)$ будут обозначаться через $(\ , \)_{\sigma}$ и $\| \ \|_{\sigma}$, а скалярное произведение и норма в обычном пространстве $L_2(\Omega)$ (построенном по мере $d\omega$) — через $(\ , \)_{L_2}$, $\| \ \|_{L_2}$. Скалярное произведение и норму в K обозначим через $(\ , \)$ и $\| \ \|$.

1.2. Основная теорема об операторных произведениях Рисса. Отныне предполагается, что $p_k \neq 1/2$, $k = 1, 2, \dots$; тогда операторы $s(p_k, q_k, u)$ обратимы. Легко обойтись без этого ограничения, но оно несколько сокращает изложение. Ниже мы называем функцию f , зависящую от $\omega = (u_1, u_2, \dots)$ и от векторов $a_i \in K$, $i = 1, 2, \dots$, *полиномиальной (рациональной)*, если она является многочленом (рациональной функцией) от матричных элементов операторов u_i , $i \leq N$, координат векторов a_i , $i \leq N$ (в некотором ортонормированном базисе пространства K), и от величин, комплексно-сопряженных к указанным (для некоторого $N < \infty$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (4). Тогда

1) для любых $a, b \in K$, $b \neq 0$, существуют такие полиномиальные функции $\phi_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\|a - \phi_k b\|_{\sigma} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \quad (7)$$

2) существуют такие полиномиальные функции $\psi_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\|(1 - \psi_k)a\|_\sigma \rightarrow 0, \quad \|\psi_k\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (8)$$

для любого вектора $a \in K$.

Из первого утверждения теоремы следует, что умножения на функции из $C(\Omega)$ образуют алгебру операторов в $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma; K)$, имеющую простой спектр (обладающую порождающим вектором). Из второго утверждения следует сингулярность спектра указанной алгебры относительно меры $d\omega$ на пространстве Ω . Для доказательства этого второго утверждения мы использовали идею, впервые примененную в [8] в случае обычного (скалярного) произведения Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ЛЕММА 1. Положим $s(u) = s(p, q, u)$. Существует такая полиномиальная функция $\phi(a, b, u)$, $a, b \in K$, $u \in U(K)$, что

$$\int_{U(K)} \|s(u)(a - \phi(a, b, u)b)\|^2 du < \left(1 - \frac{pq}{\dim K}\right) \|a - b\|^2. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Достаточно найти рациональную функцию со свойством (9), ибо ее можно аппроксимировать полиномиальной с тем же свойством. Для фиксированных $a, b \neq 0$, $u \in U(K)$ минимум функции $\|s(u)(a - tb)\|$ по переменной t достигается при

$$t = \frac{(s(u)a, s(u)b)}{(s(u)b, s(u)b)} = \phi(a, b, u).$$

Покажем, что рациональная функция $\phi(a, b, u)$ удовлетворяет неравенству (9). Легкий подсчет приводит к равенству

$$\begin{aligned} \int_{U(K)} \|s(u)(a - \phi(a, b, u)b)\|^2 du &= \|a\|^2 - \Delta(a, b), \\ \Delta(a, b) &= \int_{U(K)} \frac{|(s(u)a, s(u)b)|^2}{(s(u)b, s(u)b)} du. \end{aligned}$$

Ясно, что функция $\Delta(a, b)$ инвариантна относительно замен $a \mapsto va$, $b \mapsto vb$, $v \in U(K)$. Пользуясь этим, легко выразить эту функцию через $\Delta(e_1, e_2)$, где e_1, e_2 — ортонормированная пара векторов из K . В результате приходим к равенству

$$\int_{U(K)} \|s(u)(a - \phi(a, b, u)b)\|^2 du = (1 - \Delta(e_1, e_2)) \left(\|a\|^2 - \frac{|(a, b)|^2}{(b, b)} \right).$$

Оценим сверху правую часть этого равенства. Второй сомножитель очевидным образом не превосходит величины $\|a - b\|^2$. Далее, $(s(u)e_1, s(u)e_2) = \|s(u)e_2\|^2 \leq (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 < 2$, откуда

$$\begin{aligned} \Delta(e_1, e_2) &= \int_{U(K)} \frac{|(s(u)e_1, s(u)e_2)|^2}{(s(u)e_2, s(u)e_2)} du > \frac{1}{2} \int_{U(K)} |(s(u)e_1, s(u)e_2)|^2 du \\ &= \frac{pq}{2} \int_{U(K)} |(e_1, ue_2) + (ue_1, e_2)|^2 du = \frac{pq}{\dim K}. \end{aligned}$$

Из этого вытекает неравенство (9). Лемма доказана.

В следующей лемме мы полагаем $s_k(u) = s(p_k, q_k, u)$.

ЛЕММА 2. Для любого $m = 1, 2, \dots$ существует такая рациональная функция $\phi_m(a, b, \omega_m)$, $a, b \in K$, $\omega_m \in \Omega_m$, что для всех $n \geq m$ выполняются неравенства

$$\int_{\Omega_n} \left\| \prod_{\leftarrow k=1}^m s_k(u_k)(a - \phi_m(a, b, \omega_m)b) \right\|^2 d\omega_n < \|a - b\|^2 \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{p_k q_k}{\dim K}\right). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Из формулы (6) следует, что написанный интеграл не зависит от n при $n \geq m$; поэтому можно взять $m = n$. Применяем индукцию по m . При $m = 1$ неравенство (10) сводится к (9). Предположим, что для числа $m - 1$ искомой функцией является $\phi_{m-1}(a, b, \omega_{m-1})$, $\omega_{m-1} = (u_1, \dots, u_{m-1})$. Положим

$$a' = \prod_{\leftarrow k=1}^{m-1} s_k(u_k)a, \quad b' = \phi_{m-1}(a, b, \omega_{m-1}) \prod_{\leftarrow k=1}^{m-1} s_k(u_k)b.$$

По лемме 1 для фиксированной точки ω_{m-1} выполнено неравенство (9) с заменой векторов a, b на a', b' и чисел p, q на p_m, q_m . Проинтегрировав обе части этого неравенства по ω_{m-1} , получаем неравенство (10). Лемма доказана.

Из условия (4) вытекает, что правая часть неравенства (10) стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Этим доказано первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение.

ЛЕММА 3. Положим $h_k = \sqrt{p_k q_k} / \dim K$. Справедливы равенства

$$\int_{\Omega_n} (Tr u_k - h_k)(\overline{Tr u_l} - h_l) r_n(\omega_n) d\omega_n = 0, \quad k \neq l, \quad k \leq n, \quad l \leq n,$$

$$\int_{\Omega_n} |Tr u_k - h_k|^2 r_n(\omega_n) d\omega_n = (1 - h_k^2) I, \quad k \leq n.$$

Это следует из формулы (6) и соотношений ортогональности для интегралов от матричных элементов по группе $U(K)$.

Из равенства (4) вытекает, что существуют положительные числа c_k , $k = 1, \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k = \infty. \quad (11)$$

Введем функции

$$\psi_k(\omega_k) = \frac{\sum_{j=1}^k c_j Tr u_j}{\sum_{j=1}^k c_j h_j}, \quad \omega_k = (u_1, \dots, u_k) \in \Omega_k.$$

Из леммы 3 вытекает, что

$$\int_{\Omega_n} |1 - \psi_k(\omega_k)|^2 r_n(\omega_n) d\omega_n = \frac{\sum_{j=1}^k (1 - h_j^2) c_j^2}{(\sum_{j=1}^k c_j h_j)^2} I,$$

$$\int_{\Omega_n} |\psi_k(\omega_k)|^2 d\omega_n = \frac{\sum_{j=1}^k c_j^2}{(\sum_{j=1}^k c_j h_j)^2}, \quad n \geq k.$$

Из условий (11) видно, что правые части в этих формулах стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, $n \geq k$. Интегрирование по Ω_n можно заменить интегрированием по Ω (в силу формулы (6)). Второе утверждение теоремы доказано.

§ 2. Сводка известных сведений (динамические системы, представления, случайные блуждания)

Настоящий раздел не содержит новых результатов; это — набор сведений об указанных в заголовке вещах. Разумеется, каждая из этих тем есть предмет обширной теории, а соответствующая литература необозрима (мы ограничились одной-двумя ссылками). Мы отобрали лишь те сведения, которые используются далее. Для дальнейшего важна явная реализация представлений, порожденных динамическими системами на конфигурациях, приведенная в разд. 2.3.

2.1. Динамические системы, коциклы, представления [6, 9]. Всюду в этой работе G — локально компактная метризуемая группа с двусторонне инвариантной мерой dg . ДС мы записываем в виде (G, X, τ) , где (X, τ) — пространство с σ -конечной мерой, заданной на σ -алгебре $\mathcal{B}$. Если X — метрическое пространство, то мера τ борелевская. Действие $x \mapsto xg$, $x \in X$, $g \in G$, оставляет меру квазиинвариантной и является слабо непрерывным. Если A — топологическая группа, то коцикл — это отображение $a: G \times X \bmod 0 \rightarrow A$, измеримое по x , слабо непрерывное по g и такое, что $a(g_1 g_2, x) = a(g_1, x) a(g_2, x g_1)$, $g_1, g_2 \in G$, $x \in X \bmod 0$.

Если K — гильбертово пространство и $a(\cdot, \cdot)$ — коцикл со значениями в группе $U(K)$, то в пространстве $L_2(X, \tau; K)$ возникает унитарное представление

$$(T(g)f)(x) = \sqrt{\dot{\tau}(g, x)} a(g, x) f(xg), \quad f \in L_2(X, \tau; K), \quad \dot{\tau}(g, x) = \frac{\tau(d(xg))}{\tau(dx)}. \quad (12)$$

(Последняя функция — это коцикл Радона–Никодима.)

2.2. ДС на пространстве конфигураций; коциклы. Рассмотрим ДС (G, V, α) , где (V, ρ) — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, действие $v \mapsto vg$ непрерывно (по g и v), а мера α инвариантна. Пусть на V дано G -инвариантное отношение эквивалентности, записываемое в виде $u \sim v$. Пусть X — множество классов эквивалентных точек и $p: V \rightarrow X$ — каноническая проекция. Предположим, что каждый класс есть счетное дискретное множество; назовем такие множества *конфигурациями*. Итак, V разбито на конфигурации. Возьмем непрерывную положительную функцию $\psi(v)$, $v \in V$, $\int_V \psi(v) \alpha(dv) = 1$. Вероятностная мера $\psi(v) \alpha(dv)$ переводится отображением $p: V \rightarrow X$ в меру τ на X (это стандартная конструкция индуцированной меры). Возникает ДС вида (G, X, τ) . Наложим на указанное отношение эквивалентности следующие ограничения:

А) Существует такое $h > 0$, что если $u_1 \sim u_2$, $u_1 \neq u_2$, то $\rho(u_1, u_2) \geq h$.

В) Если $u_1 \sim u_2$, то существуют такие окрестности $B_i \ni u_i$, $i = 1, 2$, (зависящие от u_1, u_2) и такой гомеоморфизм $f: B_1 \rightarrow B_2$, что $w \sim f(w)$ при $w \in B_1$. Для любого компакта $V_0 \subset V$ существует такое число $l > 0$, что если $u_i \in V_0$, то указанная окрестность B_i содержит шар $\{v: \rho(v, u_i) < l\}$, $i = 1, 2$.

С) Указанное отображение $f: B_1 \rightarrow B_2$ переводит меру α в меру на множестве B_2 , эквивалентную мере α и имеющую непрерывную положительную плотность по α .

Введем на X топологию факторпространства. Из условий А), В) следует, что проекция $p: V \rightarrow X$ гомеоморфно отображает любой шар диаметра $< h$ на его образ и эти образы дают базис топологии в X и базис σ -алгебры, на которой определена мера τ ; проекция $p: V \rightarrow X$ допускает борелевское сечение, и пространство X хаусдорфово.

Коциклом нашего разбиения (со значениями в группе A) назовем борелевское отображение $(u, v) \mapsto b(u, v) \in A$, $u \sim v$, такое, что $b(u, v)b(v, w) = b(u, w)$ для всех $u \sim v \sim w$. Из указанных ограничений следует, что любой коцикл тривиален, т. е. $b(u, v) = b_0(u)(b_0(v))^{-1}$ для некоторого борелевского отображения $b_0: V \rightarrow A$.

Установим важное для дальнейшего соответствие между G -инвариантными коциклами разбиения (G -инвариантность означает, что $b(u, v) = b(ug, vg)$, $g \in G$, $u \sim v$) и коциклами для (G, X, τ) . Возьмем G -инвариантный коцикл $b(u, v)$, $u \sim v$; таким образом, $b(u, v) = b_0(u)(b_0(v))^{-1} = b_0(ug)(b_0(vg))^{-1}$. Видно, что отображение $v \mapsto (b_0(v))^{-1}b_0(vg)$ постоянно на каждой конфигурации. Но тогда его можно представить в виде $a(g, x)$, $x \in X$, $p(v) = x$. Очевидно, что получился коцикл для (G, X, τ) . Условимся называть G -инвариантный коцикл разбиения и построенный по нему коцикл для (G, X, τ) *родственными*. Итак, родственные коциклы связаны соотношениями

$$b(u, v) = b_0(u)(b_0(v))^{-1}, \quad u \sim v, \quad a(g, x) = (b_0(v))^{-1}b_0(vg), \quad v \in x. \quad (13)$$

Приведем важный для дальнейшего пример коцикла. С этой целью обратимся к условию С) и для указанных в нем шаров B_1, B_2 определим функцию $r(u, v)$, где $u \in B_1, v \in B_2, u \sim v$, как плотность $\alpha(dv)/\alpha(du)$. Эти функции, заданные локально, дают непрерывную положительную функцию $r(u, v)$, $u \sim v \in V$, — коцикл Радона–Никодима нашего разбиения. Подчиним указанную выше функцию ψ дополнительному ограничению

$$\sum_{v \in p(u)} r(u, v)\psi(v) = r_0(u) < \infty. \quad (14)$$

(Существование такой функции следует из тривиальности коцикла Радона–Никодима.) Легко проверяются равенства

$$\int_X \left(\sum_{v \in x} f(v) \right) \tau(dx) = \int_V f(w) r_0(w) \alpha(dw), \quad f \in C_0(V), \quad (15)$$

$$r(u, v) = \frac{r_0(u)}{r_0(v)}, \quad u \sim v, \quad \dot{\tau}(g, x) = \frac{r_0(vg)}{r_0(v)}, \quad v \in x. \quad (16)$$

Из (16) следует, что коцикл Радона–Никодима нашего разбиения и коцикл указанной ДС родственны.

2.3. Представление группы G , связанное с ДС на конфигурациях. Пусть K — гильбертово пространство. Возьмем G -инвариантный коцикл $b(u, v)$, $u \sim v$, нашего разбиения со значениями в $U(K)$ и родственный коцикл $a(g, x)$ для ДС (G, X, τ) . Они связаны соотношениями (16). Рассмотрим представление T группы G , заданное формулой (12). Наша цель — реализовать его в пространстве $C_0(V, K)$. Для этого рассмотрим представление

$$S(g)f(v) = f(vg), \quad f \in C_0(V, K), \quad g \in G, \quad (17)$$

и введем форму

$$(f_1, f_2) = \int_V \left(\sum_{v \in p(u)} \sqrt{r(u, v)} (b(u, v) f_1(v), f_2(u)) \right) \alpha(du). \quad (18)$$

Зададим также отображение $N: C_0(V, K) \rightarrow L_2(X, \tau; K)$ формулой

$$Nf(x) = \sum_{v \in x} (r_0(v))^{-1/2} (b_0(v))^{-1} f(v), \quad v \in x.$$

Тогда, используя формулы (15)–(17), приходим к следующим выводам. Форма (18) неотрицательна, а потому порождает гильбертово пространство $H(V, K)$; операторы (17) продолжаются до унитарного представления S в $H(V, K)$; замыкание отображения N есть изоморфизм гильбертовых пространств, сплетающий представления S и T . Итак, $S \sim T$. Именно представление S используется в дальнейшем.

2.4. Разреженное случайное блуждание на группе G ; остаточная ДС и ее коциклы. Сейчас мы рассмотрим основной пример конструкции из разд. 1.2, 1.3. Пусть топология на группе G задана левоинвариантной метрикой $\delta(g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Возьмем конечные множества $Y_k \subset G$ (с дискретной топологией), вероятностные меры μ_k на Y_k , $k = 1, 2, \dots$, и рассмотрим пространство $V = G \times Y_1 \times \dots$; его элементы записываем в виде $v = (g_0, y_1, \dots)$. Снабдим его тихоновской топологией (она метризуема) и мерой $\alpha = dg_0 \times \mu_1 \times \dots$. Заменяя здесь dg вероятностной мерой $\mu_0 \sim dg$, получаем случайное блуждание на G ; положение блуждающей точки в момент $n = 1, 2, \dots$ определяется как случайный элемент $h_n(v) = g_0 \prod_{k=1}^n y_k$. Действие $v \mapsto vg$, $v = (g_0, y_1, \dots)$, $vg = (g^{-1}g_0, y_1, \dots)$, сохраняет меру α . Мы получили ДС вида (G, V, α) .

Введем остаточную ДС случайного блуждания. Две последовательности $v^{(i)} = (g_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots) \in V$, $i = 1, 2$, назовем эквивалентными, если $g_0^{(1)} y_1^{(1)} \dots y_k^{(1)} = g_0^{(2)} y_1^{(2)} \dots y_k^{(2)}$ для достаточно больших k ; множество классов эквивалентных последовательностей обозначим через X . Мы пришли к ситуации, описанной в начале разд. 2.2. Полученную таким образом ДС (G, X, τ) естественно назвать *остаточной* (здесь τ — индуцированная мера).

Приведенное определение есть один из вариантов определения остаточной (хвостовой) алгебры случайного блуждания. Этой теме (ее зародыш — это закон нуля–единицы, принадлежащий А. Н. Колмогорову) посвящена обширная литература; ограничимся ссылкой на старую работу [7]. Заметим, что в литературе (в частности, в [7]) рассматривается однородное блуждание. В нашем же случае содержатся только неоднородный случай; к этому же случаю относится упомянутая во введении работа автора [3] о критерии тривиальности остаточной алгебры.

Введем основное ограничение на рассматриваемое случайное блуждание. Потребуем, чтобы все элементы вида

$$\prod_{k=1}^n y_k \prod_{\leftarrow k=1}^n (y'_k)^{-1}, \quad y_n \neq y'_n, \quad (19)$$

были отличны от нейтрального элемента $e \in G$ и выполнялось условие

$$\prod_{k=1}^n y_k \prod_{\leftarrow k=1}^n (y'_k)^{-1} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любых } y_k, y'_k \in Y_k, y_n \neq y'_n. \quad (20)$$

(Запись $g_n \rightarrow \infty$ означает, что $\delta(e, g_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.)

Случайное блуждание с этим свойством назовем *разреженным*; всюду в этом параграфе предполагается, что это свойство имеет место.

Мы опускаем несложную проверку того, что ДС (G, V, α) с описанным отношением эквивалентности на V удовлетворяет условиям А), В), С) из разд. 2.2, и выпишем только функцию $r(u, v)$, $u \sim v$, приведенную в условии С) из разд. 2.2:

$$r(u, v) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(y'_k)}{\mu_k(y_k)}, \quad u = (g_0, y_1, \dots), \quad v = (g'_0, y'_1, \dots), \quad u \sim v.$$

Итак, ДС (G, V, α) и полученная из нее ДС (G, X, τ) удовлетворяют всем условиям из разд. 2.2. Остается, также следуя разд. 2.2, рассмотреть коциклы. Сейчас мы опишем некоторые (простейшие) из них, принимающие значения в унитарной группе $U(K)$, где K — конечномерное гильбертово пространство (этого достаточно для дальнейшего).

Возьмем любые отображения $B_k: Y_k \rightarrow U(K)$, $k = 1, 2, \dots$. Отображение $b(u, v) = \prod_{k=1}^n B_k(y_k) \prod_{k=n+1}^{\infty} (B_k(y'_k))^{-1}$, где $u = (g_0, y_1, \dots)$, $v = (g'_0, y'_1, \dots)$, $u \sim v$, $y_k = y'_k$ при $k > n$, очевидным образом есть коцикл данного разбиения. Родственный (согласно терминологии из разд. 2.2) коцикл для (G, X, τ) назовем *элементарным*.

§3. Унитарные представления группы, порожденные остаточной ДС разреженного случайного блуждания; реализация посредством произведений Рисса

3.1. Первая реализация представлений. Пусть K — конечномерное комплексное гильбертово пространство. Используя элементарный коцикл, построенный в разд. 2.4, построим унитарное представление, действующее в гильбертовом пространстве $L_2(X, \tau; K)$ по формуле (12) из разд. 2.1. Однако удобнее эквивалентное представление S , заданное формулами (17), (18). Перепишем для нашего случая формулы для скалярного произведения в $C_0(V, K)$. Достаточно сделать это для подпространства $C_0^m(V, K)$, состоящего из функций вида $u(g_0, y_1, \dots, y_m)$. Это требует простых (но громоздких) выкладок; приведем только окончательный результат. Определим отображения $A_m: C_0^m(V, K) \rightarrow C_0(G, K)$, $L_k, L_{mn}: C_0(G, K) \rightarrow C_0(G, K)$ формулами

$$(A_m u)(g) = \sum_{y_1, \dots, y_m} \sqrt{\prod_{k=1}^m \mu_k(y_k)} \prod_{k=1}^m B_k(y_k) u\left(g \prod_{k=1}^m y_k^{-1}, y_1, \dots, y_m\right),$$

$$(L_k v)(g) = \sum_{y_k} \sqrt{\mu_k(y_k)} B_k(y_k) v(g y_k^{-1}), \quad L_{mn} = \prod_{k=m+1}^n L_k^* \prod_{k=m+1}^n L_k, \quad m < n.$$

(Здесь L_k^* — оператор, сопряженный к L_k в $L_2(G, K)$.) Введем в $C_0(G, K)$ скалярное произведение

$$(v_1, v_2)_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G (L_{mn} v_1(g), v_2(g)) dg \quad (21)$$

(в силу условия (20) интеграл не зависит от n при больших n). Тогда мы

приходим к следующему выражению для скалярных произведений функций из $C_0^m(V, K)$:

$$(u_1, u_2) = (A_m u_1, A_m u_2)_m, \quad u_i \in C_0^m(V, K), \quad i = 1, 2.$$

Выведем из этих формул новую реализацию представлений T, S . Для этого обозначим через H_m гильбертово пространство, полученное из пространства $C_0(G, K)$ со скалярным произведением (21). Имеем изометрические вложения $H_m \rightarrow H_{m+1}$, полученные замыканием отображений L_m . Пусть H_∞ — индуктивный предел цепочки $H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \dots$. Операторы $f(h) \mapsto f(g^{-1}h)$ продолжаются до унитарного представления группы G в H_∞ . Оно эквивалентно представлениям T, S .

3.2. Переход к преобразованию Фурье; появление произведений Рисса.

Пусть $\widehat{G}$ — двойственное пространство. Пусть на $\widehat{G}$ фиксировано поле гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\zeta$ с заданными в них неприводимыми унитарными представлениями π_ζ группы G (π_ζ — это представитель класса ζ). Обозначим через $\widehat{C}_0(\widehat{G})$ пространство преобразований Фурье $\widehat{f}(\zeta)$ функций $f \in C_0(G)$. Предположим, что $\widehat{f}(\zeta)$, $\zeta \in \widehat{G}$, — оператор Гильберта–Шмидта и справедливо равенство Планшереля с мерой $d\zeta$ на $\widehat{G}$. Введем скалярное произведение $(A, B) = \text{Tr}(AB^*)$ в пространстве $J_2(\mathcal{H}_\zeta)$ операторов Гильберта–Шмидта, а также естественное скалярное произведение в $K \otimes J_2(\mathcal{H}_\zeta)$ вида $(k_1 \otimes A_1, k_2 \otimes A_2) = (k_1, k_2)(A_1, A_2)$. Операторы из $L(\mathcal{H}_\zeta)$ действуют умножениями справа на пространстве $J_2(\mathcal{H}_\zeta)$, а потому и на пространстве $K \otimes J_2(\mathcal{H}_\zeta)$. На этом пространстве также естественно действуют операторы из $L(K)$. Рассмотрим линейное пространство $K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G})$. На нем определим операторы

$$S_k(\zeta) = \sum_{y_k} \sqrt{\mu_k(y_k)} B_k(y_k) \otimes \pi_\zeta(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, \zeta \in \widehat{G}.$$

Для любых $m < n$ положим

$$R_{mn}(\zeta) = \prod_{k=m+1 \rightarrow}^n (S_k(\zeta))^* \prod_{\leftarrow k=m+1}^n S_k(\zeta), \quad \zeta \in \widehat{G}. \quad (22)$$

Это куски формального произведения

$$\prod_{k=1 \rightarrow}^{\infty} (S_k(\zeta))^* \prod_{\leftarrow k=1}^{\infty} S_k(\zeta), \quad (23)$$

которое обобщает произведения Рисса. В приведенных ниже теоремах 2, 3 устанавливается связь операторов R_{mn} с представлением, порожденным остаточной ДС и ее элементарным коциклом.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $\phi_k \in K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G})$, $k = 1, 2$, существует конечный предел

$$(\phi_1, \phi_2)_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\widehat{G}} (\phi_1(\zeta) R_{mn}(\zeta), \phi_2(\zeta)) d\zeta, \quad \phi_1, \phi_2 \in K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G}). \quad (24)$$

Более того, интеграл в этой формуле не зависит от n для достаточно больших n .

Мы получили в $K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G})$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_m$. Обозначим через $\mathcal{H}_m$ пополнение пространства $K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G})$ по соответствующей гильбертовой норме. Отображения $\phi(\zeta) \mapsto S_m(\zeta)\phi(\zeta)$, $\phi \in K \otimes \widehat{C}_0(\widehat{G})$, продолжаются до изометрических вложений $\mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_{m+1}$. Пусть $\mathcal{H}(\widehat{G}, K)$ — индуктивный предел полученной цепочки гильбертовых пространств. Операторы $\phi(\zeta) \rightarrow \pi_\zeta(g)\phi(\zeta)$, $g \in G$, продолжаются до унитарного представления $g \rightarrow \mathcal{T}(g)$, $g \in G$, в пространстве $\mathcal{H}(\widehat{G}, K)$.

ТЕОРЕМА 3. *Представления T и $\mathcal{T}$ унитарно эквивалентны.*

Для доказательства теорем 2, 3 достаточно совершить преобразование Фурье в той реализации представлений, которую мы описали в разд. 3.1.

§4. Разреженное случайное блуждание на $\mathbb{R}^N$; спектр остаточной ДС при случайном выборе коцикла

Вернемся к случайным блужданиям из разд. 2.4, взяв в качестве G аддитивную группу $\mathbb{R}^N$. Ограничимся следующим простым случаем: в момент времени k блуждающая точка остается на месте с вероятностью p_k и смещается на вектор y_k с вероятностью q_k . Нам понадобится следующее условие разреженности (оно сильнее, чем (20)):

$$|y_k| \geq q|y_{k-1}|, \quad k = 2, 3, \dots, \text{ для некоторого } q > 2. \quad (25)$$

Рассмотрим остаточную ДС и введем для нее элементарный коцикл, как объяснялось в разд. 2.4. Напомним, что для этого достаточно задать родственный коцикл при помощи отображений $B_k: \{0, y_k\} \rightarrow U(K)$. Положим $B_k(0) = I$, $B_k(y_k) = u_k$. Таким образом, коцикл задается последовательностью $\omega = \{u_k\} \in \Omega$. (Здесь использовано обозначение из разд. 1.1.) Следуя конструкции из разд. 3.2, получаем унитарное представление группы $\mathbb{R}^N$. Для почти всех (по мере $d\omega$) последовательностей $\omega \in \Omega$ мы построим другую, более простую реализацию указанного представления. Это приведет к описанию спектра представления.

4.1. Мера σ^ω и пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$. Введем в пространстве Ω преобразования $\omega \mapsto x \cdot \omega$, $\omega = (u_1, u_2, \dots)$, $x \cdot \omega = (u'_1, u'_2, \dots)$, $u'_k = e^{i\langle x, y_k \rangle} u_k$. В пространстве Ω_n эти преобразования вводятся так же. Произведение (23) обретает вид $\prod_{k=1}^\infty (\sqrt{p_k} I + \sqrt{q_k} e^{-ixy_k} u_k^*) \prod_{k=1}^\infty (\sqrt{p_k} I + \sqrt{q_k} e^{ixy_k} u_k)$. Оно получается из операторного произведения Рисса (3) заменой $\omega \mapsto x \cdot \omega$, а произведение (22) (мы рассмотрим его только при $m = 0$) имеет вид $r_n(x \cdot \omega_n)$, где $r_n(\omega_n)$ определено в разд. 2.1.

В следующей лемме $S(\mathbb{R}^N)$ означает пространство Шварца, а $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u .

ЛЕММА 4. *Для любого $\omega = (u_1, u_2, \dots) \in \Omega$ существует неотрицательная мера σ^ω (со значениями в $L(K)$) со следующими свойствами:*

- 1) σ^ω — мера степенного роста (т.е. любая функция $u \in S(\mathbb{R}^N)$ суммируема по мере $(\sigma^\omega b, b)$ для любого $b \in K$);
- 2) выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) r_n(x \cdot \omega_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \sigma^\omega(dx), \quad n \rightarrow \infty, \quad u \in S(\mathbb{R}^N).$$

Если функция $\hat{u}$ имеет компактный носитель, то выписанные интегралы совпадают при $n > n_0$, где n_0 зависит от носителя функции $\hat{u}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через δ_n первый из выписанных интегралов. Из (5) видно, что $\delta_n - \delta_{n-1}$ есть сумма величин $\hat{u}(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n)$, где $\alpha_k = -1, 0, 1$ при $1 \leq k \leq n-1$, $\alpha_n = -1, 1$, умноженных на унитарные операторы и на произведения некоторых из чисел $\sqrt{p_i}$, $\sqrt{q_i}$; сумма этих числовых произведений не превосходит величины $\prod_{j=1}^n (\sqrt{p_j} + \sqrt{q_j})^2 \leq 2^n$. Из неравенства (25) следует, что $|\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n| > Aq^n$ для некоторого A и любого n при $\alpha_n = -1, 1$. Значит, $|\hat{u}(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n)| \leq A_1 q^{-n}$. Поэтому $|\delta_n - \delta_{n-1}| \leq A_1 (2/q)^n$, что доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из того, что $\hat{u}(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n) = 0$ для больших n , $\alpha_n = -1, 1$.

Итак, для любого $\omega \in \Omega$ возникают неотрицательная мера σ^ω со значениями в $L(K)$, гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$ и унитарное представление $f(x) \mapsto e^{i\langle a, x \rangle} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$. Согласно теореме 3, последнее эквивалентно представлению, порожденному остаточной ДС и ее коциклом (заданным последовательностью ω). (Таким образом, $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$ — это пространство $\mathcal{H}(\hat{G}, K)$ из разд. 3.2 при $G = \mathbb{R}^N$.)

В дальнейшем скалярное произведение и норма в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$ обозначаются через $(\cdot, \cdot)_\omega$ и $\|\cdot\|_\omega$.

4.2. Спектр остаточной ДС для случайного блуждания на $\mathbb{R}^N$. Введем числовые меры $\sigma_b^\omega = (\sigma^\omega b, b)$, $b \in K$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено условие (25). Для почти всех $\omega \in \Omega$ справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого вектора $b \in K$, $b \neq 0$, мера σ_b^ω сингулярна (относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^N$);
- 2) меры $\sigma_{b_1}^\omega$, $\sigma_{b_2}^\omega$ эквивалентны для любых ненулевых векторов b_1, b_2 ;
- 3) указанное выше представление группы $\mathbb{R}^N$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$ (состоящем из вектор-функций) эквивалентно представлению $f(x) \mapsto e^{i\langle a, x \rangle} f(x)$, $a \in \mathbb{R}^N$, в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^N, \sigma_b^\omega)$, $b \neq 0$ (состоящем из скалярных функций).

Итак, представление, порожденное остаточной ДС и почти любым элементарным коциклом, имеет однократный сингулярный спектр. Утверждение о простоте спектра представляется несколько неожиданным при $\dim K > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Зафиксируем вектор $b \in K$, $b \neq 0$. По теореме 1 для любого $a \in K$ существуют полиномиальные функции $\phi_k(\omega_k)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых

$$\int_{\Omega_n} (r_n(\omega_n)(a - \phi_k(\omega_k)b), a - \phi_k(\omega_k)b) d\omega_n \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, n \geq k.$$

(Интеграл не зависит от n при $n \geq k$.) Зафиксируем функцию $\Phi \in \hat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\|\Phi\|_{L_2} = 1$. В подынтегральной функции заменим ω_n на $x \cdot \omega_n$ (при этом интеграл не изменится), умножим интеграл на $|\Phi(x)|^2$ и проинтегрируем по x . Заметим, что преобразование Фурье (по x) функции $x \mapsto \Phi(x)(a - \phi_k(x \cdot \omega_k)b)$ имеет компактный носитель, не зависящий от ω , ибо $\Phi(x)$ имеет компактный носитель, а функция $x \mapsto \phi_k(x \cdot \omega_k)$ полиномиальна. Поэтому если n достаточно велико, то для любого $\omega = (u_1, u_2, \dots)$ интеграл подынтегральной функции по x не зависит

от n (согласно второму утверждению леммы 4). В результате, введя обозначение $\Phi_k^\omega(x) = \phi_k(x \cdot \omega_k)\Phi(x)$, получаем

$$\int_{\Omega} \|\Phi a - \Phi_k^\omega b\|_{\omega}^2 d\omega \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, найдется такое бесконечное множество $E \subset \mathbb{Z}^+$, что если $k \rightarrow \infty$, $k \in E$, то последовательность $\{\Phi_k^\omega(x)b\}$ сходится к $\Phi(x)a$ (по норме пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$) для почти всех $\omega \in \Omega$. Это приводит к следующему выводу: для почти всех ω вектор-функции вида $v(x)b$, $v \in \widehat{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, образуют плотное множество в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$.

Итак, соответствие $v(x)b \rightarrow v(x)$ отождествляет $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N, \sigma^\omega; K)$ с гильбертовым пространством $L_2(\mathbb{R}^N, \sigma_b^\omega)$ для почти всех ω . Этим доказаны второе и третье утверждения теоремы.

Для доказательства первого утверждения теоремы используем утверждение 2) теоремы 1. Функции ψ_k можно считать зависящими только от u_i , $i \leq k$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} |1 - \psi_k(\omega_k)|^2 (r_n(\omega_n)b, b) d\omega_n &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega_n} |\psi_k(\omega_k)|^2 d\omega_n &\rightarrow 0, \quad n \geq k, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(Эти интегралы не зависят от n при $n \geq k$.) В интегралах сделаем замену $\omega \mapsto x \cdot \omega$, умножим на ту же функцию $|\Phi(x)|^2$ и проинтегрируем по x . Рассуждая так же, как выше, получаем, что для некоторого бесконечного множества $E \subset \mathbb{Z}^+$ выполняются соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^N} |1 - \psi_k(x \cdot \omega_k)|^2 |\Phi(x)|^2 \sigma_b^\omega(dx) \rightarrow 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_k(x \cdot \omega_k)|^2 |\Phi(x)|^2 dx \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, $k \in E$, для почти всех $\omega \in \Omega$. Зафиксировав такой элемент ω , можно найти еще меньшее подмножество $F \subset \mathbb{Z}^+$, такое, что при $k \rightarrow \infty$, $k \in F$, последовательность $\psi_k(x \cdot \omega_k)$ сходится к 1 почти всюду по мере σ_b^ω и к нулю почти всюду по мере dx . Следовательно, эти меры взаимно сингулярны. Теорема доказана.

§ 5. Случайное блуждание на некоммутативной группе; остаточная ДС и представление группы G

Пусть G — группа с компактной подгруппой G_0 и $\widehat{G}$, $\widehat{G}_0$ — их двойственные пространства. Пусть $\mathcal{H}_\zeta$, π_ζ те же, что в разд. 3.2. Для любых $\zeta \in \widehat{G}$, $\rho \in \widehat{G}_0$ обозначим через $\mathcal{H}_\zeta^\rho$ максимальное подпространство в $\mathcal{H}_\zeta$, инвариантное относительно π_ζ и такое, что ограничение $\pi_\zeta|_{G_0}$ кратно ρ . Предположим, что подгруппа G_0 массивна, т.е. $\mathcal{H}_\zeta^\rho < \infty$ для любых $\zeta \in \widehat{G}$, $\rho \in \widehat{G}_0$. Пусть дана функция $D(g)$, $g \in G$, такая, что $D(g^{-1}) = D(g) \geq 1$, $D(g) \rightarrow \infty$ при $g \rightarrow \infty$, $D(g_1 g_2) \leq D(g_1) D(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Пусть, наконец, для любых $\rho_i \in \widehat{G}_0$, $i = 1, 2$, и любых ζ , входящих в разложение регулярного представления, выполнено неравенство

$$|(\pi_\zeta(g)h_1, h_2)| \leq C(D(g))^{-1}, \quad g \in G, \quad \zeta \in \widehat{G}, \quad h_k \in \mathcal{H}_\zeta^{\rho_k}, \quad \|h_k\| = 1, \quad k = 1, 2 \quad (26)$$

(C зависит от ρ_1, ρ_2 , но не от ζ).

ПРИМЕР. Нетрудно показать, что для $G = SL(2, \mathbb{R})$ можно положить $D(g) = \|g\|^\alpha$ с любым $\alpha \in (0, 1)$.

Рассмотрим следующее случайное блуждание на G : блуждающая точка остается на месте с вероятностью p_k и смещается на y_k с вероятностью q_k (подробности были изложены в разд. 2.4). Наложим следующее условие разреженности:

$$D(y_n) \geq (D(y_{n-1}))^c, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ для некоторого } c > 3. \quad (27)$$

Рассмотрим представление T в $L_2(X, \tau)$, порожденное остаточной ДС и тривиальным коциклом.

ТЕОРЕМА 5. При ограничениях (26), (27) представление T эквивалентно регулярному представлению группы G .

Поясним идею доказательства (весьма простую). Возьмем конечное множество $\bar{\rho} \subset \hat{G}_0$. Пусть $C_0^{\bar{\rho}}(G)$ — максимальное подпространство из $C_0(G)$, на котором правое действие подгруппы G_0 разлагается по представлениям из $\bar{\rho}$. Пусть $\mathcal{H}_\zeta^{\bar{\rho}} = \bigoplus \mathcal{H}_\zeta^\rho$, $\rho \in \bar{\rho}$, $P_\zeta^{\bar{\rho}}$ — соответствующий проектор. Запишем формулу (24) для скалярного произведения (при $K = \mathbb{C}$), считая, что $\phi_k = \hat{f}_k$, $f_k \in C_0^{\bar{\rho}}(G)$. Тогда в этой формуле можно заменить $R_{mn}(\zeta)$ на $P_\zeta^{\bar{\rho}} R_{mn}(\zeta) P_\zeta^{\bar{\rho}}$. Из условий (26), (27) выводится, что последняя последовательность равномерно сходится на $\hat{G}$ при $n \rightarrow \infty$ к операторной функции $R_m(\zeta)$, а эта последовательность равномерно сходится к $P_\zeta^{\bar{\rho}}$ при $m \rightarrow \infty$. Замена $\phi(\zeta)$ на $\sqrt{R_m(\zeta)}\phi(\zeta)$ вкладывает $C_0^{\bar{\rho}}(G)$ в пространство преобразований Фурье функций из $L_2(G)$. Это приводит к заключению теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т. 2. Мир, М., 1965.
2. Исмаилов Р. С. Спектр динамических систем и произведения Рисса. Матем. сб., **180**, № 7, 888–912 (1989).
3. Исмаилов Р. С. Об остаточной алгебре случайных последовательностей. Теория вероятностей и ее применения, **18**, вып. 1, 186–193 (1973).
4. Queffelec M. Substitutional dynamical systems, spectral analysis. Lect. Notes in Math., Vol. 1294, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987.
5. Vershik A. M., Livshits A. N. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. In: Adv. Sov. Math., Vol. 9, 1992, pp. 185–204.
6. Кириллов А. А. Динамические системы, факторы и представления групп. УМН, **22**, вып. 5, 67–80 (1967).
7. Hewitt E., Savage L. Symmetric measures on cartesian products. Trans. Amer. Math. Soc., **80**, 470–501 (1955).
8. Peyriere J. Sur le produits de Riesz. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, **276**, 1417–1418 (1973).
9. Zimmer R. Ergodic theory, group representations, and rigidity. Bull. Amer. Math. Soc., **6**, No. 3, 383–416 (1982).