Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 30–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:26:12

УДК 517.51

Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона

© 2002. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Мы рассматриваем класс $A(\mathbb{T})$ функций f , непрерывных на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ряды Фурье которых,

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt},$$

абсолютно сходятся ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Норма в $A(\mathbb{T})$ определяется соотношением

$$\|f\|_A = \|\widehat{f}\|_{l^1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|.$$

Хорошо известно, что $A(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй относительно этой нормы (и обычного умножения функций).

В [1] Берлинг и Хелсон доказали следующую теорему (см. также [2] и [3]). Пусть φ — отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя, такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_A = O(1), \quad n \in \mathbb{Z};$$

тогда φ линейно: $\varphi(t) = mt + \alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{T}$. Отсюда немедленно вытекает решение проблемы Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$ — всякий такой эндоморфизм оказывается тривиальным, т. е. имеет вид $f(t) \rightarrow f(mt + \alpha)$ (иными словами, лишь тривиальные замены переменной $t \rightarrow mt + \alpha$ сохраняют принадлежность функций классу $A(\mathbb{T})$). Другая интерпретация теоремы Берлинга–Хелсона такова: если U — (ограниченный) оператор в l^1 ($= l^1(\mathbb{Z})$), коммутирующий со сдвигами и удовлетворяющий условию $\|U^n\|_{l^1 \rightarrow l^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $U = \xi S$, где ξ — постоянная, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига.

Вместе с тем, хотя теорема Берлинга–Хелсона устанавливает неограниченный рост норм $\|e^{in\varphi}\|_A$ (для нелинейных отображений φ), характер этого роста неясен. Приведем несколько известных результатов. Через $C^\nu(I)$ обозначим класс отображений $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, имеющих непрерывную производную порядка ν на интервале $I \subseteq \mathbb{T}$.

(А) Если φ нелинейно на некотором интервале I и $\varphi \in C^2(I)$, то (Лейбензон [4], см. также [2])

$$\|e^{in\varphi}\|_A \geq c\sqrt{|n|}.$$

(В) Если $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, то (см. [2])

$$\|e^{in\varphi}\|_A \leq c\sqrt{|n|} \quad (n \neq 0).$$

В частности, если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$, то, с учетом утверждения (А), имеем $\|e^{in\varphi}\|_A \asymp \sqrt{|n|}$.

(С) Если φ непрерывно и кусочно-линейно (но нелинейно) на $\mathbb{T}$, то (Кахан [2])

$$\|e^{in\varphi}\|_A \asymp \log |n|.$$

Кахану принадлежит гипотеза о том, что теорема Берлинга–Хелсона может быть значительно усилена. В частности, им сформулирована следующая проблема [2, 3]. Верно ли, что условие

$$\|e^{in\varphi}\|_A = o(\log |n|), \quad |n| \rightarrow \infty,$$

влечет за собой линейность отображения φ ? Ответ нам неизвестен. Неясно даже, верно ли это в предположении, что $\varphi \in C^1$.

Мы покажем, что для $\varphi \in C^1$ нормы $\|e^{in\varphi}\|_A$ могут расти довольно медленно, а именно, можно вплотную подойти к $O(\log n)$ -условию.

Под C^1 -диффеоморфизмом окружности мы имеем ввиду гомеоморфизм φ окружности $\mathbb{T}$ на себя, такой, что φ и обратный к нему φ^{-1} принадлежат $C^1(\mathbb{T})$. Мы говорим, что отображение $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ нигде не линейно, если оно не является линейным ни на каком интервале $I \subseteq \mathbb{T}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\gamma(n)$, $n = 1, 2, \dots$, — произвольная последовательность, $\gamma(n) \rightarrow +\infty$. Тогда существует нигде не линейный C^1 -диффеоморфизм φ окружности $\mathbb{T}$ на себя, такой, что

$$\|e^{in\varphi}\|_A = O(\gamma(|n|) \log |n|), \quad |n| \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $1 < p \leq 2$ пусть $A_p = A_p(\mathbb{T})$ обозначает класс интегрируемых функций f на $\mathbb{T}$, таких, что

$$\|f\|_{A_p} = \|\widehat{f}\|_{l^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Очевидно, что A_p с указанной нормой является банаховым пространством ($1 < p \leq 2$). Для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{T}$ обозначим через $|E|$ его лебегову меру и через 1_E его характеристическую функцию: $1_E(t) = 1$ при $t \in E$, $1_E(t) = 0$ при $t \notin E$. Через c, c_1, c_2, c_3 мы обозначаем различные положительные константы. Мы отождествляем $\mathbb{T}$ и отрезок $[0, 2\pi]$.

ЛЕММА 1. Пусть g — вещественнозначная непрерывная функция, линейная на интервале $\Delta \subseteq \mathbb{T}$. Тогда при всех p , $1 < p \leq 2$,

$$\|1_\Delta \cdot e^{ig}\|_{A_p} \leq c \cdot q |\Delta|^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ и c не зависит от g , Δ и p .

Действительно, для $g(t) = at + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$, имеем

$$|(1_\Delta \cdot e^{ig})^\wedge(k)| = \left| \frac{\sin((k-a)|\Delta|/2)}{\pi(k-a)} \right| \leq \frac{1}{|k-a|}, \quad k \neq a. \quad (1)$$

Кроме того, очевидно, что

$$|(1_\Delta \cdot e^{ig})^\wedge(k)| \leq |\Delta|, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Положим $M = 2\pi/|\Delta|$; тогда $M \geq 1$ и из (1) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k:|k-a| \geq M+1} |(1_\Delta \cdot e^{ig})^\wedge(k)|^p &\leq \sum_{k:|k-a| \geq M+1} \frac{1}{|k-a|^p} \leq 2 \int_M^{+\infty} \frac{dy}{y^p} \\ &= \frac{2}{p-1} \frac{1}{M^{p-1}} = \frac{2}{p-1} \left(\frac{|\Delta|}{2\pi} \right)^{p-1} \leq 2q |\Delta|^{p-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны, неравенство (2) дает

$$\begin{aligned} \sum_{k:|k-a| < M+1} |(1_\Delta \cdot e^{ig})^\wedge(k)|^p &\leq \sum_{k:|k-a| < M+1} |\Delta|^p \\ &\leq (2(M+1) + 1) |\Delta|^p \leq 5M |\Delta|^p \leq 40 |\Delta|^{p-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из оценок (3) и (4) вытекает, что

$$\|1_\Delta \cdot e^{ig}\|_{A_p} \leq ((2q+40)|\Delta|^{p-1})^{1/p} \leq (42q)^{1/p} |\Delta|^{1/q} \leq 42q |\Delta|^{1/q}.$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что $\alpha(q)$ — некоторая строго возрастающая непрерывная функция на $[1, +\infty[$, такая, что $\alpha(1) = 1$ и $\alpha(q) \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$.

Несложно понять, что, какова бы ни была функция α с перечисленными свойствами, существует последовательность положительных чисел δ_k , $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = 2\pi \quad (5)$$

и при всех q , $1 < q < \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{1/q} \leq c \cdot \alpha(q), \quad (6)$$

где c не зависит от q . Действительно, пусть $\varepsilon_k = 2^{-\alpha^{-1}(k)k}$, $k = 1, 2, \dots$, где α^{-1} — функция, обратная к α . Тогда при $k > \alpha(q)$ имеем $\alpha^{-1}(k) > q$ и, следовательно, $\varepsilon_k^{1/q} = 2^{-\alpha^{-1}(k)k/q} < 2^{-k}$ для этих значений k . Отсюда

$$\sum_k \varepsilon_k^{1/q} = \sum_{k \leq \alpha(q)} \varepsilon_k^{1/q} + \sum_{k > \alpha(q)} \varepsilon_k^{1/q} \leq \sum_{k \leq \alpha(q)} 1 + \sum_{k > \alpha(q)} 2^{-k} \leq \alpha(q) + 1 \leq 2\alpha(q),$$

и остается положить

$$\delta_k = 2\pi \varepsilon_k \Big/ \sum_j \varepsilon_j.$$

Фиксируем теперь совершенное множество $E \subset [0, 2\pi]$ меры нуль, содержащее точки 0 и 2π , такое, что $|\Delta_k| = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\{\Delta_k\}$ — интервалы, дополнительные к E (компоненты связности дополнения $[0, 2\pi] \setminus E$), и $\{\delta_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (5) и (6). Условие (5) гарантирует существование такого множества. Для всякого отрезка $I \subset [0, 2\pi]$ обозначим через $E(I)$ аффинную копию множества E , сосредоточенную на I , т. е. положим $E(I) = l_I(E)$, где l_I — линейное непрерывное отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на I .

Лемма 2. Пусть g — вещественнозначная непрерывная функция, линейная на интервалах, дополнительных к $E(I)$. Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $1 < p \leq 2$ имеем

$$\|1_I \cdot e^{i\lambda g}\|_{A_p} \leq c \cdot \alpha(q)q|I|^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ и c не зависит от p , I , λ и g .

Для доказательства обозначим через $\Delta_k(I)$, $k = 1, 2, \dots$, интервалы, дополнительные к $E(I)$ (в I). Тогда при подходящей нумерации $|\Delta_k(I)| = |\Delta_k| \cdot |I|/2\pi = \delta_k|I|/2\pi$, и в силу леммы 1 и (6) получаем

$$\begin{aligned} \|1_I \cdot e^{i\lambda g}\|_{A_p} &= \left\| \sum_k 1_{\Delta_k(I)} \cdot e^{i\lambda g} \right\|_{A_p} \leq \sum_k \|1_{\Delta_k(I)} \cdot e^{i\lambda g}\|_{A_p} \\ &\leq \sum_k c \cdot q |\Delta_k(I)|^{1/q} = \sum_k c \cdot q \left(\frac{\delta_k |I|}{2\pi} \right)^{1/q} \leq c_1 q \alpha(q) |I|^{1/q}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Определим теперь по индукции последовательность отрезков I_k и множеств E_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Положим $I_0 = [0, 2\pi]$ и $E_0 = E(I_0) = E$. Если $I_0, I_1, \dots, I_k$ и $E_0, E_1, \dots, E_k$ уже определены, то определим I_{k+1} следующим образом. Рассмотрим объединение $\bigcup_{j=0}^k E_j$ и выберем интервал, дополнительный к этому объединению (в $[0, 2\pi]$), имеющий наибольшую длину (если таких несколько, берем любой из них). Обозначим его через J . Пусть I_{k+1} — отрезок, содержащийся в J , концентрический с J и имеющий длину $\leq \delta_{k+1}$. Положим затем $E_{k+1} = E(I_{k+1})$.

При каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим вещественнозначную непрерывную функцию ψ_k на $[0, 2\pi]$, обладающую следующими свойствами: ψ_k постоянна на интервалах, дополнительных к E_k , $\psi_k(t) = 0$ при $t \notin I_k$, $|\psi_k(t)| \leq 1$ при всех $t \in [0, 2\pi]$, $\psi_k \not\equiv \text{const}$ и $\int_0^{2\pi} \psi_k(t) dt = 0$ (ψ_k получается несложной модификацией стандартной канторовой лестницы). Пусть

$$f_k(t) = \int_0^t \psi_k(\theta) d\theta, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{и} \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} f_k.$$

Очевидно, что $g \in C^1([0, 2\pi])$ и g нигде не линейна на $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим поведение норм $\|e^{i\lambda g}\|_{A_p}$ при p , близких к 1, $p > 1$. Покажем, что при всех p , $1 < p < 2$, и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|e^{i\lambda g}\|_{A_p} \leq c \cdot \alpha(q)^2 q, \quad (7)$$

где, как и выше, $1/p + 1/q = 1$ и c не зависит от λ и p .

Действительно, полагая

$$g_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} 2^{-k} f_k, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

видим, что $g_\nu \equiv g_{\nu-1}$ вне I_ν , $g_{\nu-1}$ линейна на I_ν ($\nu \geq 1$) и g_ν линейна на интервалах, дополнительных к $E_\nu = E(I_\nu)$. С учетом леммы 2 и оценки $|I_\nu| \leq \delta_\nu$, верной при $\nu \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|e^{i\lambda g_\nu} - e^{i\lambda g_{\nu-1}}\|_{A_p} &= \|1_{I_\nu} \cdot (e^{i\lambda g_\nu} - e^{i\lambda g_{\nu-1}})\|_{A_p} \leq \|1_{I_\nu} \cdot e^{i\lambda g_\nu}\|_{A_p} + \|1_{I_\nu} \cdot e^{i\lambda g_{\nu-1}}\|_{A_p} \\ &\leq c \cdot \alpha(q)q |I_\nu|^{1/q} \leq c \cdot \alpha(q)q \delta_\nu^{1/q}, \quad \nu \geq 1. \end{aligned}$$

Кроме того, так как g_0 линейна на интервалах, дополнительных к $E_0 = E(I_0)$, то (см. лемму 2)

$$\|e^{i\lambda g_0}\|_{A_p} \leq c \cdot \alpha(q)q |I_0|^{1/q} \leq c_1 \alpha(q)q.$$

Следовательно (см. (6)),

$$\begin{aligned} \|e^{i\lambda g}\|_{A_p} &\leq \|e^{i\lambda g_0}\|_{A_p} + \sum_{\nu \geq 1} \|e^{i\lambda g_\nu} - e^{i\lambda g_{\nu-1}}\|_{A_p} \\ &\leq c_1 \alpha(q)q + \sum_{\nu \geq 1} c \cdot \alpha(q)q \delta_\nu^{1/q} \leq c_1 \alpha(q)q + c_2 \alpha(q)^2 q \leq c_3 \alpha(q)^2 q, \end{aligned}$$

и (7) доказано.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, что

$$\varepsilon \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |g'(t)| < 1,$$

и положим $\varphi(t) = \varepsilon g(t) + t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $\varphi \in C^1([0, 2\pi])$, $\varphi'(t) > 0$ на $[0, 2\pi]$ и, кроме того, ясно, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2\pi) = 2\pi$ и $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$. Таким образом, φ определяет C^1 -диффеоморфизм окружности $\mathbb{T}$ на себя, причем φ нигде не линейен. Оценка (7) дает

$$\|e^{in\varphi}\|_{A_p} = \|e^{in\varepsilon g}\|_{A_p} \leq c\alpha(q)^2 q \quad (8)$$

при всех $n \in \mathbb{Z}$ и p , $1 < p < 2$.

Завершим доказательство теоремы. При любых $M \geq 1$ и $1 < p < 2$ из (8), пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq M} |\widehat{e^{in\varphi}}(k)| &\leq \left(\sum_{|k| \leq M} |\widehat{e^{in\varphi}}(k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{|k| \leq M} 1 \right)^{1/q} \\ &\leq \|e^{in\varphi}\|_{A_p} (2M+1)^{1/q} \leq c_1 \alpha(q)^2 q M^{1/q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вместе с тем, поскольку $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|k| > M} |\widehat{e^{in\varphi}}(k)| &= \sum_{|k| > M} \frac{1}{|k|} |k \widehat{e^{in\varphi}}(k)| \leq \left(\sum_{|k| > M} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| > M} |\widehat{(e^{in\varphi})'}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{2}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(e^{in\varphi(t)})'|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |n\varphi'(t)|^2 dt \right)^{1/2} = c_2 \frac{|n|}{M^{1/2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вместе соотношения (9) и (10) дают

$$\|e^{in\varphi}\|_A \leq c_1 \alpha(q)^2 q M^{1/q} + c_2 \frac{|n|}{M^{1/2}}.$$

Пусть $M = n^2$ и $q = \log |n|$; при этом при всех достаточно больших n для $p = 1 + 1/(q - 1)$ будет, очевидно, выполняться неравенство $1 < p < 2$. Тогда

$$\|e^{in\varphi}\|_A \leq c_1(\alpha(\log |n|))^2(\log |n|)|n|^{2/\log |n|} + c_2 = O(\alpha(|n|)^2 \log |n|), \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Выбрав строго возрастающую непрерывную функцию α на $[1, +\infty[$, удовлетворяющую условиям $\alpha(1) = 1$, $\alpha(q) \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$ и $\alpha(n)^2 = O(\gamma(n))$, получаем утверждение теоремы.

Отметим, что в изложенном доказательстве в значительной мере использована конструкция из [5], где построен нигде не линейный C^1 -диффеоморфизм окружности, такой, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A_p} = O(1) \quad \text{при всех } p > 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неясно, может ли в случае нелинейного отображения φ выполняться условие

$$\|e^{in_k\varphi}\|_A = O(1)$$

для некоторой (неограниченной) последовательности $\{n_k\} \subset \mathbb{Z}$. Если φ абсолютно непрерывно, то ответ отрицательный. Действительно, допустим, что φ абсолютно непрерывно и

$$\|e^{in_k\varphi}\|_A \leq c.$$

Для $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, положим $\Phi_{n,k}(t) = (n_k/n)(\varphi(t + n/n_k) - \varphi(t))$. Тогда для п. в. $t \in \mathbb{T}$ имеем $\Phi_{n,k}(t) \rightarrow \varphi'(t)$ при $k \rightarrow \infty$. Вместе с тем

$$\|e^{in\Phi_{n,k}}\|_A = \|e^{in_k\varphi(\cdot + n/n_k)}e^{-in_k\varphi(\cdot)}\|_A \leq c^2,$$

и, устремляя k к ∞ , получаем

$$\|e^{in\varphi'}\|_A \leq c^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В силу теоремы Берлинга–Хелсона φ' линейно и, следовательно, φ — полином степени ≤ 2 . Из теоремы Лейбензона (см. утверждение (А) в начале статьи) вытекает, что φ линейно.

Настоящая работа была выполнена во время пребывания автора в отделении математики Технологического института штата Джорджия (Атланта, США) в 1999/2000 г. Я благодарен Майклу Лэйси, организовавшему мой визит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beurling A., Helson H. Fourier–Stieltjes transforms with bounded powers. *Math. Scand.*, **1**, 120–126 (1953).
2. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Мир, М., 1976.
3. Kahane J.-P. Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier. In: *Topics in Modern Harmonic Analysis*, Vol. II. Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, pp. 955–990.
4. Лейбензон З. Л. О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье. *УМН*, **9**, вып. 3 (61), 157–162 (1954).
5. Lebedev V., Olevskii A. C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers. *Geom. Funct. Anal. (GAFA)*, **4**, No. 2, 213–235 (1994).

Московский государственный институт
электроники и математики (МГИЭМ)
e-mail: lebedevhome@mtu-net.ru

Поступило в редакцию
28 декабря 2000 г.