Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Т. Садэтов, О рациональных изоморфизмах алгебр Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 1, 52–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa1762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:37:38

О рациональных изоморфизмах алгебр Ли^{*}.

© 2007. С. Т. САДЭТОВ

§1. Краткие формулировки

1.1. Введение. Для алгебры Ли $\mathfrak{f}$ пусть $z\mathfrak{f}$ — ее центр, $U(\mathfrak{f})$ — ее универсальная обертывающая алгебра и $P(\mathfrak{f})$ — соответствующая градуированная алгебра Пуассона, см., например, [1, пп. I.4.1, II.1.5].

Определение 1. Будем называть алгебры Ли $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{h}$ *рационально изоморфными*, если существуют локализации алгебр Пуассона $P(\mathfrak{f})$ и $P(\mathfrak{h})$, являющиеся изоморфными.

Определение 2. Будем называть алгебры Ли $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{h}$ *некоммутативно рационально изоморфными*, если существуют локализации универсальных обертывающих алгебр $U(\mathfrak{f})$ и $U(\mathfrak{h})$, являющиеся изоморфными.

1.2. Формулировки основных результатов. Пусть $\mathfrak{n}$ — конечномерная некоммутативная нильпотентная алгебра Ли, у которой кольцо полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления порождено линейными функциями. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли. Рассматриваются полупрямые суммы $\mathfrak{n} \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g}$ по произвольным представлениям $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{der } \mathfrak{n}$, таким, что для ρ -инвариантного подпространства $z\mathfrak{n}$ найдется ρ -инвариантное дополнение, которое обозначается через V . Для алгебры Ли $\mathfrak{f}$, содержащей в качестве идеала $z\mathfrak{n}$, локализации ассоциативных алгебр $U(\mathfrak{f})$, $P(\mathfrak{f})$ по $z\mathfrak{n}$ обозначим через $\tilde{U}(\mathfrak{f})$, $\tilde{P}(\mathfrak{f})$. (Локализация по $z\mathfrak{n}$ по определению означает, что разрешается делить справа и слева на элементы из $z\mathfrak{n} \setminus 0$.)

В работе установлено, что $\tilde{P}(\mathfrak{n} \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g})$ разлагается в тензорное произведение двух подалгебр Пуассона. Первый тензорный сомножитель — стандартная алгебра Пуассона (ненулевого симплектического пространства), а второй изоморфен локализации по $z\mathfrak{n}$ алгебры Пуассона алгебры Ли $(z\mathfrak{n}) \dot{+} \mathfrak{g}$. Точнее, существует изоморфная алгебре Ли $\mathfrak{g}$ «косо вложенная» подалгебра Ли $\mathfrak{g}_P$ в алгебре Ли $\tilde{P}(\mathfrak{n}) \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g}$, обладающая следующими свойствами: $[z\mathfrak{n}, \mathfrak{g}_P] \subseteq z\mathfrak{n}$, подалгебра Ли $(z\mathfrak{n}) \dot{+} \mathfrak{g}_P$ изоморфна подалгебре Ли $(z\mathfrak{n}) \dot{+} \mathfrak{g}$ и второй тензорный сомножитель — локализация подалгебры Пуассона в $\tilde{P}(\mathfrak{n} \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g})$, порожденной подалгеброй Ли $(z\mathfrak{n}) \dot{+} \mathfrak{g}_P$.

Если $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq z\mathfrak{n}$, то аналогичное тензорное разложение установлено для локализованной универсальной обертывающей алгебры $\tilde{U}(\mathfrak{n} \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g})$. А именно, $\tilde{U}(\mathfrak{n} \dot{+}_{\rho} \mathfrak{g})$ разлагается в тензорное произведение двух ассоциативных подалгебр. Первый тензорный сомножитель — алгебра Вейля, а второй изоморфен локализации по $z\mathfrak{n}$ универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $(z\mathfrak{n}) \dot{+} \mathfrak{g}$. Точнее, существует изоморфная $\mathfrak{g}$ «косо вложенная» подалгебра Ли $\mathfrak{g}_U$ в алгебре

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 06-01-00275

Ли $\tilde{U}(\mathfrak{n}) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$, обладающая следующими свойствами: $[z\mathfrak{n}, \mathfrak{g}_U] \subseteq z\mathfrak{n}$, подалгебра Ли $(z\mathfrak{n}) \dashv \mathfrak{g}_U$ также изоморфна подалгебре Ли $(z\mathfrak{n}) \dashv \mathfrak{g}$ и второй тензорный сомножитель — локализация ассоциативной подалгебры в $\tilde{U}(\mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$, порожденной подалгеброй Ли $(z\mathfrak{n}) \dashv \mathfrak{g}_U$.

Рассмотрим часто встречающийся частный случай, когда $\mathfrak{n}$ является $(2n+1)$ -мерной подалгеброй Гейзенберга H_n и подпредставление представления ρ на центре zH_n алгебры Гейзенберга тривиально. Из тензорных разложений предыдущих двух абзацев вытекает совпадение локализованных алгебр Пуассона $\tilde{P}(H_n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$ и $\tilde{P}(H_n \oplus \mathfrak{g}_P)$, а также локализованных универсальных обертывающих алгебр $\tilde{U}(H_n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$ и $\tilde{U}(H_n \oplus \mathfrak{g}_U)$ (после естественных отождествлений). При этом элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}_P$ получаются из элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ добавлением однородных квадратичных многочленов от элементов дополнения к центру алгебры Гейзенберга H_n . В разд. 2.7 приведены явные формулы (8), выражающие базисы подалгебр Ли $\mathfrak{g}_P$ в $\tilde{P}(H_n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_U$ в $\tilde{U}(H_n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ через естественным образом согласованные базисы в H_n и $\mathfrak{g}$. Эти формулы имеют гамильтонову интерпретацию и находят приложения, см. разд. 2.8, часть которых связана с интегрируемостью в механике, а часть — с гипотезой Гельфанда–Кириллова. Они доставляют явную запись гомоморфизма Дюфлю (ассоциативных алгебр), строящегося в лемме 10.1.5 из [2] и факторизующегося в рассматриваемом частном случае до изоморфизма.

Приведен класс нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$ ступени 3, удовлетворяющих сформулированным в первом абзаце разд. 1.2 условиям и обобщающих алгебру Гейзенберга H_n , см. разд. 2.0.

Все результаты статьи справедливы над полем характеристики 0.

1.3. Истоки доказательства. Стандартное представление группы $Sp(2n)$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ канонически продолжается до представления этой группы в симметрическом квадрате $\mathbb{S}^2 \mathbb{R}^{2n}$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Отождествляя естественным образом $\mathbb{S}^2 \mathbb{R}^{2n}$ с алгеброй Ли $sp(2n)$ группы $Sp(2n)$, получаем изоморфизм $H_n \dashv sp(2n) \rightarrow P_n^{\leq 2}$ алгебр Ли (см. разд. 2.1). Кроме того, полупрямая сумма $sp(2n) \dashv_{\text{ad}} sp(2n)$ изоморфна прямой сумме $sp(2n) \oplus sp(2n)$ (при диагональном вложении второго слагаемого в прямую сумму).

1.4. Приложение к гипотезе Гельфанда–Кириллова.

Определение 3. Тело S называется *телом Вейля над полем K* , $K \subset S$, если оно обладает системой порождающих $p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N$ над K , таких, что

$$[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Система порождающих (1) тела Вейля S называется его базисом Вейля, см. [3], [9].

Согласно [3], для универсальной обертывающей алгебры конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{f}$ существует тело частных $\text{Fract } U(\mathfrak{f})$. Центр тела $\text{Fract } U(\mathfrak{f})$ обозначается через $z \text{Fract } U(\mathfrak{f})$ (что согласуется с обозначением центра тела как алгебры Ли).

Гипотеза 1 (Гельфанд, Кириллов [3]). Пусть основное поле алгебраически замкнуто и имеет нулевую характеристику. Для конечномерной алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{h}$ тело $\text{Fract } U(\mathfrak{h})$ является телом Вейля над своим центром $z \text{Fract } U(\mathfrak{h})$.

Гипотеза Гельфанда–Кириллова доказана для разрешимых алгебр Ли ([3]–[7]), алгебр Ли $sl(n)$ [3], некоторых полупрямых сумм полупростых и абелевых алгебр Ли ([3], [8], [9]) и алгебр Ли размерности ≤ 8 [10]. Начиная с размерности 9, к ней построены контрпримеры Алева–Оомса–Ван ден Берга [9]. Они охватывают алгебры Ли, отвечающие полупрямым произведениям неспециальных связных полупростых алгебраических групп, построенных по представлениям на линейных пространствах с тривиальным стабилизатором элемента общего положения. Но в этих контрпримерах гипотеза Гельфанда–Кириллова остается верной после небольшого ослабления: конечное центральное расширение тела $\text{Fract } U(\mathfrak{h})$ является телом Вейля над своим центром [9]. Из п. 4) теоремы 2 (см. разд. 2.4 настоящей статьи) вытекает

Следствие 1. *Из справедливости гипотезы Гельфанда–Кириллова для подалгебры Ли $(z\mathfrak{n}) \vdash \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{n} \vdash_{\rho} \mathfrak{g}$ вытекает ее справедливость для всей этой алгебры Ли.*

§2. Развернутые формулировки

2.0. Пример нильпотентной алгебры Ли ступени 3, кольцо полиномиальных инвариантов которой порождено одной линейной функцией. Согласно результату из [12], если характеристика основного поля не равна 2, то расширение произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью алгебры Гейзенберга H_n определяется заданием симплектического представления $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow sp(V)$, характера $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(zH_n)$ и класса когомологий из $H^2(\mathfrak{g}, zH_n)$ относительно этого характера.

Выберем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ четномерной абелевой, представление ρ ненулевым нильпотентным, характер χ нулевым, а класс когомологий зададим коциклом вида $\nu\kappa$, где ν — невырожденная кососимметрическая 2-форма на $\mathfrak{g}$, а κ — ненулевой элемент из zH_n (так как $\mathfrak{g}$ абелева, то $\nu\kappa$ действительно является коциклом). Соответствующее расширение обозначим через $H_n + \mathfrak{g}$.

Так как представление ρ нильпотентно, то алгебра Ли $H_n + \mathfrak{g}$ нильпотентна. Рассмотрим матрицу скобки Пуассона в базисе линейного пространства $\mathfrak{g} \oplus V$, дополняющего zH_n в $H_n + \mathfrak{g}$. Определитель этой матрицы является полиномом от элементов пространства V со свободным членом $\kappa^{2n+\dim \mathfrak{g}} \det \nu$. Факторалгебра $(H_n + \mathfrak{g})/zH_n$ нильпотентна ступени 2 (ввиду нетривиальности ρ). Но zH_n — центр алгебры Ли $H_n + \mathfrak{g}$, а следовательно, $H_n + \mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли ступени 3.

2.1. Обозначения. Пусть все рассматриваемые ниже объекты определены над полем k . Если в обозначениях явно не указывается иное поле, тензорные произведения, алгебры Ли дифференцирований $\text{der}(\cdot)$, эндоморфизмов $\text{End}(\cdot)$ и линейных операторов $gl(\cdot)$, $sp(\cdot)$ берутся над k . Мы предполагаем, что $\text{char } k \neq 2$, но в некоторых разделах налагается дополнительное ограничение $\text{char } k = 0$. Пусть $n = (\dim \mathfrak{n} - \dim z\mathfrak{n})/2$. Пусть A_n — алгебра Вейля с $2n$ образующими и P_n — соответствующая ей градуированная алгебра. Тогда P_n — стандартная алгебра Пуассона $2n$ -мерного симплектического пространства. Пусть $A_n^{\leq i} \subset A_n$, $P_n^{\leq i} \subset P_n$, $i = 0, 1, 2$, — подалгебры Ли полиномов степени $\leq i$, пусть $P_n^{\geq i}$, P_n^i — линейные подпространства в P_n , порожденные мономами степени $\geq i$ и степени i соответственно. Тогда P_n^2 — также подалгебра Ли. Пусть $\psi: P_n^{\leq 2} \rightarrow A_n^{\leq 2}$ — канонический изоморфизм алгебр Ли, определяемый формулами $\psi: x \rightarrow x$, $xy \rightarrow (x \otimes y + y \otimes x)/2$ для $x, y \in P_n^1$. Пусть $\psi: P_n \rightarrow A_n$ — его каноническое

продолжение при $\text{char } k = 0$ до изоморфизма $P_n^{\leq 2}$ -модулей по формуле (3) из п. 2.4.5 книги [2], производящее симметризацию по всем сомножителям из P_n^1 . Определим в подалгебре Ли $A_n^{\leq 2}$ подалгебру Ли A_n^2 формулой $A_n^2 = \psi(P_n^2)$.

Индукированные представлением ρ представления на алгебре Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ и ассоциативной алгебре $\tilde{U}(\mathfrak{n})$ и их подпредставления будем обозначать той же буквой.

2.2. Конструкция. Пусть P — алгебра Пуассона с единицей 1, пусть $\tau: \hat{\mathfrak{e}} \rightarrow \mathfrak{e}$ — изоморфизм алгебр Ли (абстрактной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{e}}$ на подалгебру Ли $\mathfrak{e}$ в P), и пусть $p(\mathfrak{e}) \subseteq P$ — подалгебра Пуассона, порожденная подалгеброй Ли $\mathfrak{e}$ и элементом 1.

Лемма 1. *Изоморфизм τ алгебр Ли однозначно продолжается до сюръективного гомоморфизма τ алгебр Пуассона $P(\hat{\mathfrak{e}}) \rightarrow p(\mathfrak{e})$, переводящего 1 в 1.*

Если сюръективный гомоморфизм τ инъективен, обозначим подалгебру Пуассона $p(\mathfrak{e})$ через $P(\mathfrak{e})$. Если $P = \tilde{P}(\mathfrak{f})$ и подалгебра Ли $\mathfrak{e}$ в $\tilde{P}(\mathfrak{f})$ содержит идеал $z\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{f}$, то в силу включений $P(z\mathfrak{n}) \subset P(\mathfrak{e}) \subset \tilde{P}(\mathfrak{f})$ определена локализация подалгебры Пуассона $P(\mathfrak{e})$ по $z\mathfrak{n}$, обозначаемая через $\tilde{P}(\mathfrak{e})$.

Аналогичная конструкция необходима и в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{f}$. А именно, пусть U — ассоциативная алгебра с единицей 1, пусть $\tau: \hat{\mathfrak{e}} \rightarrow \mathfrak{e}$ — изоморфизм алгебр Ли (абстрактной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{e}}$ на подалгебру Ли $\mathfrak{e}$ в U) и пусть $u(\mathfrak{e}) \subseteq U$ — ассоциативная подалгебра, порожденная подалгеброй Ли $\mathfrak{e}$ и элементом 1.

Лемма 2 (см. п. 2.1.3 в [2]). *Изоморфизм τ алгебр Ли однозначно продолжается до сюръективного гомоморфизма τ ассоциативных алгебр $U(\hat{\mathfrak{e}}) \rightarrow u(\mathfrak{e})$, переводящего 1 в 1.*

Если сюръективный гомоморфизм τ инъективен, обозначим ассоциативную подалгебру $u(\mathfrak{e})$ через $U(\mathfrak{e})$. Если $U = \tilde{U}(\mathfrak{f})$ и подалгебра Ли $\mathfrak{e}$ в $\tilde{U}(\mathfrak{f})$ содержит идеал $z\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{f}$, то в силу включений $U(z\mathfrak{n}) \subset U(\mathfrak{e}) \subset \tilde{U}(\mathfrak{f})$ определена локализация ассоциативной подалгебры $U(\mathfrak{e})$ по $z\mathfrak{n}$, обозначаемая через $\tilde{U}(\mathfrak{e})$.

2.3. Случай нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ произвольной ступени. Пусть в разд. 2.3 $\text{char } k = 0$. Пусть $\pi_P: \tilde{P}(\mathfrak{n}) \dashv_\rho \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — проекция параллельно идеалу — подалгебре Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n})$. Символ $\cong$ обозначает изоморфизм ассоциативных алгебр (алгебр Пуассона).

Теорема 1. *Существуют «косо вложенные» подалгебра Пуассона P_n в алгебре Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ и подалгебра Ли $\mathfrak{g}_P$ в алгебре Ли $\tilde{P}(\mathfrak{n}) \dashv_\rho \mathfrak{g}$, такие, что*

1) *имеет место следующее разложение алгебры Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ в тензорное произведение подалгебр Пуассона:*

$$\tilde{P}(\mathfrak{n}) \cong P_n \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}); \quad (2)$$

2) *проекция $\pi_P|_{\mathfrak{g}_P}: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ — изоморфизм алгебр Ли;*

3) $\mathfrak{g}_P \subset P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}) \dashv \mathfrak{g}$;

4) *имеет место следующее разложение алгебры Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n} \dashv_\rho \mathfrak{g})$ в тензорное произведение подалгебр Пуассона:*

$$\tilde{P}(\mathfrak{n} \dashv_\rho \mathfrak{g}) \cong P_n \otimes \tilde{P}((z\mathfrak{n}) \dashv_{\rho_P} \mathfrak{g}_P), \quad (3)$$

где $\rho_P: \mathfrak{g}_P \rightarrow \text{End } z\mathfrak{n}$ — представление, определяемое коммутатором в алгебре Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n} \dashv_\rho \mathfrak{g})$.

Из утверждения 3) теоремы 1 и равенства $[z\mathfrak{n}, \tilde{P}(\mathfrak{n})] = 0$ вытекает, что $[(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1}(A), \chi] = [A, \chi] \in z\mathfrak{n}$ для $A \in \mathfrak{g}$, $\chi \in z\mathfrak{n}$, т.е. при изоморфизме алгебр Ли $\pi_P|_{\mathfrak{g}_P} : \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ представление ρ_P переходит в ограничение на $z\mathfrak{n}$ представления ρ .

Согласно определению 1, изоморфизм (3) алгебр Пуассона означает рациональный изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{n} \oplus [(z\mathfrak{n}) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}])/z\mathfrak{n}$, где идеал Ли $z\mathfrak{n}$ вложен диагонально.

При гамильтоновой интерпретации формулы (8) (см. разд. 2.7) будет использовано следующее

Замечание 0. Продолжим по линейности изоморфизмы алгебр Ли $\text{id} : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$, $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_P$ до изоморфизма линейных пространств $\pi^{-1} : \mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n} + \mathfrak{g}_P$. Пусть $Z := \{Z_1, \dots, Z_{\dim z\mathfrak{n}}\}$, $z := \{z_1, \dots, z_{2n}\}$ и $N := \{N_{\alpha}\}$ — базисы в $z\mathfrak{n}$, V и $\mathfrak{g}$ соответственно. Тогда, согласно п. (2), (3) теоремы 1, базис $\{N_{\alpha}\}$ в $\mathfrak{g}$ при изоморфизме алгебр Ли $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1}$ отображается в базис $\{N_{\alpha} + P_{\alpha}(z; Z)\}$ в $\mathfrak{g}_P$. Здесь $P_{\alpha}(z; Z)$ — полиномы от $z_1, \dots, z_{2n}$ с коэффициентами в поле рациональных функций $\tilde{P}(z\mathfrak{n})$, состоящие из мономов степени ≥ 2 . Построенный изоморфизм линейных пространств π^{-1} для $j_i, k_i, l_{\alpha} \in k$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g} \ni & \left(\sum Z_i j_i, \sum z_i k_i, \sum N_{\alpha} l_{\alpha} \right) \\ & \xrightarrow{\pi^{-1}} \left(\sum Z_i j_i, \sum z_i k_i, \sum [N_{\alpha} + P_{\alpha}(z; Z)] l_{\alpha} \right) \in \mathfrak{n} + \mathfrak{g}_P. \end{aligned}$$

Можно рассматривать z как общий элемент сопряженного пространства V^* . Действительно, если зафиксировать значения линейных функционалов $z_1, \dots, z_{2n}$ на линейном пространстве V^* , то получается конкретный элемент пространства V^* . Аналогично, базисы Z , N , $N + P := \{N_{\alpha} + P_{\alpha}\}$ можно рассматривать как общие элементы сопряженных пространств $(z\mathfrak{n})^*$, $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}_P^*$. Сопряженный к π изоморфизм π^* будет рациональным отображением:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g})^* &= (z\mathfrak{n})^* \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}^* \ni (Z, z, N) \\ &\xrightarrow{\pi^*} (Z, z, N + P(z; Z)) \in (z\mathfrak{n})^* \oplus V^* \oplus \mathfrak{g}_P^* = (\mathfrak{n} + \mathfrak{g}_P)^*. \end{aligned}$$

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 конструкция первого тензорного сомножителя P_n допускает большой произвол, однако подалгебра Пуассона $P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})$ определена инвариантно, независимо от этого произвола. Если зафиксировать тензорный сомножитель P_n , то подалгебра Ли $\mathfrak{g}_P$ определяется единственным образом. Вне зависимости от выбора тензорного сомножителя P_n при дополнительном условии $\rho_{z\mathfrak{n}} = 0$ подалгебра Ли $\mathfrak{g}_P$ единственна.

2.4. Случай нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ степени 2. Пусть в разд. 2.4–2.8 выполнено включение $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq z\mathfrak{n}$. Тогда утверждения разд. 2.3 имеют место и для локализации универсальной обертывающей алгебры и их можно уточнить. Пусть $\varphi : P(\mathfrak{n}) \rightarrow U(\mathfrak{n})$ — канонический изоморфизм $\mathfrak{n}$ -модулей, определенный в пп. 2.4.5–2.4.9 из [2]. Тогда его ограничение $zP(\mathfrak{n}) = P(z\mathfrak{n}) \rightarrow U(z\mathfrak{n}) \subset U(\mathfrak{n})$, согласно разд. 4.8.12 из [2], является изоморфизмом ассоциативных коммутативных подалгебр. Рассмотрим его естественное продолжение $\tilde{P}(\mathfrak{n}) \rightarrow \tilde{U}(\mathfrak{n})$ на локализацию, для $c \in P(z\mathfrak{n})$, $u \in P(\mathfrak{n})$ определяемое формулой $\varphi(c^{-1}u) = \varphi(c)^{-1}\varphi(u)$. Полученный изоморфизм $\mathfrak{n}$ -модулей обозначим тем же символом φ .

Тогда его ограничение

$$\varphi: \tilde{P}(zn) \rightarrow \tilde{U}(zn) \quad (4)$$

является изоморфизмом ассоциативных коммутативных алгебр. Пусть $\pi_P: \tilde{P}(n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ и $\pi_U: \tilde{U}(n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — проекции параллельно подалгебре Пуассона $\tilde{P}(n)$ и ассоциативной подалгебре $\tilde{U}(n)$ соответственно.

Теорема 2. *Существуют «косо вложенные» подалгебра Пуассона $P_n \subset \tilde{P}(n)$, подалгебра Вейля $A_n \subset \tilde{U}(n)$ и подалгебры Ли $\mathfrak{g}_P \subset \tilde{P}(n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_U \subset \tilde{U}(n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$, такие, что*

1) *имеют место разложения*

$$\tilde{P}(n) \cong P_n \otimes \tilde{P}(zn), \quad \tilde{U}(n) \cong A_n \otimes \tilde{U}(zn), \quad (5)$$

$$\varphi = (\psi \otimes \text{id})|_{P_n \otimes \tilde{P}(zn)}, \quad P_n^1 \otimes \tilde{P}(zn) = V \otimes \tilde{P}(zn); \quad (6)$$

2) *проекции $\pi_P|_{\mathfrak{g}_P}: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ и $\pi_U|_{\mathfrak{g}_U}: \mathfrak{g}_U \rightarrow \mathfrak{g}$ — изоморфизмы алгебр Ли;*

3) $\mathfrak{g}_P \subset P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_U \subset A_n^2 \otimes \tilde{U}(zn) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$;

4) *имеют место разложения*

$$\tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}) \cong P_n \otimes \tilde{P}((zn) \dashv_{\rho_P} \mathfrak{g}_P), \quad \tilde{U}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}) \cong A_n \otimes \tilde{U}((zn) \dashv_{\rho_U} \mathfrak{g}_U),$$

где $\rho_P: \mathfrak{g}_P \rightarrow \text{End } zn$ и $\rho_U: \mathfrak{g}_U \rightarrow \text{End } zn$ — представления, определяемые коммутаторами в $\tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$ и $\tilde{U}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$ соответственно.

Из утверждения 3) теоремы 2 и равенства $[zn, \tilde{U}(n)] = 0$ вытекает, что для $A \in \mathfrak{g}$, $b \in zn$ выполнено соотношение $[(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})^{-1}(A), b] = [A, b] \in zn$, т. е. при изоморфизме алгебр Ли $\pi_U|_{\mathfrak{g}_U}: \mathfrak{g}_U \rightarrow \mathfrak{g}$ представление ρ_U переходит в ограничение на zn представления ρ .

Замечание 2. В доказательстве теоремы 2 конструкция первых тензорных сомножителей P_n , A_n допускает определенный произвол, однако подалгебры Ли $P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)$, $A_n^2 \otimes \tilde{U}(zn)$ определены инвариантно, независимо от этого произвола. Если зафиксировать тензорные сомножители P_n , A_n , то подалгебры Ли $\mathfrak{g}_P$, $\mathfrak{g}_U$ определяются единственным образом. Вне зависимости от выбора тензорных сомножителей P_n , A_n при дополнительном условии $\rho_{zn} = 0$ подалгебры Ли $\mathfrak{g}_P$, $\mathfrak{g}_U$ единственны.

2.5. Конструкция алгебр Ли $n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$, удовлетворяющих условию $[n, n] \subseteq zn$. Пусть V — линейное пространство размерности $2n$. Операция внешнего умножения индуцирует на линейном пространстве $V \oplus \wedge^2 V$ структуру нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{m}$ степени 2 с центром $\wedge^2 V$. Пусть $\rho_V: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ — произвольное представление и $\wedge^2 \rho_V$ — индуцированное представление в пространстве $\wedge^2 V$. Пусть $W \subseteq \wedge^2 V$ — такое $\mathfrak{g}$ -инвариантное подпространство, что отображение $V \times V \xrightarrow{\wedge^2} \wedge^2 V \xrightarrow{/W} (\wedge^2 V)/W$ невырожденно как кососимметрическая билинейная форма на V со значениями в поле рациональных функций от элементов пространства $(\wedge^2 V)/W$. Пусть $\mathfrak{z}$ — линейное пространство, содержащее $(\wedge^2 V)/W$, на которое каким-либо образом продолжено представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} + V$ — нильпотентная алгебра Ли степени 2 с центром $zn = \mathfrak{z}$, кольцо коприсоединенных инвариантов которой порождается линейными функциями, а $n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ — алгебра Ли, удовлетворяющая условиям,

сформулированным в первом абзаце разд. 1.2. Можно показать, что таким способом получаются все алгебры Ли, удовлетворяющие этим условиям.

2.6. Случай $\rho_{zn} = 0$. Пусть в разд. 2.6–2.8 выполняется равенство $\rho_{zn} = 0$. Пусть $\oplus$ обозначает прямую сумму алгебр Ли.

Следствие 2. (а) *Имеют место следующие равенства локализованных алгебр Пуассона и алгебр Ли соответственно:*

$$\tilde{P}(\mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g}) = \tilde{P}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}_P), \quad \tilde{P}(\mathfrak{n}) \dashv_{\rho} \mathfrak{g} = \tilde{P}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{g}_P;$$

(б) *имеют место следующие равенства локализованных универсальных обертывающих алгебр и алгебр Ли соответственно:*

$$\tilde{U}(\mathfrak{n} \dashv_{\rho} \mathfrak{g}) = \tilde{U}(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{g}_U), \quad \tilde{U}(\mathfrak{n}) \dashv_{\rho} \mathfrak{g} = \tilde{U}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{g}_U,$$

где подалгебры Ли $\mathfrak{g}_P, \mathfrak{g}_U$ определены в теореме 2.

Подслучай $\mathfrak{n} = H_n$. Коммутатор в H_n определяет невырожденное билинейное кососимметрическое отображение $V \times V \rightarrow zH_n$ и, тем самым, при выборе базисного вектора κ в пространстве zH_n , симплектическую структуру $\omega: V \times V \rightarrow \kappa$. Из того, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \text{der } H_n$, вытекает, что $[\rho_V(A)b, c] + [b, \rho_V(A)c] = \rho_{zH_n}(A)[b, c] = 0$ для $A \in \mathfrak{g}, b, c \in V$. Отсюда, беря коэффициент при κ , получаем тождество $\omega(\rho_V(A)b, c) + \omega(b, \rho_V(A)c) = 0$. Иначе говоря, представление $\rho_V: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ является симплектическим относительно ω . Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что симплектическое относительно ω представление ρ_V определяет полупрямую сумму $H_n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$ рассматриваемого в этом разделе вида.

Замечание 3. При фиксированных H_n и $\mathfrak{g}$ следствие 2 устанавливает более тонкую эквивалентность, чем предполагалось в гипотезе 1, но только внутри класса алгебр Ли $H_n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}$, параметризованного произвольными симплектическими относительно ω представлениями ρ_V .

2.7. Явный вид подалгебр $\mathfrak{g}_P, \mathfrak{g}_U$, аннулирующих идеал Гейзенберга H_n . Рассмотрим симплектическое относительно структуры ω (определенной в разд. 2.6) стандартное представление st_V алгебры Ли $sp(2n)$ на линейном пространстве V . Пусть $H_n \dashv_{\text{st}} sp(2n)$ — полупрямая сумма по представлению st , отвечающему представлению st_V . К полупрямой сумме $H_n \dashv_{\text{st}} sp(2n)$ применимо следствие 2. Пусть $z_1, \dots, z_{2n}$ — базис в V , удовлетворяющий условию $[z_i, z_{n+j}] = \kappa \delta_{ij}$ для $1 \leq i, j \leq n$. Рассмотрим стандартные в базисе $z_1, \dots, z_{2n}$ подалгебры Ли $\mathfrak{g} = sp(2n), gl(n), so(n) \subset sp(2n)$ и ограничения $\rho = \text{st}|_{\mathfrak{g}}$ на них представления st . Явная формула для подалгебр Ли

$$\mathfrak{g}_P \subset \tilde{P}(H_n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_U \subset \tilde{U}(H_n) \dashv_{\rho} \mathfrak{g},$$

аннулирующих подалгебру Гейзенберга H_n , будет приведена в следствиях 3, 3', 3''.

Пусть $\delta_i^{\top} = (\underbrace{0 \dots 1 \dots 0}_n)$. Элементы алгебры $sp(2n)$, в базисе $z_1, \dots, z_{2n}$ определяемые матрицами

$$\begin{pmatrix} -\delta_j \delta_i^{\top} & 0 \\ 0 & \delta_i \delta_j^{\top} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \delta_i \delta_j^{\top} + \delta_j \delta_i^{\top} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta_i \delta_j^{\top} + \delta_j \delta_i^{\top} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

обозначим соответственно через

$$L_{i+n,j+n} = -L_{ji}, \quad L_{i,j+n} = L_{j,i+n}, \quad L_{i+n,j} = L_{j+n,i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Пусть $x = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & \kappa E_n \\ -\kappa E_n & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$, где E_n — единичная $n \times n$ -матрица. Рассмотрим элементы алгебры Пуассона $\tilde{P}(H_n \lrcorner_{\text{st}} sp(2n))$, определяемые формулой

$$(L_P)_{kl} := L_{kl} - \left[\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (z_1, \dots, z_{2n}) I^{-1\top} \right]_{kl} \equiv L_{kl} - \kappa^{-1} \begin{pmatrix} -xy^\top & xx^\top \\ -yy^\top & yx^\top \end{pmatrix}_{kl}, \quad (8)$$

$1 \leq k, l \leq 2n$. Здесь, как обычно, $I^{-1\top}$ обозначает матрицу, транспонированную к I^{-1} .

Следствие 3. Подмножество $\{(L_P)_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2n\}$ является системой порождающих в подалгебре Ли $sp(2n)_P$. Подстановка $\psi: z_k z_l \rightarrow (z_k \otimes z_l + z_l \otimes z_k)/2$ в формуле (8) приводит к системе порождающих $\{(L_U)_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2n\}$ в подалгебре Ли $sp(2n)_U$. Коммутационные соотношения в системах порождающих $\{(L_P)_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2n\}$, $\{(L_U)_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2n\}$ могут быть записаны теми же формулами, что и в системе порождающих $\{L_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2n\}$.

В частности, рассмотрим отображение, оставляющее $z_1, \dots, z_{2n}, \kappa$ на месте и переводящее $(L_P)_{kl}$ в $L_{kl} - \left[\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} (z_1, \dots, z_{2n}) I^{-1\top} \right]_{kl}$, $1 \leq k, l \leq 2n$. Оно опре-

деляет в координатах бирациональный пуассонов изоморфизм из следствия 2(a) сопряженных пространств к алгебрам Ли: $(H_n \oplus sp(2n))^* \leftarrow (H_n \lrcorner_{\text{st}} sp(2n))^*$. Рациональное отображение из замечания 0 принимает вид $P(z; \kappa) = -(z \otimes z) I^{-1\top}$.

Факторизация гомоморфизма Дюффо, см. п. 10.1.5 в [2]. Введем поле $K = \tilde{U}(zH_n)$ и алгебру Ли $\mathfrak{n} = A_n^{\leq 1} \otimes K$; обозначим через 1_{A_n} единицу в алгебре Вейля A_n и через A факторалгебру универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{n})$ по идеалу, порожденному элементом $1 - 1_{A_n}$. Гомоморфизм Дюффо над полем K запишется в виде $U(\mathfrak{n} \lrcorner (\mathfrak{g} \otimes K)) \rightarrow A \otimes U(\mathfrak{g} \otimes K)$; его ограничение является гомоморфизмом $U(\mathfrak{n} \lrcorner \mathfrak{g}) \rightarrow A \otimes U(\mathfrak{g})$ над полем k , ядро которого порождается элементом $1 - 1_{A_n}$. После факторизации по ядру он дает первое из равенств следствия 2(b), так как $A \cong \tilde{U}(H_n)$.

Формулы (8) дают прозрачное явное описание изоморфизма Дюффо. Доказательство этих формул элементарно.

Пусть подалгебра Ли $gl(n) \subset sp(2n)$ порождается первыми матрицами из набора (7). Тогда $\{L_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ — базис в $gl(n)$. Пусть подалгебра Ли $so(n) \subset gl(n)$ определяется базисом $\{M_{ij} := L_{ij} - L_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Рассмотрим подмножество системы порождающих (8)

$$\{(L_P)_{ij} = L_{ij} + \kappa^{-1} z_i z_{n+j} \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

являющееся и подмножеством в алгебре Пуассона $\tilde{P}(H_n \lrcorner_p gl(n))$.

Следствие 3'. Подмножество $\{(L_P)_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ является базисом в подалгебре Ли $gl(n)_P$. Коммутационные соотношения в базисе $\{(L_P)_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ те же, что и в базисе $\{L_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

Рассмотрим подмножество

$$\{(M_P)_{ij} := M_{ij} + \kappa^{-1}(z_i z_{n+j} - z_j z_{n+i}) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

в алгебре Пуассона $\tilde{P}(H_n \dashv_\rho so(n))$.

Следствие 3''. Подмножество $\{(M_P)_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ является базисом в подалгебре Ли $so(n)_P$. Коммутационные соотношения в базисе $\{(M_P)_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ те же, что и в базисе $\{M_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

2.8. Приложения. Следствие 3'' для $n = 3, 4, \dots$ и поля $k = \mathbb{R}$ было использовано автором в [13]. В [13] инварианты алгебры Ли $so(n)_P$ оказались дополнительными интегралами в интегрируемых случаях вращательно-поступательного движения твердого тела в жидкости при постоянной тяге специального направления.

Замечание 4. Изоморфизмы из разд. 2.7 позволяют получить единую конструкцию базисов Вейля тел $\text{Fract } U(\mathfrak{h})$ для алгебр Ли $\mathfrak{h} = L_{6,3}, L_{8,13}, L_{8,14}, L_{8,15}, L_{8,16}$ в [10], исходя из базисов Вейля для тел $\text{Fract } U(\cdot)$ алгебр Ли $sl(2), H_1, H_2$. В [10] система порождающих $\{(L_U)_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq 2\}$ для аннулирующей подалгебры Ли $sp(2)_U$ в $\tilde{U}(H_1) \dashv_{\text{st}} sp(2)$ была получена с использованием автоморфизма второго порядка алгебры Ли $H_1 \dashv_{\text{st}} sp(2)$.

§ 3. Результат А. Джозефа

В работе [6] рассматривается произвольная конечномерная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{n}$ над полем k , $\text{char } k = 0$. В этой работе установлено, что в локализации алгебры Пуассона $P(\mathfrak{n})$ по ее центру существует стандартная подалгебра Пуассона Q_s размерности $2s = \dim \mathfrak{n} - \text{tr. deg } zP(\mathfrak{n})$, такая, что

$$P(\mathfrak{n}) \otimes_{zP(\mathfrak{n})} \text{Fract } zP(\mathfrak{n}) \cong Q_s \otimes \text{Fract } zP(\mathfrak{n}), \quad (9)$$

и, таким образом, указанная локализация также является стандартной алгеброй Пуассона $2s$ -мерного симплектического пространства, но над полем $\text{Fract } zP(\mathfrak{n})$, см. пп. 3.2, 2.6.iv, 2.6.v в [6].

§ 4. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся тем, что кольцо $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ порождено над полем $\tilde{P}(z\mathfrak{n})$ линейным пространством V , и тем, что базис в V алгебраически независим над полем $\tilde{P}(z\mathfrak{n})$. Забудем до конца абзаца про скобку Пуассона на коммутативной ассоциативной алгебре $\tilde{P}(\mathfrak{n})$. Пусть J — идеал коммутативного ассоциативного кольца $\tilde{P}(\mathfrak{n})$, порожденный линейным пространством V . Тогда J — алгебра над полем $\tilde{P}(z\mathfrak{n})$, состоящая из полиномов с нулевым свободным членом от элементов пространства V . Следовательно, произвольный элемент u кольца $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ однозначно представляется в виде суммы

$$u = C + w, \quad C \in \tilde{P}(z\mathfrak{n}), \quad w \in J. \quad (10)$$

Поэтому $\dim_{\tilde{P}(zn)} \tilde{P}(n)/J = 1$. Следовательно, J — максимальный идеал в кольце $\tilde{P}(n)$. Так как кольцо J порождено над полем $\tilde{P}(zn)$ линейным пространством V , а линейные пространства zn и V являются $\mathfrak{g}$ -инвариантными, то идеал J и его квадрат J^2 также являются $\mathfrak{g}$ -инвариантными.

Воспользуемся формулой (9). Так как кольцо полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{n}$ порождено линейными функциями, то в этом разложении $zP(n) = P(zn)$ и $s = n$. Пусть $u_1, \dots, u_{2n}$ — базис в подпространстве Q_n^1 , такой, что $[u_i, u_{n+j}] = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Так как для произвольного элемента кольца $\tilde{P}(n)$ имеет место разложение (10), то $u_i = C_i + w_i$, где $C_i \in \tilde{P}(zn)$ и $w_i \in J$ для $1 \leq i \leq 2n$. Тогда $[w_i, w_{n+j}] = \delta_{ij}$ для $1 \leq i, j \leq n$. Пусть P_n — коммутативная ассоциативная подалгебра, порожденная элементами $w_1, \dots, w_{2n}$ над k . Тогда разложение (9) справедливо и с заменой подалгебры Пуассона Q_n на подалгебру Пуассона P_n : это и будет разложение (2). Таким образом, утверждение 1) теоремы выполнено. Так как $P_n^{\geq 1}$ — максимальный идеал в кольце P_n , то $P_n^{\geq 1} \otimes \tilde{P}(zn)$ — максимальный идеал в кольце $P_n \otimes \tilde{P}(zn)$. Так как $w_i \in J$ для $1 \leq i \leq 2n$, то $P_n^{\geq 1} \subseteq J$. Так как J — алгебра над полем $\tilde{P}(zn)$, то $P_n^{\geq 1} \otimes \tilde{P}(zn) \subseteq J$. Но вложенные друг в друга максимальные идеалы совпадают. Поэтому

$$P_n^{\geq 1} \otimes \tilde{P}(zn) = J. \quad (11)$$

Пусть $A \in \mathfrak{g}$. Определим дифференциальную 1-форму $\nu(A)$ формулой

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n ([A, w_{n+i}]dw_i - [A, w_i]dw_{n+i}). \quad (12)$$

Так как $\tilde{P}(n)$ — идеал в алгебре Ли $\tilde{P}(n) \lrcorner_{\rho} \mathfrak{g}$, то $[A, w_i] \in \tilde{P}(n)$ для $1 \leq i \leq n$. Следовательно, коэффициенты формы $\nu(A)$ — полиномы от $w_1, \dots, w_{2n}$ над $\tilde{P}(zn)$. Из соотношений

$$[[A, w_i], w_{n+j}] + [w_i, [A, w_{n+j}]] = [A, [w_i, w_{n+j}]] = [A, \delta_{ij}] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

согласно п. 4.6.8 из [2], вытекает, что $\nu(A)$ замкнута. Так как $\text{char } k = 0$, форма $\nu(A)$ интегрируема до полинома $a \in P_n \otimes \tilde{P}(zn)$, удовлетворяющего условию $da = \nu(A)$. Тогда

$$[A, w_i] \equiv -\frac{\partial a}{\partial w_{n+i}} = [a, w_i], \quad [A, w_{n+i}] \equiv \frac{\partial a}{\partial w_i} = [a, w_{n+i}]. \quad (13)$$

Так как квадрат идеала $P_n^{\geq 1}$ есть идеал $P_n^{\geq 2}$, то из (11) вытекает, что $P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn) = J^2$. В силу $\mathfrak{g}$ -инвариантности идеала J имеет место включение $[A, w_i] \in J$ для любого i , $1 \leq i \leq 2n$. Следовательно, из (13) вытекает, что $a \in J^2 + \tilde{P}(zn)$. Тогда можно всегда выбрать $a \in J^2$. Но тот факт, что J^2 является $\mathfrak{g}$ -инвариантной подалгеброй Пуассона в $\tilde{P}(n)$, позволяет рассмотреть подалгебру Ли

$$\mathfrak{g}_P = (\text{ann } P_n) \cap ([P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn)] \lrcorner_{\rho} \mathfrak{g}). \quad (14)$$

Напомним, что $\pi_P: [P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn)] \lrcorner_{\rho} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — это факторизация по идеалу $P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn)$, определенная в разд. 2.3. Согласно предыдущему абзацу, для элемента A существует элемент $A - a \in \mathfrak{g}_P$. Следовательно, $\pi_P|_{\mathfrak{g}_P}: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ — сюръекция. Из равенства $(P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn)) \cap z(P_n \otimes \tilde{P}(zn)) = 0$ вытекает, что элемент

$A \in \mathfrak{g}$ однозначно определяет элемент $a \in P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn)$, удовлетворяющий условию (13) или, что равносильно, условию $A - a \in \mathfrak{g}_P$. Поэтому $\pi_P|_{\mathfrak{g}_P}: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ — инъекция и, следовательно, требуемый изоморфизм.

Из определения (14) вытекает утверждение 3) теоремы 1. Для упрощения доказательства в этом и следующем абзацах можно забыть о скобке Пуассона на коммутативных ассоциативных алгебрах. Тогда в них $\otimes$ обозначает то же, что и $\otimes$. Идеал, порождаемый J в коммутативном кольце $\tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$, обозначим через $J[\mathfrak{g}]$. Тогда $\tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})/J[\mathfrak{g}] = \tilde{P}(zn) \otimes P(\mathfrak{g})$ и ограничение на подалгебру $P(\mathfrak{g})$ в $\tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g})$ гомоморфизма факторизации по идеалу $J[\mathfrak{g}]$ — тождественное отображение. Продолжим изоморфизм алгебр Ли $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_P$, $A \rightarrow A - a$, до гомоморфизма алгебр Пуассона $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})_*^{-1}: P(\mathfrak{g}) \rightarrow p(\mathfrak{g}_P)$ согласно конструкции из разд. 2.2. Но проекция $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1}$ состоит в вычитании зависящего от A элемента a , лежащего в $P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(zn) \subset J$. Поэтому сквозной гомоморфизм колец $P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})^{-1}} p(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{J[\mathfrak{g}]} \tilde{P}(zn) \otimes P(\mathfrak{g})$ является тождественным отображением. Следовательно, гомоморфизм алгебр Пуассона $(\pi_P|_{\mathfrak{g}_P})_*^{-1}$ является изоморфизмом. Подалгебра Пуассона $p(\mathfrak{g}_P)$ обозначается через $P(\mathfrak{g}_P)$ в соответствии с разд. 2.1.

Из того, что проекция $\pi_P: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ параллельно подалгебре Пуассона $\tilde{P}(n)$ является изоморфизмом, вытекает второе равенство в следующей цепочке разложений:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(n \dashv_{\rho} \mathfrak{g}) &= \tilde{P}(n) \otimes P(\mathfrak{g}) = \tilde{P}(n) \otimes P(\mathfrak{g}_P) \\ &= (P_n \otimes \tilde{P}(zn)) \otimes P(\mathfrak{g}_P) = P_n \otimes \tilde{P}((zn) \dashv_{\rho_P} \mathfrak{g}_P). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь в первом равенстве использовано разложение (2). В последнем равенстве использована ассоциативность тензорного произведения линейных пространств и сворачивание в подалгебру Пуассона полупрямой суммы.

Но из доказанного утверждения 3) вытекает, что $(zn) + \mathfrak{g}_P$ — полупрямая сумма $(zn) \dashv_{\rho_P} \mathfrak{g}_P$ для некоторого представления ρ_P . Следовательно, коммутативная ассоциативная алгебра $\tilde{P}((zn) \dashv_{\rho_P} \mathfrak{g}_P)$ — подалгебра Пуассона. Так как она коммутирует с P_n ввиду определения (14), то последнее тензорное разложение справедливо как тензорное разложение подалгебр Пуассона. Таким образом, утверждение 4) теоремы установлено. Теорема 1 доказана.

§5. Доказательство теоремы 2

Коммутатор $[,]$ определяет на линейном пространстве V невырожденную косимметрическую 2-форму со значениями в $\tilde{P}(zn)$. Над полем $\tilde{P}(zn)$ ее можно привести к каноническому виду некоторым линейным преобразованием S . Пусть $w_1, \dots, w_{2n}$ — базис в $V \otimes \tilde{P}(zn)$ над $\tilde{P}(zn)$, такой, что $[w_i, w_{n+j}] = \delta_{ij}$ для $1 \leq i, j \leq n$. Пусть P_n — ассоциативная коммутативная подалгебра над k , порожденная элементами $w_1, \dots, w_{2n}$. Продолжим коммутатор $[w_i, w_{n+j}] = \delta_{ij}$ до скобки Пуассона на P_n с помощью тождества Лейбница. Тогда P_n — подалгебра Пуассона в алгебре Пуассона $\tilde{P}(n)$. По построению выполнено второе равенство в (6). Продолжение линейного преобразования S над полем $\tilde{P}(zn)$ на однородные полиномиальные формы от элементов линейного пространства

V доказывает первое из разложений (5). Продолжение линейного преобразования S на суммы произведений не более t элементов из V с коэффициентами из $\tilde{P}(zn)$, где $t = 2, 3, \dots$, дает второе из разложений (5).

Коммутатор $[\ , \]$ на линейном пространстве V , разложения (5), изоморфизм (4) и изоморфизм $\mathfrak{n}$ -модулей φ (см. разд. 2.4) определяют отождествление алгебр Ли

$$P_n^{\leq 1} \otimes \tilde{P}(zn) = \tilde{P}(zn) + V \otimes \tilde{P}(zn) = A_n^{\leq 1} \otimes \tilde{P}(zn),$$

такое, что $\varphi|_{P_n^{\leq 1}} = \psi|_{P_n^{\leq 1}}$. Воспользуемся тем, что построение изоморфизмов $\psi: P_n \rightarrow A_n$, см. разд. 2.1, и $\varphi: P(\mathfrak{n}) \rightarrow U(\mathfrak{n})$ п. 2.4.5 в [2] состоит в симметризации по всем множителям первой степени, а $\tilde{P}(zn) = \tilde{U}(zn)$ — центр алгебр $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ и $\tilde{U}(\mathfrak{n})$. Тогда $\varphi|_{P_n \otimes \tilde{P}(zn)} = (\psi \otimes \text{id})|_{P_n \otimes \tilde{P}(zn)}$. То есть выполнено первое из равенств (6). Таким образом, утверждение 1) теоремы 2 доказано.

Так как подпространства V и zn являются $\mathfrak{g}$ -инвариантными, из второго из равенств (6) вытекает, что подпространство $P_n^1 \otimes \tilde{P}(zn)$, его квадрат $P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)$ и подпространство $P_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(zn)$ являются $\mathfrak{g}$ -инвариантными. Пусть $A \in \mathfrak{g}$. Определим дифференциальную 1-форму $\nu(A)$ формулой (12). Так как $[A, w_i] \in P_n^1 \otimes \tilde{P}(zn)$, то $\nu(A)$ линейна по $w_1, \dots, w_{2n}$. Из соотношения

$$[[A, w_i], w_{n+j}] + [w_i, [A, w_{n+j}]] = [A, [w_i, w_{n+j}]] = [A, \delta_{ij}] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

согласно п. 4.6.8 из [2], вытекает, что $\nu(A)$ замкнута. Так как $\text{char } k \neq 2$, эта 1-форма интегрируема до полинома $a \in P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)$, такого, что $da = \nu(A)$. Тогда справедливы формулы (13) и $\mathfrak{g}$ -инвариантность подпространства $P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)$ позволяет рассмотреть подалгебру Ли

$$\mathfrak{g}_P = (\text{ann } P_n) \cap ([P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)] \dashv_\rho \mathfrak{g}). \quad (16)$$

Здесь, в отличие от (14), подалгебра Ли $P_n^{\geq 2}$ заменена на P_n^2 .

Лемма 3. $zP_n^2 = z(P_n^2 \otimes \tilde{P}(zn)) = 0$, $zP_n^{\leq 2} = P_n^0 = k$.

Повторим рассуждения последних четырех абзацев доказательства теоремы 1 с заменой $P_n^{\geq 2}$ на P_n^2 и поля k характеристики 0 на поле характеристики, не равной 2. В силу леммы 3 $\pi_P: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathfrak{g}$ — требуемый в теореме 2 изоморфизм. Часть теоремы 2, касающаяся алгебр Пуассона, доказана.

Предложение 1. Изоморфизмы алгебр Ли $\psi: P_n^{\leq 2} \rightarrow A_n^{\leq 2}$, $\text{id}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ и отождествление $\tilde{P}(zn) = \tilde{U}(zn)$ продолжаются до изоморфизма алгебр Ли $\Psi: [P_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(zn)] \dashv_\rho \mathfrak{g} \rightarrow [A_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(zn)] \dashv_\rho \mathfrak{g}$.

Применим изоморфизм Ψ предложения 1 к подалгебре Ли $\mathfrak{g}_P$, определенной формулой (16). Аннулятор подалгебры Пуассона P_n совпадает с аннулятором подалгебры Ли $P_n^{\leq 2}$ и при изоморфизме Ψ переходит в аннулятор подалгебры Ли $A_n^{\leq 2}$. Следовательно,

$$\mathfrak{g}_U := \Psi(\mathfrak{g}_P) \quad (17)$$

— подалгебра Ли в $\tilde{U}(\mathfrak{n}) \dashv_\rho \mathfrak{g}$, коммутирующая с A_n и такая, что ее проекция на подалгебру Ли $\mathfrak{g}$ вдоль ассоциативной подалгебры $A_n \otimes \tilde{U}(zn)$ является требуемым изоморфизмом алгебр Ли $\pi_U: \mathfrak{g}_U \rightarrow \mathfrak{g}$. Из включения $\mathfrak{g}_U \subset A_n^2 \otimes \tilde{U}(zn) \dashv_\rho \mathfrak{g}$ вытекает утверждение 3) теоремы 2.

Изоморфизм алгебр Ли $(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_U$, согласно конструкции из разд. 2.2, индуцирует сюръективный гомоморфизм ассоциативных алгебр $(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})_*^{-1} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow u(\mathfrak{g}_U)$, переводящий 1 в 1. Покажем, что он инъективен. Пусть по-прежнему $\{N_\alpha\}$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Его образ при изоморфизме алгебр Ли $(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})_*^{-1}$ обозначим через $(N_U)_\alpha$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта [2] $\{1, N_{\alpha_1}^{n_1}, \dots, N_{\alpha_m}^{n_m}, n_j \in \mathbb{N}, \alpha_1 < \dots < \alpha_m\}$ — базис в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. Сюръективный гомоморфизм ассоциативных алгебр $(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})_*^{-1} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow u(\mathfrak{g}_U) \subset U(\mathfrak{n} \lrcorner_\rho \mathfrak{g})$ на этом базисе в $U(\mathfrak{g})$ определяется подстановкой элементов $(N_U)_\alpha$ вместо N_α . Согласно третьему абзацу настоящего параграфа и предложению 1, $N_\alpha - (N_U)_\alpha \in P_n^2 \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}) = A_n^2 \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})$. Поэтому сквозное отображение $U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{n} \lrcorner_\rho \mathfrak{g})/nU(\mathfrak{n} \lrcorner_\rho \mathfrak{g})$ является тождественным. По соглашению из разд. 2.2 ассоциативная подалгебра $u(\mathfrak{g}_U)$ обозначается через $U(\mathfrak{g}_U)$.

Из того, что проекция $(\pi_U|_{\mathfrak{g}_U})_*^{-1} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_U)$ параллельно ассоциативной подалгебре $\tilde{U}(\mathfrak{n})$ является изоморфизмом, вытекает второе равенство в следующей цепочке разложений:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\mathfrak{n} \lrcorner_\rho \mathfrak{g}) &= \tilde{U}(\mathfrak{n})U(\mathfrak{g}) = \tilde{U}(\mathfrak{n})U(\mathfrak{g}_U) \\ &= (A_n \otimes \tilde{U}(z\mathfrak{n}))U(\mathfrak{g}_U) = A_n \otimes \tilde{U}((z\mathfrak{n}) \lrcorner_{\rho_U} \mathfrak{g}_U). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь в первом равенстве использовано второе из разложений (5). Из доказанного утверждения 3) вытекает, что $(z\mathfrak{n}) + \mathfrak{g}_U$ — подалгебра Ли, являющаяся полупрямой суммой $(z\mathfrak{n}) \lrcorner_{\rho_U} \mathfrak{g}_U$ для некоторого представления ρ_U . Во втором равенстве использована ассоциативность умножения в $\tilde{U}(\mathfrak{n} \lrcorner_\rho \mathfrak{g})$, сворачивание произведения в локализованную универсальную обертывающую алгебру полупрямой суммы, а также то, что полученная алгебра коммутирует с A_n ввиду определения (17). Теорема 2 доказана.

Доказательство предложения 1. Пусть D'' и D' — единственные дифференцирования алгебры Пуассона $\tilde{P}(\mathfrak{n})$ и локализованной универсальной обертывающей алгебры $\tilde{U}(\mathfrak{n})$ соответственно, продолжающие дифференцирование D алгебры Ли $\mathfrak{n}$. Тогда, согласно предложению 2.4.9(iv) из [2], $D' \circ \varphi = \varphi \circ D''$. То есть $[A, (\psi \otimes \text{id})b] = (\psi \otimes \text{id})([A, b])$ для $A \in \mathfrak{g}$ и $b \in P_n \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})$ в силу (6). Так как, кроме того, $(\psi \otimes \text{id})|_{P_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})}$ — изоморфизм подалгебр Ли $P_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}) \rightarrow A_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})$, а $\text{id} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — изоморфизм подалгебр Леви, то $\Psi : [P_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})] \lrcorner_\rho \mathfrak{g} \rightarrow [A_n^{\leq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})] \lrcorner_\rho \mathfrak{g}$ — изоморфизм полупрямых сумм.

§6. Доказательство замечаний 1 и 2

Инвариантность определения подалгебры Пуассона $P_n^{\geq 2} \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}) = J^2$ в теореме 1 и подалгебр Ли $P_n^2 \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}) = V^2 \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n})$, $A_n^2 \otimes \tilde{U}(z\mathfrak{n}) = \varphi(V^2 \otimes \tilde{P}(z\mathfrak{n}))$ в теореме 2 очевидна. Единственность выбора подалгебр Ли $\mathfrak{g}_P$, $\mathfrak{g}_U$ после выбора ассоциативных подалгебр P_n , A_n вытекает из формул (14), (16) для $\mathfrak{g}_P$, $\mathfrak{g}_U$. При $\rho|_{z\mathfrak{n}} = 0$ в формулах (14) и (16) подалгебра Ли $\text{ann } P_n$ заменяется на подалгебру Ли $\text{ann } \tilde{P}(\mathfrak{n})$.

Доказательство следствия 2 вытекает из разложений (15) и (18). Действительно, поскольку $(\rho_P)_{z\mathfrak{n}} = (\rho_U)_{z\mathfrak{n}} = \rho_{z\mathfrak{n}} = 0$, подалгебры Ли $\mathfrak{g}_P$, $\mathfrak{g}_U$ коммутируют с H_n и полупрямая сумма в последнем выражении в (15) и (18) является прямой. Свернем первые тензорные произведения в последних выражениях в

(15), (18) с помощью разложений (5). Получим первые разложения из следствия 2.

Благодарности. Автор благодарит своего научного руководителя В. В. Козлова, увлекшего его в 1999 г. данной проблемой после того, как был получен основной исходный результат — следствие 3'', и Э. Б. Винберга за большой труд по прочтению многочисленных вариантов рукописи и полезные замечания, в частности, приведшие к обобщению теорем 1, 2 со случая редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, упрощению доказательств теорем 1, 2, следствия 3, указание на лемму 10.1.5 в [2] и вывод из нее. Он благодарит А. В. Болсинова, Ю. И. Манина, А. Л. Онищика, Г. Л. Литвинова, В. Л. Попова, Ю. Г. Прохорова, Д. А. Тимашева за обсуждения.

Автор благодарен Математическому институту университета г. Бонна за гостеприимство и Немецкой службе академических обменов (DAAD) за двухмесячную стипендию A/04/06212.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Б. Винберг, *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия*, УМН, **56:1** (2001), 3–62.
- [2] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978.
- [3] I. M. Gelfand, A. A. Kirillov, *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci., **31** (1966), 506–523.
- [4] W. Borho, P. Gabriel, R. Rentschler, *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren*, Lecture Notes in Math., vol. 357, Springer-Verlag, 1973.
- [5] A. Joseph, *Proof of the Gelfand–Kirillov conjecture for solvable Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **45:1** (1974), 1–10.
- [6] A. Joseph, *A generalization of the Gelfand–Kirillov conjecture*, Amer. J. Math., **99:6** (1977), 1151–1165.
- [7] J. C. McConnell, *Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand–Kirillov conjecture*, Proc. London Math. Soc., **29:3** (1974), 453–484.
- [8] Nghiêm-Xuân Hai, *Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand et Kirillov*, Bull. Soc. Math. France, **107:3** (1979), 241–267.
- [9] J. Alev, A. Ooms, M. Van den Bergh, *A class of counterexamples to the Gelfand–Kirillov conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc., **348:5** (1996), 1709–1716.
- [10] J. Alev, A. Ooms, M. Van den Bergh, *The Gelfand–Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight*, J. Algebra, **227:2** (2000), 549–581.
- [11] И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов, *Структура тела Ли, связанного с полупростой расщепимой алгеброй Ли*, Функци. анализ и его прил., **3:1** (1969), 7–26.
- [12] С. Т. Садэтов, *О расширениях алгебр Ли с помощью алгебры Гейзенберга*, Матем. заметки, **78:5** (2005), 745–747.
- [13] С. Т. Садэтов, *Расширение общих интегрируемых случаев уравнений Эйлера–Пуассона с постоянной в сопутствующих осях силой тяги*, Докл. РАН, **386:4** (2002), 461–463.
- [14] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
- [15] В. И. Арнольд, А. В. Гивенталь, *Симплектическая геометрия*, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 4, ВИНТИ, М., 1985, 7–139.