Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Ш. Ильясов, Исчисление бифуркаций методом продолженного функционала, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 23–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa1761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:57:23

Исчисление бифуркаций методом продолженного функционала*

© 2007. Я. Ш. Ильясов

§ 1. Введение

В данной работе исследуются бифуркационные точки (u^*, λ^*) попарного рождения и уничтожения критических точек семейства функционалов $E(u, \lambda)$. Здесь $E(u, \lambda)$ — отображение класса C^1 на $H \times \mathbb{R}$, H — гильбертово пространство и $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр семейства. Точка $u_\lambda \in H$ называется критической, если она удовлетворяет уравнению

$$D_u E(u_\lambda, \lambda) = 0, \quad (1.1)$$

где $D_u E$ — производная по переменной $u \in H$ в смысле Фреше.

Существует достаточно обширная литература, посвященная доказательству существования бифуркаций критических точек функционалов и бифуркаций решений нелинейных уравнений (см., например, [13], [14], [19]). Имеются также общие методы и подходы, такие, как теоремы Крэнделла–Рабиновича [4], Денсера [5], Красносельского [12], Рабиновича [16], метод ветвления решений Вайнберга и Треногина [7] и ряд других (см. [13], [14], [19]), которые позволяют доказывать существование бифуркаций для широкого класса проблем из нелинейного анализа. Однако важно отметить, что в этих результатах требуется предварительное знание бифуркационной точки (u^*, λ^*) . На практике эта точка находится из некоторых априорных рассуждений либо фактически угадывается.

В связи с этим возникают следующие вопросы: существует ли конструктивный способ нахождения бифуркационной точки (u^*, λ^*) и как определить, обладает ли заданный функционал $E(u, \lambda)$ бифуркацией, если точка (u^*, λ^*) неизвестна.

Данные вопросы являются действительно актуальными как с точки зрения нелинейного анализа (см. [3], [13], [19]), так и при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений. Например, результаты о существовании кратных решений нелинейных дифференциальных уравнений (см. обзор [2] и [10], [15]) указывают на то, что в этих случаях, возможно, присутствуют бифуркации попарного рождения и уничтожения решений. Тем не менее в большинстве этих случаев неизвестно, существуют ли такие бифуркации, а нахождение соответствующих бифуркационных точек (u^*, λ^*) с использованием априорных рассуждений не представляется возможным.

Поставленные вопросы полезно рассмотреть и с точки зрения линейной теории. По сути, спектральная точка (ϕ_i, λ_i) , где ϕ_i — собственная функция, а λ_i —

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 05-01-00370, 05-01-00515 и INTAS 03-51-5007.

соответствующее собственное значение, может рассматриваться как бифуркационная (см. ниже замечание 2.1). С этой точки зрения можно констатировать, что в теории линейных задач для решения поставленных выше вопросов имеется уже достаточно развитая теория, а именно спектральная теория линейных операторов. Более того, здесь имеются конструктивные подходы, например, в конечномерном случае — метод характеристических уравнений, а для самосопряженных операторов спектральные точки (ϕ_i, λ_i) можно определить с помощью известных минимаксных вариационных принципов Пуанкаре и Куранта–Вейля.

В данной работе мы обобщаем эти подходы на нелинейные случаи для нахождения точек бифуркации. В следующем параграфе (теорема 2.2) мы обосновываем так называемый метод продолженного функционала. Этот метод позволяет находить бифуркационные точки (u^*, λ^*) абстрактного функционала $E(u, \lambda)$ посредством некоторых конструктивно задаваемых минимаксных вариационных принципов. Важно подчеркнуть, что в нашей работе дается не только сам по себе метод продолженного функционала применительно к абстрактным функционалам, но и приводится конкретный пример, где этот метод позволяет получить действительно новые, ранее не доказанные результаты. В качестве такого примера (теорема 3.1) мы рассматриваем эллиптические уравнения с неопределенным знаком нелинейности. Метод продолженного функционала в данном случае позволяет дать ответ на ранее открытый вопрос о существовании бифуркации слабых решений для таких уравнений. При этом удается ослабить ограничения на условия задачи. Кроме этого, в теореме 3.1 получен принципиально новый результат: неизвестное бифуркационное значение рассматриваемого уравнения находится явным образом в виде конструктивно задаваемого минимаксного соотношения.

§2. Метод продолженного функционала

Пусть $E(u, \lambda)$ — функционал класса C^2 на H при $\lambda \in \mathbb{R}$, такой, что $D_u E(u, \lambda) \in C^1(H \times \mathbb{R})$. Мы говорим, что $E(u, \lambda)$ обладает бифуркацией попарного рождения и уничтожения критических точек (или, кратко, бифуркацией критических точек) в бифуркационной точке (u^*, λ^*) с бифуркационным значением $\lambda^* \in \mathbb{R}$ и собственным вектором бифуркации $\xi^* \in H$, если найдется C^1 -отображение

$$(-a, a) \ni s \longmapsto (u(s), \lambda(s)) \in H \times \mathbb{R} \quad (2.1)$$

при некотором $a > 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) u^* является критической точкой функционала $E(u, \lambda^*)$, $(u(0), \lambda(0)) = (u^*, \lambda^*)$, $\frac{d}{ds}\lambda(0) = 0$, $\frac{d}{ds}u(0) = \xi^* \in H$;
- 2) $u(s)$ является критической точкой функционала $E(u, \lambda(s))$ для любого $s \in (-a, a)$;
- 3) все точки $\lambda(s)$ при $s \in (-a, a)$ принадлежат только одному из полуинтервалов $(-\infty, \lambda^*]$ или $[\lambda^*, +\infty)$.

Принципиально важным моментом в нашем подходе является то, что наряду с бифуркационной точкой (u^*, λ^*) мы ищем и собственный вектор бифуркации $\xi^* \in H$. Будем называть в дальнейшем $(u^*, \xi^*, \lambda^*) \in H \times H \times \mathbb{R}$ *джетом бифуркации* критических точек функционала $E(u, \lambda)$. Таким образом, нами решается задача о нахождении джетов бифуркаций. Смысл такого расширения задачи по сравнению с поиском только точки (u^*, λ^*) заключается в том, что

это дает возможность свести проблему нахождения бифуркаций функционала $E(u, \lambda)$ к геометрически более простой задаче нахождения критических точек продолженного (см. ниже) функционала.

Замечание 2.1. Спектральные точки (ϕ_i, λ_i) линейного самосопряженного оператора $A: H \rightarrow H$ соответствуют бифуркациям попарного рождения и уничтожения критических точек функционала $E(u, \lambda) = \frac{1}{2}\langle Au - \lambda u, u \rangle$ с $D_u E(u, \lambda) = Au - \lambda u$. Действительно, в этом случае отображение (2.1) можно задать формулами $\lambda(s) \equiv \lambda_i$, $u(s) = s \cdot \phi_i$ при $s \in (-\infty, \infty)$ и положить $\xi^* = \phi_i$.

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H .

Для нахождения джетов бифуркаций $(u^*, \xi^*, \lambda^*) \in H \times H \times \mathbb{R}$ заданного на $H \times \mathbb{R}$ функционала $E(u, \lambda)$ мы будем рассматривать продолженный на $H \times H \times \mathbb{R}$ функционал следующего вида:

$$Q(u, \xi, \lambda) := D_u E(u, \lambda)(\xi), \quad (u, \xi, \lambda) \in H \times H \times \mathbb{R}.$$

Наша идея состоит в том, чтобы в качестве бифуркационного значения искомого джета бифуркации $(u^*, \xi^*, \lambda^*) \in H \times H \times \mathbb{R}$ рассматривать λ^* , для которого (u^*, ξ^*) является критической точкой функционала $Q(u, \xi, \lambda^*)$ на $H \times H$, т. е.

$$\begin{cases} D_\xi Q(u, \xi, \lambda^*) = 0, \\ D_u Q(u, \xi, \lambda^*) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ниже в основной теореме данного параграфа мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях эта идея действительно позволяет находить джеты бифуркаций (u^*, ξ^*, λ^*) , соответствующие бифуркациям попарного рождения и уничтожения критических точек функционала $E(u, \lambda)$.

Замечание 2.2. Здесь и далее мы используем отождествление $D_u E(u, \lambda) := J D_u E(u, \lambda)$, где J — отображение двойственности между H и сопряженным пространством H^* . В этих обозначениях $D_u E(\cdot, \lambda)$ — дифференцируемое отображение из H в H , а $D_u Q(u, \cdot, \lambda) = D_u^2 E(u, \lambda)(\cdot)$ — линейное непрерывное отображение из H в H .

Покажем, что условия (2.2) обязательно выполняются для джета бифуркации функционала $E(u, \lambda)$.

Предложение 2.1. Пусть (u^*, ξ^*, λ^*) — джет бифуркации критических точек функционала $E(u, \lambda)$. Тогда (u^*, ξ^*, λ^*) удовлетворяет системе уравнений (2.2).

Доказательство. Из определения бифуркации рождения и уничтожения вытекает, что в окрестности точки (u^*, λ^*) ветвь критических точек $\{u_\lambda := (u, \lambda)\}$ задается как кривая следующего вида:

$$(u(s), \lambda(s)) = (u^* + s\xi^* + \chi(s), \lambda^* + \kappa(s)), \quad s \in (-a, a), \quad (2.3)$$

где $\chi(s)$, $\kappa(s)$ — отображения класса C^1 , такие, что $\|\chi(s)\|/s \rightarrow 0$, $|\kappa(s)|/s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$. При этом для любого $\xi \in H$ выполняется тождество

$$D_u E(u(s), \lambda(s))(\xi) = 0, \quad s \in (-a, a).$$

Дифференцируя по s это тождество при $s = 0$ и используя формулу (2.3), получаем равенство

$$D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi)(\xi^*) = D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi^*)(\xi) = 0, \quad \xi \in H. \quad (2.4)$$

Следовательно, $u^* \in H$ является критической точкой отображения $Q(\cdot, \xi^*, \lambda^*) = D_u E(\cdot, \lambda^*)(\xi^*)$. Далее, поскольку u^* — критическая точка функционала $E(u, \lambda)$, справедливо тождество $D_u E(u^*, \lambda^*)(\xi) = Q(u^*, \xi, \lambda^*) = 0$ при всех $\xi \in H$; поэтому $D_\xi Q(u^*, \xi, \lambda^*) = 0$. Таким образом, (u^*, ξ^*) действительно является критической точкой продолженного функционала $Q(u, \xi, \lambda^*)$. $\square$

Идея нашего подхода имеет геометрическое объяснение. Рассмотрим в расширенном пространстве $H \times H \times \mathbb{R}$ поверхность нулевого уровня

$$\Sigma = \{(u, \xi, \lambda) \in H \times H \times \mathbb{R} : Q(u, \xi, \lambda) = 0\}. \quad (2.5)$$

Эта поверхность содержит все критические точки u_λ функционала $E(u, \lambda)$, которые выделяются на Σ условием $D_\xi Q(u_\lambda, \xi, \lambda) = 0$ или, что то же самое, условием $Q(u_\lambda, \xi, \lambda) = 0$ для любого $\xi \in H$. Из последнего условия вытекает, что над ветвями критических точек $\{(u_\lambda, \lambda)\} \subset H \times \mathbb{R}$ поверхность Σ имеет структуру «ленты»: $\{u_\lambda\} \times H \times \{\lambda\}$. Тогда легко заметить, что точке бифуркации (u_λ^*, λ^*) соответствует складка этой ленты, т. е. существует такое направление $\xi^* \in H$, что в любой окрестности линии складки¹⁾ $u_\lambda^* \times \langle \xi^* \rangle \times \lambda^*$ проектирование $\pi: (u, \xi, \lambda) \rightarrow (\xi, \lambda)$ не является локальным диффеоморфизмом поверхности Σ на плоскость $H \times \mathbb{R}$. В то же время мы видим, что если $D_u Q(u_\lambda, \xi, \lambda) \neq 0$, то проектирование π является локальным диффеоморфизмом окрестности линии $u_\lambda \times \langle \xi \rangle \times \lambda$ поверхности Σ на $H \times \mathbb{R}$. Таким образом, бифуркациям функционала $E(u, \lambda)$ соответствуют точки (u^*, ξ^*, λ^*) на поверхности Σ , для которых $D_\xi Q(u^*, \xi^*, \lambda^*) = 0$ и $D_u Q(u^*, \xi^*, \lambda^*) = 0$.

Следует отметить, что предлагаемый нами метод продолженного функционала является фактически обобщением на бесконечномерные системы метода характеристических уравнений. Действительно, в конечномерном случае на первом шаге поиска априорных точек бифуркаций (u^*, λ^*) можно воспользоваться методом характеристических уравнений, т. е. решать систему уравнений $D_u E(u^*, \lambda^*) = 0$, $\det(D_u^2 E(u^*, \lambda^*)) = 0$. Однако прямое применение этого метода в бесконечномерном случае (из-за отсутствия нужного понятия детерминанта) является затруднительным. Ситуацию можно изменить, если заметить, что задача решения данной системы допускает замену на эквивалентную ей задачу поиска решений расширенной системы $D_u E(u^*, \lambda^*) = 0$, $D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi^*) = 0$. Замечательным моментом здесь является то, что данная расширенная система уравнений уже допускает обобщение на бесконечномерный случай. Предлагаемый нами метод продолженного функционала является именно таким обобщением.

Замечание 2.3. В методе продолженного функционала мы рассматриваем уравнение (1.1) только в вариационной форме. В основном это условие было необходимо для того, чтобы обеспечить самосопряженность оператора $D_u^2 E(u, \lambda)$ при всех $(u, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ (см. (2.4)).

Отметим, что выше мы в основном обсуждали первый шаг в решении задачи нахождения бифуркации, т. е. нахождение точки (u^*, ξ^*, λ^*) , для которой существует кривая (2.1), удовлетворяющая условию 1) в определении бифуркации. При этом открытым оставался вопрос о том, как находить те значения $\lambda^* \in \mathbb{R}$, для которых разрешима система (2.2). Кроме этого, на втором шаге

¹⁾Здесь и далее $\langle a \rangle$ обозначает пространство, натянутое на вектор $a \in H$.

следует найти процедуру отбора в множестве решений системы (2.2) тех джетов (u^*, ξ^*, λ^*) , которым действительно соответствуют бифуркации попарного рождения и уничтожения критических точек, т.е. для которых выполняются условия 2), 3) из определения бифуркации.

Выбрать подход ко второму шагу удобно, анализируя приведенную выше геометрическую интерпретацию метода продолженного функционала. Из этого анализа понятно, что на первом этапе можно начать с изучения ситуации с более простой геометрией, например, когда поверхность нулевого уровня (2.5) разрешима относительно λ , т.е. задается как отображение $\lambda = \lambda(u, \xi)$ из $H \times H$ в $\mathbb{R}$. В этой ситуации искомым бифуркационным значениям $\lambda^* \in \mathbb{R}$ будут соответствовать критические уровни функционала $\lambda(u, \xi)$, а в точках (u^*, ξ^*) касательные плоскости к Σ будут параллельны координатной плоскости $H \times H$. При этом расположение поверхности $\lambda = \lambda(u, \xi)$ по отношению к этой касательной плоскости указывает, над каким из полуинтервалов, $(-\infty, \lambda^*]$ или $[\lambda^*, +\infty)$, находится локальная ветвь критических точек функционала $E(u, \lambda)$.

Приведем теперь строгие выкладки. Ситуация, когда уравнение нулевого уровня $Q(u, \xi, \lambda) = 0$ разрешается относительно λ , соответствует случаю, когда параметр λ входит в $E(u, \lambda)$ линейно. Пусть в дальнейшем $E(u, \lambda) = G(u) - \lambda T(u)$, где $G(\cdot), T(\cdot): H \rightarrow \mathbb{R}$ — отображения класса C^2 . Отметим, прежде всего, что любая точка $(u^*, \xi^*) \in H \times H$, такая, что $D_u T(u^*)(\xi^*) \neq 0$, удовлетворяет системе (2.2) в том и только том случае, когда она является критической точкой функционала

$$L(u, \xi) = \frac{D_u G(u)(\xi)}{D_u T(u)(\xi)}. \quad (2.6)$$

Отсюда, принимая во внимание предложение 2.1, заключаем, что множество $\{(u^*, \xi^*, \lambda^*)\}$ джетов бифуркаций функционала $E(u, \lambda) = G(u) - \lambda T(u)$ содержится в множестве решений следующей вариационной задачи

$$\begin{cases} L(u, \xi) \rightarrow \text{crit}, \\ (u, \xi) \in H \times H. \end{cases} \quad (2.7)$$

Решением данной задачи мы называем $(u, \xi, \lambda) \in H \times H \times \mathbb{R}$, где (u, ξ) — критическая точка функционала $L(u, \xi)$ на $H \times H$, а $\lambda = L(u, \xi)$.

Рассмотрим один из способов, позволяющих находить решение задачи (2.7). Пусть S и Φ — некоторые подмножества в H , такие, что $D_u T(u)(\xi) \neq 0$ при всех $(u, \xi) \in S \times \Phi$. Рассматривается следующая минимаксная задача:

$$\lambda^* = \sup_{u \in S} \inf_{\xi \in \Phi} \{L(u, \xi)\}. \quad (2.8)$$

Мы говорим, что $(u^*, \xi^*) \in S \times \Phi$ — решение задачи (2.8), если $|\lambda^*| < +\infty$, $\lambda^* = L(u^*, \xi^*)$ и (u^*, ξ^*) — критическая точка функционала $L(u, \xi)$ на $H \times H$, т.е. $D_u L(u^*, \xi^*) = 0$, $D_\xi L(u^*, \xi^*) = 0$.

Справедлива следующая основная теорема о существовании бифуркации попарного рождения и уничтожения критических точек.

Теорема 2.2. Пусть H — гильбертово пространство, $E(u, \lambda) = G(u) - \lambda T(u)$, где $G(\cdot), T(\cdot): H \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторые C^2 -отображения, и S, Φ — заданные подмножества в H , такие, что $D_u T(u)(\xi) \neq 0$ при всех $(u, \xi) \in S \times \Phi$. Рассмотрим минимаксную задачу (2.8), где $L(u, \xi) = D_u G(u)(\xi)/D_u T(u)(\xi)$ при $(u, \xi) \in S \times \Phi$.

1) Предположим, что $\lambda^* < +\infty$. Тогда ни при каких $\lambda > \lambda^*$ уравнение (1.1) не имеет решений в S .

2) Предположим, что

(i) существует решение $(u^*, \xi^*) \in S \times \Phi$ задачи (2.8);

(ii) $X_1 := \text{Ker } D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ — одномерное подпространство в H , порожденное ξ^* , т.е. $X_1 = \langle \xi^* \rangle$ и $H = X_1 \oplus X_2$.

Тогда (u^*, λ^*) является точкой бифуркации попарного рождения и уничтожения критических точек функционала E , т.е. существуют интервал $(-a, a)$ и отображения $\lambda: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $u: (-a, a) \rightarrow H$ класса C^1 , такие, что $D_u E(u(s), \lambda(s)) = 0$ при $s \in (-a, a)$, $(u(0), \lambda(0)) = (u^*, \lambda^*)$, $\frac{d}{ds}\lambda(0) = 0$, $\frac{d}{ds}u(0) = \xi^*$ и $\lambda(s) \leq \lambda^*$ при $s \in (-a, a)$. Кроме того, $u(s) = u^* + s\xi^* + \chi(s)$, где $\chi: (-a, a) \rightarrow X_2$ и $\chi(0) = 0$, $\frac{d}{ds}\chi(0) = 0$.

Доказательство. 1) Пусть $\lambda^* < +\infty$. Из (2.8) вытекает, что если $\lambda > \lambda^*$, то для каждого $u \in S$ найдется $\phi \in \Phi$, такой, что $L(u, \phi) < \lambda$ или, что то же самое, $D_u E(u, \lambda)(\phi) = D_u G(u)(\phi) - \lambda D_u T(u)(\phi) < 0$. Но это означает, что равенство (1.1) при $\lambda > \lambda^*$ не может выполняться ни для какого $u \in S$.

Докажем утверждение 2). Так как $D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ — самосопряженный оператор, а $X_1 = \text{Ker } D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ — одномерное подпространство в H , то

$$\text{Im } D_u^2 E(u^*, \lambda^*) = X_1^\perp = X_2. \quad (2.9)$$

Воспользуемся процедурой Ляпунова–Шмидта [14]. Пусть $\pi: H \rightarrow X_1$ — оператор проекции, соответствующий прямой сумме $H = X_1 \oplus X_2$. Тогда уравнение (1.1) эквивалентно системе уравнений

$$\pi D_u E(u^* + x_1 + x_2, \lambda^*) = 0, \quad (2.10)$$

$$(I - \pi) D_u E(u^* + x_1 + x_2, \lambda^*) = 0, \quad (2.11)$$

где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Положим $F(x_1, x_2, \lambda) = (I - \pi) D_u E(u^* + x_1 + x_2, \lambda)$. Отметим, что $F \in C^1(X_1 \times X_2 \times \mathbb{R}, X_2)$, так как $E(u, \lambda) \in C^2(H \times \mathbb{R})$. Учитывая равенства (2.9) и подсчитывая производную Фреше $D_{x_2} F(0, 0, \lambda^*)(\xi_2) = (I - \pi) D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi_2) = D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi_2)$, $\xi_2 \in X_2$, мы заключаем, что отображение $D_{x_2} F(0, 0, \lambda^*): X_2 \rightarrow X_2$ является изоморфизмом. Далее, $F(0, 0, \lambda^*) = D_u E(u^*, \lambda^*) = 0$. Следовательно, к отображению F применима теорема о неявной функции. Поэтому существует окрестность $U \subset X_1 \times \mathbb{R}$ точки $(0, \lambda^*) \in X_1 \times \mathbb{R}$ и C^1 -отображение $x_2 = \tilde{\chi}(x_1, \lambda)$ из U в X_2 , такие, что $\tilde{\chi}(0, \lambda^*) = 0$ и

$$(I - \pi) D_u E(u^* + x_1 + \tilde{\chi}(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \quad \text{при } (x_1, \lambda) \in U. \quad (2.12)$$

Подставим это равенство в (2.10). Тогда, принимая во внимание, что $X_1 = \langle \xi^* \rangle$, получаем уравнение

$$g(s, \lambda) := D_u E(u^* + s\xi^* + \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda), \lambda)(\xi^*) = 0. \quad (2.13)$$

Так как по предположению $D_u T(u^*)(\xi^*) \neq 0$, то

$$\frac{d}{d\lambda} D_u E(u^*, \lambda^*)(\xi^*) = D_u T(u^*)(\xi^*) \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d}{d\lambda} g(0, \lambda^*) = D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi^*) \left(\frac{d}{d\lambda} \tilde{\chi}(0, \lambda^*) \right) + \frac{d}{d\lambda} D_u E(u^*, \lambda^*)(\xi^*) \neq 0. \quad (2.14)$$

Следовательно, к отображению $(s, \lambda) \rightarrow D_u E(u^* + s\xi^* + \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda), \lambda)(\xi^*)$ применима теорема о неявной функции. Таким образом, существует отображение $\lambda: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 при некотором $a > 0$, такое, что при $s \in (-a, a)$

$$D_u E(u^* + s\xi^* + \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda(s)), \lambda(s))(\xi^*) = 0, \quad \lambda(0) = \lambda^*.$$

Кроме того, в силу соотношения (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \lambda(s) \right|_{s=0} &= - \left[\frac{d}{d\lambda} g(0, \lambda^*) \right]^{-1} \cdot \frac{d}{ds} g(0, \lambda^*) \\ &= - [D_u T(u^*)(\xi^*)]^{-1} \cdot D_u^2 E(u^*, \lambda^*)(\xi^*) \left(\xi^* + \left. \frac{d}{ds} \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda^*) \right|_{s=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Аналогично доказывается, что $\left. \frac{d}{ds} \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda(s)) \right|_{s=0} = 0$. Таким образом, полагая $\chi(s) = \tilde{\chi}(s\xi^*, \lambda(s))$, получаем необходимые отображения $\lambda(s), u(s) = u^* + s\xi^* + \chi(s)$ при $s \in (-a, a)$. При этом справедливость условия $\lambda(s) \leq \lambda^*$ для любого $s \in (-a, a)$ вытекает из доказанного выше утверждения 1). $\square$

Замечание 2.4. Вместо задачи (2.8) можно рассматривать также задачу

$$\lambda_* = \inf_{u \in S} \sup_{\xi \in \Phi} \{L(u, \xi)\}. \quad (2.16)$$

Тогда результаты теоремы останутся в силе с той лишь разницей, что локальные ветви будут существовать при $\lambda \geq \lambda_*$ и отсутствовать при $\lambda < \lambda_*$.

Замечание 2.5. Легко видеть, что для двойственной к (2.8) минимаксной задачи

$$\Lambda^* = \inf_{\xi \in \Phi} \sup_{u \in S} \{L(u, \xi)\} \quad (2.17)$$

необязательно существует бифуркация критических точек функционала.

В настоящей работе мы приводим три примера применения теоремы 2.2. Главные различия между этими примерами заключаются в геометрии рассматриваемых в них вариационных функционалов и в механизме возникновения бифуркаций. Основной пример, в котором теорема 2.2 позволяет получать принципиально новые результаты, рассматривается в следующих трех параграфах. В данном же параграфе мы приведем два примера, главной целью которых является иллюстрация некоторых дополнительных аспектов, связанных с доказанной теоремой.

Пример 1. Рассматриваемая задача о нахождении бифуркаций является актуальной и для конечномерных задач. Рассмотрим в качестве примера следующий двумерный функционал, заданный на $\mathbb{R}^2$:

$$E(x, y, \lambda) = \frac{1}{p} [x^p + y^p] - \lambda \left[\frac{1}{q} x^q + \frac{1}{\gamma} y^\gamma \right] - \frac{1}{r} x^r y^r, \quad (2.18)$$

где $0 < 2r < p < \gamma \leq q$, $x, y \geq 0$, $\lambda \geq 0$. Введем соответствующий данному случаю вариант функционала (2.6)

$$L(x, y, \xi_1, \xi_2) = \frac{(x^{p-1} - x^{r-1} y^r) \xi_1 + (y^{p-1} - x^r y^{r-1}) \xi_2}{x^{q-1} \xi_1 + y^{\gamma-1} \xi_2}, \quad x, y, \xi_1, \xi_2 > 0. \quad (2.19)$$

Будем рассматривать положительную ветвь критических точек $(x(\lambda), y(\lambda)) > 0$. Поэтому возьмем $S = \Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Рассмотрим

$$\lambda^* = \sup_{(x, y) \in S} \inf_{(\xi_1, \xi_2) \in \Phi} L(x, y, \xi_1, \xi_2). \quad (2.20)$$

Легко видеть, что при малых $\lambda > 0$ существуют критические точки $(x(\lambda), y(\lambda)) > 0$ функционала $E(x, y, \lambda)$. Отсюда вытекает, что $\lambda^* > 0$. Пусть $(x_m, y_m) \in S$ — максимизирующая последовательность в (2.20), т. е. $\inf_{(\xi_1, \xi_2) \in \Phi} L(x_m, y_m, \xi_1, \xi_2) \rightarrow \lambda^*$ при $m \rightarrow +\infty$. Тогда из предположения $0 < 2r < p < \gamma \leq q$, рассуждая от противного, получаем, что $\lambda^* < +\infty$ и последовательность $(x_m, y_m) \in S$ ограничена в $\mathbb{R}^2$. Отсюда легко вывести, что эта последовательность обладает предельной точкой $(x^*, y^*) \geq 0$, такой, что $\lambda^* = \inf_{(\xi_1, \xi_2) \in \Phi} L(x^*, y^*, \xi_1, \xi_2)$. Несложно заметить, что $(x^*, y^*) > 0$. Поскольку $L(x^*, y^*, t\xi_1, t\xi_2) = L(x^*, y^*, \xi_1, \xi_2)$ при любом $t > 0$, существует минимизирующая последовательность для $\lambda^* = \inf_{(\xi_1, \xi_2) \in \Phi} L(x^*, y^*, \xi_1, \xi_2)$, ограниченная в $\mathbb{R}^2$. Отсюда, как и выше, выводится, что найдется точка $(\xi_1^*, \xi_2^*) > 0$, для которой $\lambda^* = L(x^*, y^*, \xi_1^*, \xi_2^*)$. Легко видеть, что в данном случае $X_1 := \text{Ker } D_{(x, y)}^2 E(x^*, y^*, \lambda^*)$ представляет собой одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, по теореме 2.2 функционал (2.18) обладает бифуркацией попарного рождения и уничтожения критических точек в $((x^*, y^*), \lambda^*)$. Более того, здесь имеется нелокальный результат: ни при каком $\lambda > \lambda^*$ этот функционал не имеет положительных критических точек.

Нам неизвестно, можно ли получить этот результат в данном модельном случае другим, может быть, более простым способом.

Пример 2. Выше было отмечено (см. замечание 2.1), что точечный спектр линейного оператора можно рассматривать как множество бифуркаций соответствующего вариационного функционала. Фактически это означает, что мы имеем дело с обобщением понятия спектра на нелинейный случай, где в качестве спектра нелинейного оператора рассматривается множество его бифуркаций (ср. [3]). С этой точки зрения важно убедиться (см. [3]), что нахождение бифуркации по теореме 2.2 для линейного оператора действительно эквивалентно нахождению собственного значения и соответствующей собственной функции этого оператора. Рассмотрим в связи с этим следующий пример.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) с гладкой границей $\partial\Omega$, а $H := W_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций на Ω , т. е. пополнение пространства финитных функций $C_0^\infty := C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. Рассмотрим на H следующий функционал:

$$E(u, \lambda) = H_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx. \quad (2.21)$$

Зададим в H подмножество $S^0 := \{u \in C^1(\bar{\Omega}) \mid u(x) > 0 \text{ в } \Omega, u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $\Phi = \{\phi \in H \mid \phi(x) \geq 0\}$. Тогда соответствующая данному функционалу минимаксная задача (2.8) будет формулироваться следующим образом:

$$\lambda^* = \sup_{u \in S^0} \inf_{\xi \in \Phi} \frac{\int (\nabla u, \nabla \xi) dx}{\int u \xi dx}. \quad (2.22)$$

Несложно проверить, что в данном случае λ^* совпадает с первым собственным значением $\lambda_1 := \lambda_1(\Omega)$ оператора Лапласа $-\Delta$ на Ω с нулевым граничным условием, а решение $(u^*, \xi^*) \in S \times \Phi$ задается через соответствующую собственную функцию $\phi_1 \in S^0$: $u^* = \xi^* = \phi_1$.

Этот пример интересен также тем, что в данном случае значения прямой задачи (2.8) и двойственной к ней задачи (2.17) совпадают, т. е. $\lambda^* = \lambda_*$, и при этом существует седловая точка $(u^*, \xi^*) = (\phi_1, \phi_1)$. Данное свойство в нелинейном случае играет важную роль при исследовании глобальных решений соответствующих нестационарных уравнений (см. [9] и замечание 4.1 ниже). Кроме того, в данном случае совпадают и значения задач (2.8) и (2.16), т. е. $\lambda^* = \lambda_*$.

Замечание 2.6. В последнем примере, наряду с найденной положительной ветвью критических точек, существует пересекающаяся с ней ветвь $(0, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$, т. е. в данной ситуации мы имеем дело с так называемой бифуркацией из нуля (см. [7], [14]). Отметим, что такие подходы, как метод ветвления решений Вайнберга и Треногина [7], теоремы Крэнделла–Рабиновича [4], Красносельского [12], Рабиновича [16] позволяют доказывать (при условии, что заранее известна бифуркационная точка (u^*, ξ^*)) существование бифуркаций из нуля. Доказанная выше теорема 2.2, как это следует из примера 1 (см. также дальнейшие рассмотрения), охватывает и другие типы бифуркаций.

§3. Уравнения с неопределенным знаком нелинейности

В этом параграфе мы используем метод продолженного функционала для исследования семейства уравнений с неопределенным знаком нелинейности

$$-\Delta u = \lambda u + f|u|^{\gamma-2}u \quad \text{в } \Omega, \quad (3.1)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) с гладкой границей $\partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^\infty(\Omega)$, $2 < \gamma \leq 2^* := 2N/(N-2) < \infty$, если $N > 2$, и $2 < \gamma < \infty$, если $N \leq 2$. Нелинейность в правой части уравнения (3.1) имеет неопределенный знак, т. е. функция f может менять знак на Ω . При этом мы предполагаем, что существует открытая подобласть $\Omega^{+,0} \subset \Omega$, такая, что $f(x) < 0$ при п.в. $x \in \Omega^- = \Omega \setminus \Omega^{+,0}$. Мы полагаем $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} \subset \Omega^{+,0}$, $\Omega^0 := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\} \subset \Omega^{+,0}$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее предположение:

(А) $\Omega^+ \neq \emptyset$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $\Omega^0 = \emptyset$,

2) $\Omega^{+,0}$ — связная область; границы областей $\Omega^{+,0}$, Ω^0 имеют нулевую меру

Лебега.

Пусть $H = W_0^1(\Omega)$. Функционал $E(u, \lambda)$, соответствующий задаче (3.1)–(3.2), задается следующим образом:

$$E(u, \lambda) = H_\lambda(u) - F(u), \quad u \in H, \quad (3.3)$$

где $F(u) = \frac{1}{\gamma} \int f(x)|v|^\gamma dx$, а $H_\lambda(u)$ определено в (2.21).

Зададим в H подмножества функций

$$S = \{w \in C^1(\overline{\Omega}) : w(x) > C(w) d_\Omega(x) \text{ в } \Omega, w = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \quad (3.4)$$

и $\Phi = \{\phi \in C_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \phi(x) \geq 0\}$. Здесь $d_\Omega(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$, и $C(w)$, $0 < C(w) < +\infty$, — некоторая константа, которая может зависеть от w .

Минимаксная задача (2.8) в данном случае записывается следующим образом:

$$\lambda^* = \sup_{u \in S} \inf_{\psi \in \Phi} L(u, \psi), \quad (3.5)$$

где

$$L(u, \psi) := \frac{\int (\nabla u, \nabla \psi) dx - D_u F(u)(\psi)}{\int u \psi dx}, \quad u \in S, \psi \in \Phi.$$

Наряду с этой точкой мы будем рассматривать первое собственное значение $\lambda_1 := \lambda_1(\Omega)$ оператора $-\Delta$ на Ω с граничными условиями Дирихле. Хорошо известно, что λ_1 является простым и изолированным и существует соответствующая положительная собственная функция $\phi_1 \in S$.

Основным результатом о существовании бифуркации попарного рождения и уничтожения для задачи (3.1)–(3.2) в данной работе является следующая

Теорема 3.1. Пусть $2 < \gamma \leq 2^*$ и $f \in L^\infty(\Omega)$. Предположим, что $F(\phi_1) < 0$ и выполняется условие (A). Тогда $\lambda_1 < \lambda^* < +\infty$, существует решение $(u^*, \phi^*) \in S \times \Phi$ задачи (3.5) и (u^*, λ^*) является точкой бифуркации попарного рождения и уничтожения слабых решений задачи (3.1)–(3.2). Кроме того,

1) ни при каком $\lambda^* < \lambda$ не существует положительных решений задачи (3.1)–(3.2);

2) при любом $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$ существует слабое положительное решение $u_\lambda \in S$ задачи (3.1)–(3.2), такое, что $E(u_\lambda, \lambda) < 0$;

3) функция u^* является слабым решением задачи (3.1)–(3.2) при $\lambda = \lambda^*$, а функция $\phi^* \in S$ является слабым решением линеаризованной краевой задачи

$$-\Delta \phi^* - \lambda^* \phi^* - (\gamma - 1)f|u^*|^{\gamma-2} \phi^* = 0, \quad (3.6)$$

$$\phi^* = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad (3.7)$$

4) существуют интервал $(-a, a)$ и отображения $\lambda : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $u : (-a, a) \rightarrow H$ класса C^1 , такие, что для каждого $s \in (-a, a)$ функция $u(s) \in S$ есть слабое решение задачи (3.1)–(3.2) при $\lambda = \lambda(s)$, $(u(0), \lambda(0)) = (u^*, \lambda^*)$, $\frac{d}{ds}\lambda(0) = 0$ и $\lambda(s) \leq \lambda^*$ при $s \in (-a, a)$; кроме того, $u(s) = u^* + s\phi^* + \chi(s)$, где $\chi : (-a, a) \rightarrow V$, $\chi(0) = 0$, $\frac{d}{ds}\chi(0) = 0$, $H = \langle \phi^* \rangle \oplus V$.

Отметим, что найденное представление неизвестного бифуркационного значения как решения явно задаваемой минимаксной задачи (3.5) является результатом нового типа в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Некоторые исследования относительно существования бифуркации кратных решений системы (3.1)–(3.2) велись в работах [6], [13], [15]. Результат об абстрактном существовании бифуркационного значения λ^* (без явного нахождения этого значения) для классических решений этой системы в предположении, что $f \in C^2(\Omega)$, был получен в работе [15]. Однако доказательство существования бифуркации слабых решений системы (3.1)–(3.2) в предположении, что $f \in L^\infty(\Omega)$, получено впервые.

Частично утверждения 1), 2) теоремы 3.1 в другой форме были анонсированы в заметке автора [11]. В данной работе мы уточняем эти утверждения и приводим их детальное доказательство. Аналогичные результаты могут быть получены с применением метода продолженного функционала и для других

типов нелинейных уравнений. Этим исследованиям будут посвящены другие работы.

Случай $\Omega^+ = \emptyset$ и $F(\phi_1) < 0$ уже изучен (см., например, [6], [10]), но его также можно исследовать с использованием минимаксной задачи (3.5). В этом случае $-\infty < \lambda^* < +\infty$, но не существует решения $(u^*, \phi^*) \in S \times \Phi$ задачи (3.5). Здесь имеется бифуркация другого типа — бифуркация на бесконечности.

§4. Априорные оценки для λ^*

Пусть D — связная гладкая подобласть в Ω , $\lambda_1(D)$ — первое собственное значение, а $\phi_1(D)$ — соответствующая собственная функция оператора $-\Delta$ на D с нулевым условием на ∂D .

Пусть $\Theta \subset \Omega$ — связное открытое подмножество с границей нулевой меры Лебега. Рассмотрим подпространство $W_*^1(\Theta) \subset W_0^1(\Omega)$, определяемое формулой

$$W_*^1(\Theta) = \{u \in W_0^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ п.в. на } \Omega \setminus \Theta\}.$$

Тогда определено собственное значение [6]

$$\lambda_1(\Theta) = \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int |u|^2 dx} \mid u \in W_*^1(\Theta) \right\}. \quad (4.1)$$

При этом существует ненулевое неотрицательное решение $\phi_1(\Theta) \in W_*^1(\Theta)$ этой задачи, удовлетворяющее слабому равенству

$$\int (\nabla \phi_1(\Theta), \nabla \psi) dx - \lambda_1(\Theta) \int \phi_1(\Theta) \psi dx = 0 \quad \text{для любой функции } \psi \in W_*^1(\Theta). \quad (4.2)$$

Предложение 4.1. Пусть $2 < \gamma \leq 2^*$, $f \in L^\infty(\Omega)$. Тогда $\lambda^* = +\infty$ в том и только в том случае, когда $\Omega^{+,0} = \emptyset$. Более того, если $\Omega^{+,0}$ — связное открытое подмножество в Ω с границей нулевой меры Лебега, то $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^{+,0}) < +\infty$.

Доказательство. Пусть $\Omega^{+,0} = \emptyset$. Тогда для собственной функции $\phi_1(\Omega)$ выполняется следующее условие: $\lambda_1 \leq \inf_{\psi \in \Phi} L(t\phi_1(\Omega), \psi) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда, так как $\inf_{\psi \in \Phi} L(t\phi_1, \psi) \leq \sup_{u \in S} \inf_{\psi \in \Phi} L(u, \psi)$ при любом $t > 0$, получаем $\lambda^* = +\infty$.

Докажем второе утверждение. Пусть $\Omega^{+,0} \neq \emptyset$. Тогда найдется гладкая подобласть $D \subset \Omega^{+,0}$. Рассмотрим для задачи (3.5) двойственную к ней задачу, т.е. $\Lambda^* = \inf_{\psi \in \Phi} \sup_{u \in S} L(u, \psi)$. Заметим, что

$$\Lambda^* = \inf_{\psi \in \Phi} \sup_{u \in S} L(u, \psi) \leq \sup_{u \in S} L(u, \phi_1(D)).$$

Далее, так как $D_u F(u)(\phi_1(D)) \geq 0$, то $L(u, \phi_1(D)) \leq \frac{\int (\nabla u, \nabla \phi_1(D)) dx}{\int u \phi_1(D) dx} = \lambda_1(D)$ при всех $u \in S$. Таким образом, $\lambda^* \leq \Lambda^* \leq \lambda_1(D) < \infty$. Аналогично доказывается, что при данных условиях на $\Omega^{+,0}$ выполняется неравенство $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^{+,0})$. $\square$

Замечание 4.1. Можно показать, что в данном случае выполняется строгое неравенство $\lambda^* < \Lambda^*$.

Докажем утверждение 1) теоремы 3.1. По условию $\Omega^{+,0} \neq \emptyset$. Поэтому в силу предложения 4.1 имеем $\lambda^* < +\infty$. Отсюда, согласно утверждению 1) теоремы 2.2, получаем требуемое.

Рассмотрим вспомогательную вариационную задачу

$$\bar{\Lambda} = \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\int |u|^2 dx} \mid F(u) \geq 0, u \in H \setminus \{0\} \right\}. \quad (4.3)$$

Нам понадобится следующий известный результат (см. [10]).

Предложение 4.2. Пусть $2 < \gamma \leq 2^*$, $f \in L^\infty(\Omega)$, $F(\phi_1) < 0$ и $\Omega^{+,0} \neq \emptyset$. Тогда $\lambda_1 < \bar{\Lambda}$ и при всех $\lambda \in (\lambda_1, \bar{\Lambda})$ задача (3.1)–(3.2) имеет слабое решение $u_{gr,\lambda} \in S$. Кроме того,

- 1) $E(u_{gr,\lambda}, \lambda) < 0$;
- 2) $u_{gr,\lambda} \rightarrow 0$ в $L^\infty(\Omega)$ при $\lambda \downarrow \lambda_1$;
- 3) $u_{gr,\lambda}$ — основное состояние функционала $E(u, \lambda)$, т.е. для любого слабого решения $w_\lambda \in H$ задачи (3.1) выполняется неравенство $-\infty < E(u_{gr,\lambda}, \lambda) \leq E(w_\lambda, \lambda)$.

Докажем следующее

Предложение 4.3. Пусть $2 < \gamma \leq 2^*$, $f \in L^\infty(\Omega)$, $F(\phi_1) < 0$ и $\Omega^{+,0} \neq \emptyset$. Тогда $\lambda_1 < \lambda^*$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $\bar{\Lambda} \leq \lambda^*$, и воспользоваться предложением 4.2. Неравенство $\bar{\Lambda} \leq \lambda^*$ выводится рассуждением от противного. Для этого достаточно воспользоваться доказанным утверждением 1) теоремы 3.1 об отсутствии положительных решений при $\lambda > \lambda^*$ и утверждением о существовании таких решений при $\lambda \in (\lambda_1, \bar{\Lambda})$ из предложения 4.2. $\square$

§5. Доказательство теоремы 3.1

Докажем утверждение 2) теоремы. Пусть $\Lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$ выбрано произвольно. Достаточно доказать существование слабого положительного решения $u_\Lambda \in S$ задачи (3.1)–(3.2) и показать, что $E(u_\Lambda, \lambda) < 0$ при $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda]$.

Так как $\Lambda < \lambda^*$, то по определению (3.5) значения λ^* найдется такое $w_\Lambda \in S$, что будет выполняться следующее неравенство: при любых $\phi \in C_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$,

$$D_u H_\Lambda(w_\Lambda)(\phi) \geq D_u F(w_\Lambda)(\phi). \quad (5.1)$$

Это означает, что функция w_Λ является суперрешением задачи (3.1)–(3.2) при $\lambda = \Lambda$. Более того, так как $\int_\Omega w_\Lambda \phi dx > 0$, то w_Λ является суперрешением задачи (3.1)–(3.2) и при всех $\lambda < \Lambda$.

В силу предложения 4.2 при всех $\mu \in (\lambda_1, \bar{\mu})$ существует основное состояние $u_{gr,\mu}$ задачи (3.1)–(3.2). При этом $\bar{\mu}$ можно взять достаточно близким к λ_1 с тем, чтобы на Ω выполнялось неравенство $u_{gr,\mu} \leq w_\Lambda$. Легко видеть, что u_μ является субрешением задачи (3.1)–(3.2) при всех $\lambda \geq \mu$.

Следовательно, мы можем применить при $\lambda \in [\mu, \Lambda]$ метод суперсубрешений. Мы воспользуемся вариантом этого метода, основанным на использовании метода минимизации с навязанными ограничениями (см. теорему 2.4 в [17]). Как в [17], мы ограничим $E(u, \lambda)$ на следующее множество:

$$M_\Lambda = \{u \in H : u_{gr,\mu} \leq u \leq w_\Lambda\}. \quad (5.2)$$

Применяя теорему 2.4 из [17], мы выводим, что при любом $\lambda \in [\mu, \Lambda]$ найдется минимизирующая функция $u_\lambda \in M_\Lambda$ функционала $E(u, \lambda)$ на M_Λ . При этом

u_λ является слабым решением задачи (3.1)–(3.2) и удовлетворяет неравенствам $u_{gr,\mu} \leq u_\lambda \leq w_\Lambda$.

По построению функции u_μ мы имеем $E(u_{gr,\mu}, \mu) \geq E(u_\mu, \mu)$. С другой стороны, так как по предложению 4.2 решение $u_{gr,\mu}$ является основным состоянием, то $E(u_{gr,\mu}, \mu) \leq E(u_\mu, \mu)$. Следовательно, $E(u_\mu, \mu) = E(u_{gr,\mu}, \mu) < 0$.

Пусть теперь $\mu < \lambda \leq \Lambda$. Тогда, поскольку $E(u, \lambda) \leq E(u, \mu)$ при $u \in M_\Lambda$, мы получаем

$$E(u_\lambda, \lambda) = \min\{E(u, \lambda) \mid u \in M_\Lambda\} \leq \min\{E(u, \mu) \mid u \in M_\Lambda\} = E(u_\mu, \mu) < 0.$$

Утверждение 2) теоремы доказано.

Доказательство утверждения 3) вытекает из следующей леммы:

Лемма 5.1. Пусть $2 < \gamma \leq 2^*$. Предположим, что $\Omega^+ \neq \emptyset$ и $F(\phi_1) < 0$. Тогда существует точка $(u^*, \phi^*) \in S \times S$, такая, что

1) справедливо равенство

$$\int f(x) |u^*|^{\gamma-2} u^* \phi^* dx = 0, \quad \lambda^* = L(u^*, \phi^*); \quad (5.3)$$

2) $u^* \in S$ является слабым решением задачи (3.1)–(3.2) при $\lambda = \lambda^*$;

3) ϕ^* является слабым решением задачи (3.6)–(3.7) и решением следующей вариационной задачи:

$$\inf_{\phi \in S} \left\{ \frac{\int (\nabla \phi, \nabla \phi) dx - \lambda^* \int \phi^2 dx - D_u F(u^*)(\phi, \phi)}{\int \phi^2 dx} \right\} = 0. \quad (5.4)$$

Доказательство. Согласно доказанному выше, при каждом $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$ существует слабое положительное решение $u_\lambda \in S$ задачи (3.1)–(3.2). Мы докажем, что существует предельная точка u^* множества $\{u_\lambda\}$ при $\lambda \rightarrow \lambda^*$, которая удовлетворяет утверждениям леммы.

Для этого прежде всего отметим, что $\{u_\lambda\}$ является максимизирующей последовательностью задачи (3.5), т. е.

$$\inf_{\psi \in \Phi} \left\{ \frac{\int (\nabla u_\lambda, \nabla \psi) - D_u F(u_\lambda)(\psi)}{\int u_\lambda \psi} \right\} = \lambda \rightarrow \lambda^*. \quad (5.5)$$

Рассмотрим $u_\lambda = t_\lambda v_\lambda$, где $v_\lambda = u_\lambda / \|u_\lambda\|$, $t_\lambda = \|u_\lambda\|$. Тогда $\{v_\lambda \in S : \|v_\lambda\| = 1\}$ — ограниченное подмножество в рефлексивном пространстве H . Отсюда следует, что существуют подпоследовательность $v_j := v_{\lambda_j}$ и неотрицательная функция $\hat{v} \in H$, такие, что v_j сходится к $\hat{v}$ при $\lambda^j \rightarrow \lambda^*$ слабо в H и сильно в $L_q = L_q(\Omega)$ при $2 \leq q < 2^*$. Без ограничения общности можно считать, что $t_j = t_{\lambda_j} \rightarrow \hat{t}$ при $j \rightarrow \infty$, где $0 \leq \hat{t} \leq +\infty$.

Покажем, что $\hat{v} \neq 0$. В силу (3.1)–(3.2) мы имеем

$$\|v_j\|^2 - \lambda^j \int |v_j|^2 dx = t_j^{\gamma-2} \int_\Omega f(x) |v_j|^\gamma dx. \quad (5.6)$$

Если $\hat{v} = 0$ и, таким образом, $v_j \rightarrow 0$, то $\int_\Omega |v_j|^2 dx \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что поскольку $\|v_j\| = 1$, левая часть формулы (5.6) при достаточно больших j положительна. Из доказанного выше утверждения 2) теоремы мы имеем $E(v_j, \lambda^j) < 0$. Отсюда получаем $F(v_j) < 0$ и, следовательно, правая часть в (5.6) отрицательна при всех $j = 1, 2, \dots$. Получили противоречие. Таким образом, $\hat{v} \neq 0$.

Покажем теперь, что $0 < \hat{t} < \infty$. Для этого отметим сначала, что в силу (3.1)–(3.2) мы имеем следующее слабое равенство в H :

$$-\Delta v_j - \lambda^j v_j = t_j^{\gamma-2} f(x) |v_j|^{\gamma-2} v_j. \quad (5.7)$$

Отсюда следует, что если $t_j \rightarrow \infty$, то $D_u F(\hat{v})(\psi) = 0$ при всех $\psi \in C_0^\infty$. Такое возможно лишь в том случае, когда $\text{supp}(\hat{v}) \subset \Omega^0 := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$. Таким образом, если в предположении (A) выполняется условие $\Omega^0 = \emptyset$, то получаем противоречие и, следовательно, $\hat{t} < \infty$. Рассмотрим случай 2). Пусть $\Omega^{+,0}$ — связная область и границы множеств $\Omega^{+,0}$, Ω^0 имеют нулевую меру Лебега. Тогда $\hat{v} \in W_*^1(\Omega^0)$, так как $\text{supp}(\hat{v}) \subset \Omega^0$, и из формулы (5.7) следует, что выполняется слабое равенство

$$\int (\nabla \hat{v}, \nabla \psi) dx - \lambda^* \int \hat{v} \psi dx = 0 \quad \text{для любой функции } \psi \in W_*^1(\Omega^0). \quad (5.8)$$

Отсюда, используя (4.1), получаем, что $\lambda_1(\Omega^0) \leq \lambda^*$. Отметим, что, согласно предположению 4.1, $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^{0,+})$. С другой стороны, так как $\Omega^+ \neq \emptyset$ и $\Omega^{+,0}$ — связная область, то Ω^0 является собственным подмножеством в $\Omega^{0,+}$. Поэтому $\lambda_1(\Omega^{0,+}) < \lambda_1(\Omega^0)$. Получили противоречие. Следовательно, $\hat{t}$ ограничено сверху. Аналогично доказывается, что $\hat{t} > 0$.

Таким образом, мы доказали, что $u^* = \hat{t} \hat{v} \in H \setminus \{0\}$. Отсюда с помощью предельного перехода выводим, что u^* является слабым решением задачи (3.1)–(3.2) и при этом $u^* \geq 0$. Используя метод развертывания (bootstrap argument) (см. [8], [19]), доказываем, что $u^* \in L^\infty(\Omega)$. Отсюда с помощью результатов о регулярности решений эллиптических уравнений [8], [18] получаем, что $u^* \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Далее, используя строгий принцип максимума [18], доказываем, что $u^*(x) > C(u^*) d_\Omega(x)$ при $x \in \Omega$ для некоторого $C(u^*) \in (0, \infty)$. Таким образом, $u^* \in S$.

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\mu^* = \inf_{\phi \in S} \left\{ \frac{\int (\nabla \phi, \nabla \phi) dx - \lambda^* \int \phi^2 dx - (\gamma - 1) \int f |u^*|^{\gamma-2} \phi^2 dx}{\int \phi^2 dx} \right\}. \quad (5.9)$$

Стандартным образом доказывается, что $-\infty < \mu^* < +\infty$ и что существует решение $\phi^* \in S$ этой задачи. Отметим, что μ^* является первым собственным значением, а $\phi^* \in S$ — соответствующая собственная функция следующей линейной задачи Дирихле:

$$-\Delta \phi^* - \lambda^* \phi^* - (\gamma - 1) f |u^*|^{\gamma-2} \phi^* = \mu^* \phi^* \quad \text{в } \Omega, \quad (5.10)$$

$$\phi^* = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (5.11)$$

Покажем, что $\mu^* = 0$. Предположим противное, т.е. пусть $\mu^* \neq 0$ и для определенности $\mu^* > 0$. Рассмотрим $u_\varepsilon^* = u^* + \varepsilon \phi^*$. Тогда выполняется равенство

$$\int (\nabla u_\varepsilon^*, \nabla \psi) dx - \int f |u_\varepsilon^*|^{\gamma-2} u_\varepsilon^* \psi dx = \lambda^* \int u_\varepsilon^* \psi dx + \varepsilon \mu^* \int \phi^* \psi dx + \bar{o}(\varepsilon), \quad (5.12)$$

где $\bar{o}(\varepsilon)$ не зависит от $\psi \in B^1 := \{\psi \in \Phi : \|\psi\| \leq 1\}$. Отсюда следует, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждой функции $\psi \in B^1$ будет выполняться

строгое неравенство

$$\frac{\int (\nabla u_{\varepsilon_0}^*, \nabla \psi) dx - D_u F(u_{\varepsilon_0}^*)(\psi)}{\int u_{\varepsilon_0}^* \psi dx} > \lambda^*. \quad (5.13)$$

Однако в силу (3.5) для $u_{\varepsilon_0}^* \in S$ найдется такая функция $\psi \in B^1$, что будет выполняться противоположное неравенство

$$\frac{\int (\nabla u_{\varepsilon_0}^*, \nabla \psi) dx - D_u F(u_{\varepsilon_0}^*)(\psi)}{\int u_{\varepsilon_0}^* \psi dx} \leq \lambda^*. \quad (5.14)$$

Получили противоречие. Таким образом, справедливо утверждение 3) леммы. Докажем утверждение 1) леммы. Из (3.1) и (3.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int (\nabla u^*, \nabla \phi^*) dx - \lambda^* \int u^* \phi^* dx &= \int f(x) |u^*|^{\gamma-2} u^* \phi^* dx, \\ \int (\nabla u^*, \nabla \phi^*) dx - \lambda^* \int u^* \phi^* dx &= (\gamma - 1) \int f(x) |u^*|^{\gamma-2} u^* \phi^* dx. \end{aligned}$$

Значит, $\int f(x) |u^*|^{\gamma-2} u^* \phi^* dx = 0$ и $\lambda^* = L(u^*, \phi^*)$. Лемма доказана. $\square$

Докажем утверждение 4) теоремы. Для этого покажем, что в данном случае $\text{Ker } D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ представляет собой одномерное подпространство в H , порожденное ϕ^* . В силу (5.4) ядро $\text{Ker } D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ совпадает с собственным подпространством минимального собственного значения оператора $-\Delta - \lambda^* - (\gamma - 1)f|u^*|^{\gamma-2}$ на Ω с нулевым граничным условием. Отметим, что по условию $f \in L^\infty(\Omega)$ и, как было показано выше, $u^* \in L^\infty(\Omega)$. Тогда из теории разрешимости эллиптических краевых задач ([1], [8]) вытекает, что рассматриваемое минимальное собственное значение является простым. Следовательно, ядро $\text{Ker } D_u^2 E(u^*, \lambda^*)$ одномерно. Таким образом, применяя утверждение 2) теоремы 2.2, получаем утверждение 4) теоремы 3.1. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту данной статьи за полезные замечания и предложения по улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, А. С. Дынин, *Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области*, Докл. АН СССР, **146**:3 (1962), 511–514.
- [2] A. Ambrosetti, J. G. Azorero, I. Peral, *Existence and multiplicity results for some nonlinear elliptic equations: a survey. Dedicated to the memory of Gaetano Fichera (Italian)*, Rend. Mat. Appl. (7), **20** (2000), 167–198.
- [3] J. Appell, E. de Pascale, A. Vignoli, *Nonlinear spectral theory*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 10, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
- [4] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rational Mech. Anal., **52**:2 (1973), 161–180.
- [5] E. N. Dancer, *On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems*, Indiana Univ. Math. J., **23** (1974), 1069–1076.
- [6] M. del Pino, *Positive solutions of a semilinear elliptic equation on a compact manifold*, Nonlinear Anal., **22**:11 (1994), 1423–1430.
- [7] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [8] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

- [9] Я. Ш. Ильясов, *О глобальных положительных решениях параболических уравнений с неопределенным знаком нелинейности*, Дифференциальные уравнения, **41**:4 (2005), 518–526.
- [10] Я. Ш. Ильясов, *Нелокальные исследования бифуркаций решений нелинейных эллиптических уравнений*, Изв. РАН, сер. мат., **66**:6 (2002), 19–48.
- [11] Y. Ilyasov, *On positive solutions of indefinite elliptic equations*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333**:6 (2001), 533–538.
- [12] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, 1956.
- [13] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Math., vol. 426, Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [14] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977.
- [15] T. Ouyang, *On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ on compact manifolds, Part II*, Indiana Univ. Math. J., **40**:3 (1991), 1083–1141.
- [16] P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Func. Anal., **7** (1971), 487–513.
- [17] M. Struwe, *Variational Methods. Application to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [18] P. Tolksdorf, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. Partial Differential Equations, **8**:7 (1983), 773–817.
- [19] E. Ziedler, *Nonlinear functional analysis and its applications, I–IV*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1988–1990.