Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, Эллиптические R -матрицы Белавина и обменные алгебры, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 59–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:23:54

Эллиптические R -матрицы Белавина и обменные алгебры*

© 2002. А. В. ОДЕССКИЙ

Введение

В этой статье изучаются алгебры Замолотчикова для эллиптических R -матриц Белавина. Это семейство ассоциативных алгебр $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$, где $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — целочисленная решетка, порожденная элементами 1 и τ , $\text{Im } \tau > 0$, $\eta \in \mathbb{C}$, а n и k — взаимно простые натуральные числа, причем $1 \leq k < n$. Алгебра $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ определяется образующими $\{x_i(u); i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, u \in \mathbb{C}\}$ и соотношениями

$$\frac{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0) \theta_0(v-u+\eta) \cdots \theta_{n-1}(v-u+\eta)}{\theta_0(\eta) \cdots \theta_{n-1}(\eta) \theta_0(v-u) \cdots \theta_{n-1}(v-u)} x_\alpha(u) x_\beta(v) \\ = \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{\beta-\alpha-r}(v-u)} x_{\beta-r}(v) x_{\alpha+r}(u).$$

Здесь $\theta_\alpha(u) \in \Theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$ — тета-функция порядка n (см. разд. 1.1). Эти формулы отличаются от формул Белавина [2], но легко проверить, что соответствующие алгебры Замолотчикова изоморфны. В обозначениях Белавина роль числа k играет примитивный корень из 1 степени n .

Известно, что при изучении интегрируемых моделей, связанных с эллиптическими R -матрицами, возникают дополнительные трудности (по сравнению с тригонометрическим и рациональным случаями). Те же трудности возникают просто при изучении представлений алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ или соответствующей алгебры L -операторов.

Дело в том, что у этих алгебр нет аналога подалгебр Картана. В результате непонятно, как строить аналог модулей со старшим весом, поскольку вообще нет понятия веса.

Способ преодоления этих трудностей был найден Бакстером [1] при изучении XYZ-модели (случай $n = 2$, $k = 1$). На его языке это сведение XYZ-модели к SOS-модели (vertex-face correspondence). На алгебраическом языке это построение гомоморфизмов из алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ в другие алгебры, для которых уже существуют модули со старшим весом. При $k = 1$ это алгебры Замолотчикова для динамических эллиптических R -матриц (см. [4]). При других k такие алгебры устроены сложнее и соответствующие модели, вероятно, неизвестны. Опишем эти алгебры сначала для случая $k = 1$. Это алгебры $X_1^m(\Gamma, \mu; \lambda)$, порожденные коммутативной подалгеброй, состоящей из мероморфных функций переменных $y_1, \dots, y_m$, и образующими $e_1(u), \dots, e_m(u)$, $u \in \mathbb{C}$. Соотношения имеют вид $e_\alpha(u) f(y_1, \dots, y_m) = f(y_1 + \lambda, \dots, y_\alpha + \lambda - \mu, \dots, y_m + \lambda) e_\alpha(u)$, т. е. $y_1, \dots, y_m$ — динамические переменные; здесь $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ фиксированы. Кроме

*Работа поддержана грантами CRDF RPI-2254, РФФИ 99-01-01169, РФФИ 00-15-96579 и INTAS-00-00055.

того, $e_\alpha(u)e_\beta(v) = \varphi_1 e_\beta(v)e_\alpha(u) + \varphi_2 e_\alpha(v)e_\beta(u)$, где $\alpha \neq \beta$, а φ_1 и φ_2 — мероморфные функции переменных u, v, y_α, y_β (частное некоторых тета-функций). Если $\alpha = \beta$, то $e_\alpha(u)e_\alpha(v) = e_\alpha(v)e_\alpha(u)$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм из алгебры $Z_{n,1}(\Gamma, \eta)$ в такую алгебру, заданный формулой $x_i(u) \mapsto \sum_{1 \leq \alpha \leq m} \theta_i(y_\alpha + u)e_\alpha(nu)$. Здесь $\theta_i(z)$ — тета-функции порядка n (см. разд. 1.1, а также [3]).

Заметим, что для любых ненулевых функций $\lambda_1(u), \dots, \lambda_m(u)$ формулы $e_\alpha(u) \mapsto \lambda_\alpha(u)e_\alpha(u)$ задают автоморфизм алгебры $X_1^m(\Gamma, \mu; \lambda)$. Коммутативная подалгебра, состоящая из мероморфных функций переменных $y_1, \dots, y_m$, является аналогом подалгебры Картана.

В статье строятся аналогичные гомоморфизмы для произвольных n и k . При этом оказывается, что структура алгебр, в которые отображается алгебра $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$, зависит от разложения числа $\frac{n}{k}$ в цепную дробь. А именно, пусть $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$, где $n_\alpha \geq 2$ и p — длина цепной дроби. Существует семейство алгебр $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, где $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$, $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$. Алгебра $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ порождена коммутативной подалгеброй, состоящей из мероморфных функций переменных $\{y_{\alpha,j}; 1 \leq j \leq p, 1 \leq \alpha \leq m_j\}$, и образующими $\{e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u); 1 \leq \alpha_j \leq m_j, u \in \mathbb{C}\}$. При этом $y_{\alpha,j}$ — динамические переменные, т.е. $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)y_{\beta,j} = (y_{\beta,j} + \lambda_j)e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)$, если $\beta \neq \alpha_j$, и $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)y_{\alpha_j,j} = (y_{\alpha_j,j} + \lambda_j - \mu)e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)$. Соотношения между $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)$ имеют вид

$$e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(v) = \psi_1 e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(v)e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(u) + \psi_2 e_{\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(v)e_{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_p}(u) \\ + \dots + \psi_p e_{\beta_1, \dots, \beta_{p-1}, \alpha_p}(v)e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_p}(u) + \psi_{p+1} e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(v)e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u).$$

Здесь $\psi_1, \dots, \psi_{p+1}$ — некоторые функции переменных $u, v, y_{\alpha_1,1}, \dots, y_{\alpha_p,p}, y_{\beta_1,1}, \dots, y_{\beta_p,p}$. В этом соотношении $\alpha_j \neq \beta_j$ при всех $1 \leq j \leq p$. Если $\alpha_j = \beta_j$ для какого-то j , то имеются аналогичные соотношения (см. §3). Для любых ненулевых функций $h_{\alpha,j}(u)$ формулы $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u) \mapsto h_{\alpha_j,j}(u)e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)$ задают автоморфизм алгебры $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Для любых $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $Z_{n,k}(\Gamma, \eta) \rightarrow X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, заданный формулой

$$x_i(u) \mapsto \sum_{1 \leq \alpha_1 \leq m_1, \dots, 1 \leq \alpha_p \leq m_p} w_i(y_{\alpha_1,1} + \nu_1 u, \dots, y_{\alpha_p,p} + \nu_p u) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(nu).$$

Здесь $\nu_1, \dots, \nu_p, \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ выражаются через η и $n_1, \dots, n_p$, где $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$ (см. §4), а $w_i(u_1, \dots, u_p) \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ — тета-функции p переменных (см. разд. 1.2).

Существует также двойственная конструкция, когда алгебра с аналогичными обменными соотношениями отображается в алгебру $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$. На этот раз структура этой алгебры зависит от разложения в цепную дробь числа $\frac{n}{n-k}$. А именно, пусть $\frac{n}{n-k} = n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}$, где $n'_\alpha \geq 2$ и p' — длина цепной дроби. Существует семейство алгебр $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$, где $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{p'} \in \mathbb{C}$. Алгебра $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$ порождена образующими $\{e(u, u_1, \dots, u_{p'}); u, u_1, \dots, u_{p'} \in \mathbb{C}\}$,

а ее соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} & e(u, u_1, \dots, u_{p'})e(v, v_1 + \mu_1, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) \\ &= f_1 e(v, u_1, \dots, u_{p'})e(u, v_1 + \mu_1, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) \\ & \quad + f_2 e(v, v_1, u_2, \dots, u_{p'})e(u, u_1 + \mu_1, v_2 + \mu_2, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) + \dots \\ & \quad + f_{p'+1} e(v, v_1, \dots, v_{p'})e(u, u_1 + \mu_1, \dots, u_{p'} + \mu_{p'}), \end{aligned}$$

где $f_1, \dots, f_{p'+1}$ — некоторые функции переменных $u, u_1, \dots, u_{p'}, v, v_1, \dots, v_{p'}$ (см. §5).

Существует гомоморфизм $Y_{p'}(\Gamma, \mu, \mu_1, \dots, \mu_{p'}) \rightarrow Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$, заданный формулой

$$e(nu, u_1, \dots, u_{p'}) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x_{1-\alpha}(u) w_\alpha(u_1 + \gamma_1 u, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} u).$$

Здесь $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{p'}, \gamma_1, \dots, \gamma_{p'}$ выражаются через $\eta, n'_1, \dots, n'_{p'}$ (см. §6), а $w_\alpha(u_1, \dots, u_{p'}) \in \Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$ — тета-функции p' переменных (см. разд. 1.2).

Опишем теперь содержание статьи.

В §1 собраны основные факты о тета-функциях, которые нам понадобятся. В разд. 1.1 рассматривается пространство тета-функций одной переменной, которое обозначается через $\Theta_{n,c}(\Gamma)$. Геометрически это голоморфные сечения линейного расслоения на эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Gamma$ с классом Черна n ; здесь $c \in \mathbb{C}$ — непрерывный параметр расслоения. Подробнее см. [6], хотя у нас несколько иные обозначения.

В разд. 1.2 вводится пространство тета-функций p переменных $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, где p — длина цепной дроби $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$, $n_\alpha \geq 2$. Это сечения некоторого специального линейного расслоения на $(\mathbb{C}/\Gamma)^p$. Можно показать также (нам это не понадобится), что пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ изоморфно пространству сечений голоморфного неразложимого расслоения на эллиптической кривой $\mathbb{C}/\Gamma$ степени n и ранга k . Известно, что такое расслоение только одно, с точностью до сдвига на эллиптической кривой.

В §2 описываются R -матрица Белавина и соответствующая алгебра Замолдчикова $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$.

В §3 строятся динамические алгебры с обменными соотношениями $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

В §4 строятся гомоморфизмы алгебры Замолдчикова $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ в динамические обменные алгебры $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

В §5 строятся полиспектральные обменные алгебры $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$.

В §6 строится гомоморфизм из алгебры $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$ в алгебру Замолдчикова $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$.

При этом выясняется, что пространство образующих $\{x_i(u); i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, u \in \mathbb{C}\}$ алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ при фиксированном u естественно изоморфно пространству тета-функций $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ и двойственно пространству $\Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$. Соответствующая двойственность между этими пространствами описывается в разд. 1.3.

Основные результаты статьи содержатся в предложениях 6 и 7. В предложении 6 строятся гомоморфизмы из алгебры Замолдчикова $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ в алгебры с обменными соотношениями и с динамическими переменными. В предложении 7 строится гомоморфизм из аналогичной алгебры с обменными соотношениями, но

без динамических переменных в алгебру Замолотчикова $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$. Оба утверждения вытекают из тождества (2), которое доказывается в разд. 1.2.

§1. Тета-функции, ассоциированные со степенью эллиптической кривой

1.1. Тета-функции одной переменной. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — целочисленная решетка, порожденная 1 и $\tau \in \mathbb{C}$, причем $\text{Im } \tau > 0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\Theta_{n,c}(\Gamma)$ пространство целых функций одной переменной, удовлетворяющих соотношениям

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+\tau) = (-1)^n e^{-2\pi i(nz-c)} f(z).$$

Отсюда вытекает, что для всякого элемента $\alpha + \beta\tau$ решетки Γ (т. е. в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) имеем

$$f(z + \alpha + \beta\tau) = (-1)^{n\beta} e^{-2\pi i\beta(nz-c+\tau(\beta-1)n/2)} f(z).$$

Известно [6], что $\dim \Theta_{n,c}(\Gamma) = n$, всякая функция $f \in \Theta_{n,c}(\Gamma)$ имеет ровно n нулей по модулю Γ (с учетом кратности) и сумма этих нулей равна c по модулю Γ . Пусть $\theta(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} (-1)^\alpha e^{2\pi i(\alpha z + \tau\alpha(\alpha-1)/2)}$. Ясно, что $\theta(z) \in \Theta_{1,0}(\Gamma)$. Из сказанного вытекает, что $\theta(0) = 0$ и это единственный нуль по модулю Γ . Легко проверить, что $\theta(-z) = -e^{-2\pi iz}\theta(z)$. Кроме того, известно, что $\theta(z)$ следующим образом разлагается в бесконечное произведение [6]:

$$\theta(z) = \prod_{\alpha \geq 1} (1 - e^{2\pi i\alpha\eta}) \cdot (1 - e^{2\pi iz}) \cdot \prod_{\alpha \geq 1} (1 - e^{2\pi i(z+\alpha\eta)})(1 - e^{2\pi i(\alpha\eta-z)}).$$

Определим линейные операторы $T_{1/n}$ и $T_{\tau/n}$, действующие в пространстве функций одной переменной:

$$T_{1/n}f(z) = f(z+1/n), \quad T_{\tau/n}f(z) = e^{2\pi i(z+1/(2n)-\tau(n-1)/(2n))} f(z+\tau/n).$$

Легко видеть, что $T_{1/n}T_{\tau/n} = e^{2\pi i/n}T_{\tau/n}T_{1/n}$. Простое вычисление показывает, что пространство $\Theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$ инвариантно относительно операторов $T_{1/n}$ и $T_{\tau/n}$. Ограничение этих операторов на пространство $\theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$ удовлетворяет дополнительным соотношениям $T_{1/n}^n = T_{\tau/n}^n = 1$. Пусть G_n — группа с образующими a, b, ε и соотношениями $ab = \varepsilon ba$, $a\varepsilon = \varepsilon a$, $b\varepsilon = \varepsilon b$, $a^n = b^n = \varepsilon^n = e$. Группа G_n есть центральное расширение группы $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$: элемент ε порождает нормальную подгруппу $C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $G_n/C_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Формулы $a \mapsto T_{1/n}$, $b \mapsto T_{\tau/n}$ задают неприводимое представление группы G_n в пространстве $\theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$ [6]. Выберем базис $\{\theta_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ в пространстве $\Theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$, в котором наши операторы действуют следующим образом: $T_{1/n}\theta_\alpha = e^{2\pi i\alpha/n}\theta_\alpha$, $T_{\tau/n}\theta_\alpha = \theta_{\alpha+1}$. Ясно, что это можно сделать однозначно с точностью до умножения на общую константу. А именно, положим

$$\theta_\alpha(z) = \theta(z + \tau\alpha/n)\theta(z + \tau\alpha/n + 1/n) \cdots \theta(z + \tau\alpha/n + (n-1)/n) \\ \times e^{2\pi i(\alpha z + \tau\alpha(\alpha-n)/(2n) + \alpha/(2n))}.$$

Легко проверить, что $\theta_\alpha(z) \in \Theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$, $\theta_{\alpha+n}(z) = \theta_\alpha(z)$ и

$$\theta_\alpha(z+1/n) = e^{2\pi i\alpha/n}\theta_\alpha(z), \quad \theta_\alpha(z+\tau/n) = e^{-2\pi i(z+1/(2n)-\tau(n-1)/(2n))}\theta_{\alpha+1}(z).$$

Ясно, что функции $\{\theta_\alpha(z - c/n - (n-1)/(2n)), \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ составляют базис в пространстве $\Theta_{n,c}(\Gamma)$.

Нам понадобится следующее тождество:

$$\theta(nz) = \frac{n\theta_0(z) \cdots \theta_{n-1}(z)e^{-2\pi izn(n-1)/2}}{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0)\theta(1/n) \cdots \theta((n-1)/n)}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что обе части равенства принадлежат пространству $\Theta_{n^2, \tau n(n-1)/2}(\Gamma)$ и имеют n^2 нулей по модулю Γ в точках $\{\alpha/n + \tau\beta/n; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$. Значит, они отличаются умножением на константу. Эту константу легко вычислить, разделив обе части равенства на $\theta(z)$ и вычисляя предел при $z \rightarrow 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Модулярный параметр τ фиксирован на протяжении всей статьи. Из контекста всегда будет ясно, чему равно n для $\theta_\alpha(z)$. При необходимости мы будем использовать обозначение $\theta_\alpha^n(z)$, если в формуле встречается несколько типов тета-функций.

1.2. Тета-функции нескольких переменных. Пусть n и k — взаимно простые натуральные числа, причем $1 \leq k < n$. Разложим $\frac{n}{k}$ в цепную дробь следующего вида: $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \frac{1}{n_3 - \cdots - \frac{1}{n_p}}}$, где все n_α больше или равны 2. Ясно,

что такое разложение существует и единственно. Обозначим через $d(m_1, \dots, m_q)$ определитель $q \times q$ -матрицы $(m_{\alpha\beta})$, где $m_{\alpha\alpha} = m_\alpha$, $m_{\alpha, \alpha+1} = m_{\alpha+1, \alpha} = -1$, $m_{\alpha, \beta} = 0$ при $|\alpha - \beta| > 1$. При $q = 0$ положим $d(\emptyset) = 1$. Из элементарной теории цепных дробей вытекает, что $n = d(n_1, \dots, n_p)$, $k = d(n_2, \dots, n_p)$.

Пусть опять $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — целочисленная решетка, порожденная 1 и τ , причем $\text{Im } \tau > 0$.

Обозначим через $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ пространство целых функций p переменных, удовлетворяющих соотношениям

$$f(z_1, \dots, z_\alpha + 1, \dots, z_p) = f(z_1, \dots, z_p),$$

$$f(z_1, \dots, z_\alpha + \tau, \dots, z_p) = (-1)^{n_\alpha} e^{-2\pi i(n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} - (\delta_{1, \alpha-1})\tau)} f(z_1, \dots, z_p).$$

Здесь $1 \leq \alpha \leq p$ и $z_0 = z_{p+1} = 0$, а $\delta_{1, \alpha}$ — символ Кронекера. Таким образом, функции $f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ периодичны по каждой переменной с периодом 1 и квазипериодичны с периодом τ . Из периодичности вытекает, что каждая функция из пространства $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ разлагается в ряд Фурье вида $f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{Z}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} e^{2\pi i(\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_p z_p)}$. Из квазипериодичности получаем систему линейных уравнений на коэффициенты:

$$a_{\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}-1, \alpha_p + n_p, \alpha_{p+1}-1, \dots, \alpha_p} = (-1)^{n_\alpha} e^{2\pi i(\alpha_p + \delta_{1, \alpha-1})\tau} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}.$$

Легко видеть, что эта система имеет $n = d(n_1, \dots, n_p)$ линейно независимых решений, каждое из которых (при $\text{Im } \tau > 0$, $n_1, \dots, n_p \geq 2$) определяет функцию из пространства $\Theta_{n/k}(\Gamma)$.

При $k = 1$ имеем пространство функций одной переменной $\Theta_n(\Gamma) = \Theta_{n,0}(\Gamma)$ из разд. 1.1 с базисом $\{w_\alpha(z) = \theta_\alpha(z + (n-1)/2), \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Аналогичный базис можно построить в пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ при произвольном k . Определим операторы $T_{1/n}$ и $T_{\tau/n}$ в пространстве функций p переменных следующим образом:

$$T_{1/n}f(z_1, \dots, z_p) = f(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p),$$

$$T_{\tau/n}f(z_1, \dots, z_p) = e^{2\pi i(z_1 + \varphi)} f(z_1 + r_1\tau, \dots, z_p + r_p\tau).$$

Здесь $r_\alpha = d(n_{\alpha+1}, \dots, n_p)/d(n_1, \dots, n_p)$ и $\varphi \in \mathbb{C}$ — некоторая константа.

Легко видеть, что $T_{1/n}T_{\tau/n} = e^{2\pi i k/n} T_{\tau/n}T_{1/n}$. Как и в случае тета-функций одной переменной, пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ инвариантно относительно операторов $T_{1/n}$ и $T_{\tau/n}$ и ограничение этих операторов на пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ удовлетворяет соотношениям $T_{1/n}^n = 1$, $T_{\tau/n}^n = \mu$, где $\mu \in \mathbb{C}$. Выберем φ таким образом, чтобы $\mu = 1$; ясно, что это можно сделать с точностью до умножения оператора $T_{\tau/n}$ на корень из 1 степени n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ существует базис $\{w_\alpha(z_1, \dots, z_p)\}$; $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, такой, что*

$$T_{1/n}w_\alpha = e^{2\pi i \alpha k/n} w_\alpha, \quad T_{\tau/n}w_\alpha = w_{\alpha+1}.$$

Этот базис определен однозначно, с точностью до умножения на общую константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$ — собственный вектор для оператора $T_{1/n}$ с собственным значением λ . Поскольку $T_{1/n}^n = 1$ на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, имеем $\lambda^n = 1$. Кроме того, $T_{1/n}T_{\tau/n}f = e^{2\pi i k/n} T_{\tau/n}T_{1/n}f = e^{2\pi i k/n} \lambda T_{\tau/n}f$, а значит, $T_{\tau/n}f$ — опять собственный вектор с собственным значением $e^{2\pi i k/n} \lambda$. Поскольку n и k взаимно просты, $e^{2\pi i k/n}$ — примитивный корень из 1 степени n . Значит, векторы $\{T_{\tau/n}^\alpha f; \alpha = 0, 1, \dots, n-1\}$ — собственные векторы оператора $T_{1/n}$ с различными собственными значениями, причем любой корень из 1 степени n является собственным значением для какого-то $T_{\tau/n}^\alpha f$. Пусть w_0 таков, что $T_{1/n}w_0 = w_0$. Положим $w_\alpha = T_{\tau/n}^\alpha w_0$. Ясно, что $T_{1/n}w_\alpha = e^{2\pi i \alpha k/n} w_\alpha$, $T_{\tau/n}w_\alpha = w_{\alpha+1}$. Кроме того, $w_{\alpha+n} = w_\alpha$, так как $T_{\tau/n}^n = 1$ на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$. $\square$

Заметим, что, как и в случае тета-функций одной переменной, группа G_n неприводимо действует на пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$: $a \mapsto T_{1/n}$, $b \mapsto T_{\tau/n}$, $\varepsilon \mapsto$ (умножение на $e^{2\pi i k/n}$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть L — группа линейных автоморфизмов пространства функций p переменных вида

$$gf(z_1, \dots, z_p) = e^{2\pi i(\varphi_1 z_1 + \dots + \varphi_p z_p + \lambda)} f(z_1 + \psi_1, \dots, z_p + \psi_p)$$

для $g \in L$. Ясно, что L — группа Ли размерности $2p+1$. Пусть $L' \subset L$ — подгруппа преобразований, сохраняющих пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$, т. е. $L' = \{g \in L; g(\Theta_{n/k}(\Gamma)) = \Theta_{n/k}(\Gamma)\}$. Пусть $L'' \subset L'$ состоит из элементов, оставляющих $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ неподвижным, т. е. $L'' = \{g \in L'; gf = f \text{ для всех } f \in \Theta_{n/k}(\Gamma)\}$. Можно проверить, что факторгруппа $L'/L'' = \tilde{G}_n$ порождена элементами $T_{1/n}, T_{\tau/n}$ и умножениями на константу.

Мы будем использовать обозначение $w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p)$, если из контекста не ясно, о каких тета-функциях идет речь.

Нам понадобится следующее тождество, связывающее тета-функции из пространств $\Theta_{1,0}(\Gamma)$, $\Theta_{n,(n-1)/2}(\Gamma)$ и $\Theta_{n/k}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta(y_1 - z_1 + nv - nu)}{\theta(nv - nu)\theta(y_1 - z_1)} \\
& \times w_\alpha(y_1 + m_1u, \dots, y_p + m_pu)w_\beta(z_1 + m_1v + l_1, \dots, z_p + m_pv + l_p) \\
& + \sum_{1 \leq t \leq p-1} \frac{\theta(z_t - y_t + y_{t+1} - z_{t+1})}{\theta(z_t - y_t)\theta(y_{t+1} - z_{t+1})} \\
& \times w_\alpha(z_1 + m_1u, \dots, z_t + m_tu, y_{t+1} + m_{t+1}u, \dots, y_p + m_pu) \\
& \times w_\beta(y_1 + m_1v + l_1, \dots, y_t + m_tv + l_t, z_{t+1} + m_{t+1}v + l_{t+1}, \dots, z_p + m_pv + l_p) \\
& + \frac{\theta(z_p - y_p + n\eta)}{\theta(z_p - y_p)\theta(n\eta)} w_\alpha(z_1 + m_1u, \dots, z_p + m_pu) \\
& \times w_\beta(y_1 + m_1v + l_1, \dots, y_p + m_pv + l_p) \\
& = \frac{1}{n} \theta\left(\frac{1}{n}\right) \dots \theta\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
& \times \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{rk}(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(v-u)} w_{\beta-r}(y_1 + m_1v, \dots, y_p + m_pv) \\
& \times w_{\alpha+r}(z_1 + m_1u + l_1, \dots, z_p + m_pu + l_p). \tag{2}
\end{aligned}$$

Здесь $m_\alpha = d(n_{\alpha+1}, \dots, n_p)\eta$, $l_\alpha = d(n_1, \dots, n_{\alpha-1})\eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, u, v, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_p)$ разность между правой и левой частями формулы (2). Вычисление показывает, что эта функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, y_\alpha + 1, \dots, z_p) &= \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, y_\alpha + \tau, \dots, z_p) &= -e^{-2\pi i(n_\alpha y_\alpha - y_{\alpha-1} - y_{\alpha+1} + \delta_{\alpha,1}v)} \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_\alpha + 1, \dots, z_p) &= \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p), \\
\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_\alpha + \tau, \dots, z_p) &= -e^{-2\pi i(n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} + \delta_{\alpha,1}u + \delta_{\alpha,p}\eta)} \varphi_{\alpha,\beta}(\eta, \dots, z_p).
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $y_0 = y_{p+1} = z_0 = z_{p+1} = 0$, $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера. Кроме того, вычисление показывает, что на дивизорах $nv - nu \in \Gamma$, $n\eta \in \Gamma$, $y_1 - z_1 \in \Gamma, \dots, y_p - z_p \in \Gamma$ нет полюсов, так что функция $\varphi_{\alpha,\beta}$ всюду голоморфна на $\mathbb{C}^{2p+3}$. Но ясно, что базис в пространстве голоморфных функций переменных $y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_p$, удовлетворяющих условиям (3), составляют функции $\{w_\lambda(y_1 + m_1v, \dots, y_p + m_pv)w_\nu(z_1 + m_1u + l_1, \dots, z_p + m_pu + l_p); \lambda, \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$. Поэтому функция $\varphi_{\alpha,\beta}$ имеет вид

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\eta, u, v, y_1, \dots, z_p) = \sum_{\lambda, \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v) w_\lambda(y_1 + m_1v, \dots, y_p + m_pv) \times w_\nu(z_1 + m_1u + l_1, \dots, z_p + m_pu + l_p). \tag{4}$$

Здесь функции $\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v)$ голоморфны и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\psi_{\lambda,\nu}(\eta + 1, u, v) &= \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u + 1, v) = \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v + 1) = \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta + \tau, u, v) &= e^{-2\pi i n(v-u)} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u + \tau, v) &= e^{2\pi i n\eta} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v), \\
\psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v + \tau) &= e^{-2\pi i n\eta} \psi_{\lambda,\nu}(\eta, u, v).
\end{aligned} \tag{5}$$

Эти соотношения проверяются вычислением: надо сравнить мультипликаторы при сдвигах на 1 и τ в формулах (3) и (4).

Но всякая голоморфная функция переменных η, u и v , удовлетворяющая соотношениям (5), равна 0. В самом деле, из периодичности вытекает разложение в ряд Фурье:

$$\psi_{\lambda, \nu}(\eta, u, v) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}} a_{\lambda, \nu, \alpha, \beta, \gamma} e^{2\pi i(\alpha\eta + \beta u + \gamma v)}.$$

Из квазипериодичности, далее, следует, что коэффициенты $a_{\lambda, \nu, \alpha, \beta, \gamma}$ равны 0. $\square$

1.3. Двойственность пространств $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ и $\Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$. Мы построим канонический элемент $\Delta_{n,k} \in \Theta_{n/k}(\Gamma) \otimes \Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$, осуществляющий двойственность между этими пространствами (см. формулу (6)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}, \quad \frac{n}{n-k} = n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}$$

— разложения в цепные дроби, причем $n_\alpha \geq 2$, $n'_\beta \geq 2$ при $1 \leq \alpha \leq p$, $1 \leq \beta \leq p'$. Здесь p и p' — длины цепных дробей. Тогда $p' = n_1 + \dots + n_p - 2p + 1$, $n'_1 + \dots + n'_{p'} = 2(n_1 + \dots + n_p) - 3p + 1$. Кроме того, $n'_1 + \dots + n'_\alpha = 2\alpha + \beta$ при $n_1 + \dots + n_\beta - 2\beta + 1 \leq \alpha \leq n_1 + \dots + n_{\beta+1} - 2\beta - 2$. Иначе говоря, диаграммы Юнга для разбиений $(n_1 - 1, n_1 + n_2 - 3, \dots, n_1 + \dots + n_\alpha - 2\alpha + 1, \dots)$ и $(n'_1 - 1, n'_1 + n'_2 - 3, \dots, n'_1 + \dots + n'_\beta - 2\beta + 1, \dots)$ двойственны друг другу.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 1$, $p = 1$, $n_1 = n$ имеем $p' = n - 1$ и $n'_1 = \dots = n'_{n-1} = 2$. При $p > 1$, если $n_2, \dots, n_{p-1} \geq 3$, то последовательность $(n'_1, \dots, n'_{p'})$ имеет вид $(2^{(n_1-2)}, 3, 2^{(n_2-3)}, 3, \dots, 3, 2^{(n_{p-1}-3)}, 3, 2^{(n_p-2)})$. Здесь $2^{(t)}$ при $t \geq 0$ означает последовательность из t двоек. Эта формула верна и без условия $n_2, \dots, n_{p-1} \geq 3$, если принять следующее соглашение: последовательность $(m_1, 2^{(-1)}, m_2)$ имеет длину 1 и равна $(m_1 + m_2 - 2)$. Это правило применяется последовательно для всех $n_\alpha = 2$ при $2 \leq \alpha \leq p - 1$.

Доказательство проводится индукцией по $\min(p, p')$. При $p = 1$ надо доказать, что $\frac{n}{n-1} = 2 - \frac{1}{2 - \dots - \frac{1}{2}}$ — дробь длины $n - 1$. При $p, p' > 1$ пусть, например, $n_1 > 2$. Имеем $\frac{k}{d(n_3, \dots, n_p)} = n_2 - \frac{1}{n_3 - \dots - \frac{1}{n_p}}$. По предположению

$$\frac{k}{k - d(n_3, \dots, n_p)} = n'_{n_1-1} - 1 - \frac{1}{n'_{n_1} - \frac{1}{n'_{n_1+1} - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}},$$

причем последовательность $(n'_1, \dots, n'_{n_1-2})$ есть $(2^{(n_1-2)})$. Далее проверяется, что $n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}} = \frac{n}{n-k}$. При этом используется, что $d(n_1, \dots, n_p) = n$, $d(n_2, \dots, n_p) = k$,

$$\frac{d(n_1, \dots, n_p)}{d(n_2, \dots, n_p)} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$$

и $d(n_1, \dots, n_p) = n_1 d(n_2, \dots, n_p) - d(n_3, \dots, n_p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть функция $\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'})$ $p + p'$ переменных $z_1, \dots, z_p, z'_1, \dots, z'_{p'}$ определена формулой

$$\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p, z'_1, \dots, z'_{p'}) = e^{2\pi i z'_1} \theta(z_1 - z'_1) \theta(z_p + z'_{p'}) \times \prod_{1 \leq \alpha \leq p'-1} \theta(z'_\alpha - z'_{\alpha+1} + z_{n'_1 + \dots + n'_\alpha - 2\alpha + 1}) \cdot \prod_{1 \leq \beta \leq p-1} \theta(z_\beta - z_{\beta+1} + z'_{n_1 + \dots + n_\beta - 2\beta + 1}).$$

Эта функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_\alpha + 1, \dots, z'_{p'}) &= \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_\beta + 1, \dots, z'_{p'}) = \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}), \\ \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_\alpha + \tau, \dots, z'_{p'}) &= (-1)^{n_\alpha} e^{-2\pi i (n_\alpha z_\alpha - z_{\alpha-1} - z_{\alpha+1} - (\delta_{\alpha,1} - 1)\tau)} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}), \\ \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_\beta + \tau, \dots, z'_{p'}) &= (-1)^{n'_\beta} e^{-2\pi i (n'_\beta z'_\beta - z'_{\beta-1} - z'_{\beta+1} - (\delta_{\beta,1} - 1)\tau)} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}). \end{aligned}$$

Здесь $z_0 = z_{p+1} = z'_0 = z'_{p'+1} = 0$, $\delta_{\alpha,1}$ — символ Кронекера.

Доказательство непосредственно вытекает из нашего описания двойственности между последовательностями $(n_1, \dots, n_p)$ и $(n'_1, \dots, n'_{p'})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Имеет место соотношение

$$\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'}) = c_{n,k} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p) w_{1-\alpha}^{n/(n-k)}(z'_1, \dots, z'_{p'}). \quad (6)$$

Здесь $c_{n,k} \in \mathbb{C}$ — некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего предложения вытекает, что $\Delta_{n,k}$ как функция переменных $z_1, \dots, z_p$ лежит в пространстве $\Theta_{n/k}(\Gamma)$. Аналогично, как функция переменных $z'_1, \dots, z'_{p'}$ она лежит в пространстве $\Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$. Поэтому

$$\Delta_{n,k}(z_1, \dots, z_p; z'_1, \dots, z'_{p'}) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \lambda_{\alpha, \beta} w_\alpha^{n/k}(z_1, \dots, z_p) w_\beta^{n/(n-k)}(z'_1, \dots, z'_{p'}).$$

Но, как легко проверить,

$$\Delta_{n,k}(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p; z'_1 + r'_1, \dots, z'_{p'} + r'_{p'}) = e^{2\pi i/n} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}),$$

где $r_\alpha = d(n_1, \dots, n_{\alpha-1})/n$, $r'_\beta = d(n'_1, \dots, n'_{\beta-1})/n$. Отсюда $\lambda_{\alpha, \beta} = 0$ при $\alpha + \beta \not\equiv 1 \pmod n$ (так как $w_\alpha(z_1 + r_1, \dots, z_p + r_p) = e^{2\pi i \alpha/n} w_\alpha(z_1, \dots, z_p)$ и $w_\beta(z'_1 + r'_1, \dots, z'_{p'} + r'_{p'}) = e^{2\pi i \beta/n} w_\beta(z'_1, \dots, z'_{p'})$). Значит, $\lambda_{\alpha, \beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha+\beta, 1}$. Аналогично,

$$\Delta_{n,k}(z_1 + r_1 \tau, \dots, z_p + r_p \tau; z'_1 + r'_1 \tau, \dots, z'_{p'} + r'_{p'} \tau) = e^{2\pi i (\tau/n - z_p - z'_{p'})} \Delta_{n,k}(z_1, \dots, z'_{p'}).$$

Отсюда следует, что $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha+1}$, т.е. λ_α не зависит от α . $\square$

§2. R -матрица Белавина

2.1. Основные определения. Пусть V — линейное пространство размерности n , а $R(u, v)$ — мероморфная функция комплексных переменных u, v со значениями в линейных операторах в $V \otimes V$, удовлетворяющая условию $R(u, v)R(v, u) = 1$. Пусть $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(u, v)$ — матричные элементы функции $R(u, v)$ в некотором базисе пространства V .

Пусть A_R — ассоциативная алгебра с образующими $\{x_\alpha(u); \alpha = 1, \dots, n, u \in \mathbb{C}\}$ и определяющими соотношениями

$$x_\alpha(u)x_\beta(v) = \sum_{\gamma, \delta} R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(u, v)x_\delta(v)x_\gamma(u).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операторнозначная функция $R(u, v)$ называется *R-матрицей*, если для всяких общих u, v, w элементы $\{x_\alpha(u)x_\beta(v)x_\gamma(w); \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n\}$ алгебры A_R линейно независимы. В этом случае алгебра A_R называется *алгеброй Замолотчикова* для R -матрицы $R(u, v)$.

Известно, что необходимым и достаточным условием для этого является уравнение Янга–Бакстера на $R(u, v)$, которое в матричных элементах записывается в виде

$$\sum_{\mu, \nu, t} R_{\alpha\beta}^{\nu\mu}(u, v)R_{\nu\gamma}^{lt}(u, w)R_{\mu t}^{\psi l}(v, w) = \sum_{\mu, \nu, t} R_{\beta\gamma}^{\nu\mu}(v, w)R_{\alpha\mu}^{t\varphi}(u, w)R_{t\nu}^{\varphi\psi}(u, v). \quad (7)$$

Заметим, что это уравнение сохраняется, если оператор $R(u, v)$ умножить на любую функцию $\varphi(u, v)$.

В [7] Кричевер классифицировал решения этого уравнения при $n = 2$. При больших n классификация неизвестна.

2.2. R-матрица Белавина. В [2] Белавин построил семейство R -матриц. В наших обозначениях соответствующие алгебры Замолотчикова записываются следующим образом. Пусть, как и раньше, n и k — взаимно простые натуральные числа, $1 \leq k < n$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка, порожденная 1 и τ , $\text{Im } \tau > 0$. Пусть $\eta \in \mathbb{C}$.

Определим алгебру $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ образующими $\{x_\alpha(u); \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, u \in \mathbb{C}\}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0)\theta_0(v-u+\eta) \cdots \theta_{n-1}(v-u+\eta)}{\theta_0(\eta) \cdots \theta_{n-1}(\eta)\theta_0(v-u) \cdots \theta_{n-1}(v-u)} x_\alpha(u)x_\beta(v) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{kr}(\eta)\theta_{\beta-\alpha-r}(v-u)} x_{\beta-r}(v)x_{\alpha+r}(u). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\{\theta_\alpha(u); \alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ — базис в пространстве $\Theta_{n, (n-1)/2}(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Алгебра $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ является алгеброй Замолотчикова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение Янга–Бакстера (7) легко проверить непосредственно. Подставим

$$R_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}(u, v) = \delta_{\alpha+\beta, \gamma+\delta} \frac{\theta_{\beta-\alpha+(\beta-\gamma)(k-1)}(v-u+\eta)}{\theta_{k(\beta-\gamma)}(\eta)\theta_{\beta-\delta}(v-u)}$$

в формулу (7) и сравним полюсы правой и левой частей. Пусть $\varphi(u, v, w, \eta)$ — разность между левой и правой частью. Легко убедиться, что функция $\varphi(u, v, w, \eta)$ голоморфна по u и удовлетворяет условиям $\varphi(u+1, v, w, \eta) = \varphi(u, v, w, \eta)$, $\varphi(u+\tau, v, w, \eta) = e^{2\pi i n(2\eta)} \varphi(u, v, w, \eta)$; отсюда вытекает, что $\varphi = 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $n\eta \in \Gamma$, т. е. $\eta = \mu/n + \tau\nu/n$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношения (8) принимают вид

$$x_\alpha(u)x_\beta(v) = e^{2\pi i(\beta-\alpha+k'\nu)\mu/n} x_{\beta+k'\nu}(v)x_{\alpha-k'\nu}(u).$$

Здесь $k' = d(n_1, \dots, n_{p-1})$ и ясно, что $1 \leq k' < n$, $kk' \equiv 1 \pmod n$.

§3. Динамические алгебры с обменными соотношениями

Пусть $p \in \mathbb{N}$, $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$, $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$. Определим ассоциативную алгебру $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ следующим образом. Она порождена коммутативной подалгеброй, состоящей из всех мероморфных функций переменных $\{y_{\alpha, j}; 1 \leq j \leq p, 1 \leq \alpha \leq m_j, \alpha, j \in \mathbb{N}\}$, и образующими $\{e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u); \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_j \leq m_j, u \in \mathbb{C}\}$. Определяющие соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u) y_{\beta, j} &= (y_{\beta, j} + \lambda_j) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u), \quad \text{где } \beta \neq \alpha_j, \\ e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u) y_{\alpha_j, j} &= (y_{\alpha_j, j} + \lambda_j - \mu) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u). \end{aligned} \quad (9)$$

Это означает, что $y_{\beta, j}$ — динамические переменные. Оставшиеся соотношения квадратичны по $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u)$. Напишем сначала соотношения «общего положения». Пусть $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_p \neq \beta_p$; тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v - u + \mu)}{\theta(v - u)} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u) e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(v) \\ &= \frac{\theta(\mu) \theta(v - u + y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})}{\theta(v - u) \theta(y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(u) \\ &+ \sum_{1 \leq t < p} \frac{\theta(\mu) \theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t} + y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})}{\theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t}) \theta(y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})} \\ &\quad \times e_{\beta_1, \dots, \beta_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_p}(u) \\ &+ \frac{\theta(y_{\alpha_p, p} - y_{\beta_p, p} + \mu)}{\theta(y_{\alpha_p, p} - y_{\beta_p, p})} e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(v) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u). \end{aligned}$$

Соотношения необщего положения возникают, когда для каких-то α_ν, β_ν выполняется равенство $\alpha_\nu = \beta_\nu$. Пусть $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_{\nu-1} \neq \beta_{\nu-1}$, $\alpha_\nu = \beta_\nu$, где $1 \leq \nu \leq p$. Тогда $e_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(u) e_{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_p}(v) = e_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}(v) e_{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_p}(u)$ при $\nu = 1$ и

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v - u + \mu)}{\theta(v - u)} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(u) e_{\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(v) \\ &= \frac{\theta(\mu) \theta(v - u + y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})}{\theta(v - u) \theta(y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})} e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(u) \\ &+ \sum_{1 \leq t < \nu-1} \frac{\theta(\mu) \theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t} + y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})}{\theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t}) \theta(y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})} \\ &\quad \times e_{\beta_1, \dots, \beta_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(v) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(u) \\ &+ \frac{\theta(y_{\alpha_{\nu-1}, \nu-1} - y_{\beta_{\nu-1}, \nu-1} + \mu)}{\theta(y_{\alpha_{\nu-1}, \nu-1} - y_{\beta_{\nu-1}, \nu-1})} e_{\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(v) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(u), \end{aligned}$$

при $\nu > 1$. Здесь в правой части переставляются индексы у $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(u)$ от первого до $\nu - 1$, а остальные остаются на месте.

Наконец, пусть $\alpha_\nu = \beta_\nu$, $\alpha_\lambda = \beta_\lambda$ и $\alpha_i \neq \beta_i$ при $\nu < i < \lambda$. Здесь $1 \leq \nu < p$, $\nu < \lambda \leq p + 1$ (случай $\lambda = p + 1$ означает, что $\alpha_i \neq \beta_i$ при всех $i > \nu$). Тогда имеются соотношения

$$\begin{aligned}
& e_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_{\lambda-1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_{\nu+1}, \dots, \beta_{\lambda-1}, \alpha_\lambda, \dots, \beta_p}(u) \\
&= \sum_{\nu+1 \leq t < \lambda-1} \frac{\theta(\mu) \theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t} + y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})}{\theta(y_{\alpha_t, t} - y_{\beta_t, t}) \theta(y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})} \\
&\quad \times e_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_{\nu+1}, \dots, \beta_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_p}(u) \\
&\quad + \frac{\theta(y_{\alpha_{\lambda-1}, \lambda-1} - y_{\beta_{\lambda-1}, \lambda-1} + \mu)}{\theta(y_{\alpha_{\lambda-1}, \lambda-1} - y_{\beta_{\lambda-1}, \lambda-1})} \\
&\quad \times e_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_{\nu+1}, \dots, \beta_{\lambda-1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_{\lambda-1}, \dots, \beta_p}(u).
\end{aligned}$$

Здесь переставляются индексы с номерами от $\nu+1$ до $\lambda-1$, а остальные остаются на месте.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $p = 1$. Тогда алгебра $X_1^m(\Gamma, \mu; \lambda)$ является алгеброй Замолдчикова для динамической R -матрицы [5]. Это означает, что она является плоской деформацией кольца многочленов от бесконечного набора переменных $\{e_\alpha(u); 1 \leq \alpha \leq m, u \in \mathbb{C}\}$ над полем мероморфных функций переменных $y_{1,1}, \dots, y_{m,1}$. При деформации это поле функций становится полем квазиконстант (см. (9)).

При $p > 1$ алгебра $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ устроена сложнее. А именно, при $\mu = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ это коммутативная алгебра над полем мероморфных функций переменных $\{y_{\alpha,t}; 1 \leq \alpha \leq m_t, 1 \leq t \leq p\}$ с образующими $\{e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u); 1 \leq \alpha_t \leq m_t, u \in \mathbb{C}\}$ и соотношениями

$$\begin{aligned}
& e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(u) e_{\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(v) \\
&= e_{\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \alpha_p}(u) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \dots, \beta_p}(v)
\end{aligned}$$

при $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_{\nu-1} \neq \beta_{\nu-1}$ и

$$\begin{aligned}
& e_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_{\lambda-1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_{\nu+1}, \dots, \beta_{\lambda-1}, \alpha_\lambda, \dots, \beta_p}(u) \\
&= e_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta_{\nu+1}, \dots, \beta_{\lambda-1}, \dots, \alpha_p}(v) e_{\beta_1, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_{\lambda-1}, \dots, \beta_p}(u)
\end{aligned}$$

при $\alpha_\nu = \beta_\nu, \alpha_\lambda = \beta_\lambda$ и $\alpha_i \neq \beta_i$ для $\nu < i < \lambda$.

Легко видеть, что эти соотношения допускают униформизацию: $e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(u) = e_{\alpha_1}^1(u) e_{\alpha_1, \alpha_2}^2 \dots e_{\alpha_{p-1}, \alpha_p}^p$, где $\{e_{\alpha_i}^1(u), e_{\alpha_{i-1}, \alpha_i}^i\}$ — независимые переменные. Алгебра $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ есть плоская деформация этой коммутативной алгебры.

4. Гомоморфизмы алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ в динамические алгебры с обменными соотношениями

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого набора $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм

$$\Phi: Z_{n,k}(\Gamma, \eta) \rightarrow X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

который на образующих задается формулой

$$\Phi(x_\alpha(u)) = \sum_{1 \leq \alpha_1 \leq m_1, \dots, 1 \leq \alpha_p \leq m_p} w_\alpha(y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 u, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p u) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(nu). \quad (10)$$

Здесь $w_\alpha(y_1, \dots, y_p) \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$, $\nu_j = d(n_{j+1}, \dots, n_p)\eta$, $\mu = d(n_1, \dots, n_p)\eta = n\eta$, $\lambda_j = d(n_1, \dots, n_{j-1})\eta$ при $1 \leq j \leq p$ и $\frac{n}{k} = n_1 - \frac{1}{n_2 - \dots - \frac{1}{n_p}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (10) показывает, что пространство образующих алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}$ естественно изоморфно пространству $\Theta_{n/k}(\Gamma)$. При этом базисный элемент $x_\alpha(u)$ соответствует $w_\alpha(y_1, \dots, y_p) \in \Theta_{n/k}(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Надо доказать, что образ соотношений (8) при гомоморфизме Φ выполняется в алгебре $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Применяя Φ к разности между левой и правой частями соотношения (8) и используя соотношения в алгебре $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, получим выражение вида

$$\sum_{\substack{1 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq m_1 \\ \dots \\ 1 \leq \alpha_p, \beta_p \leq m_p}} \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p}(y_{\alpha_1, 1}, \dots, y_{\alpha_p, p}, y_{\beta_1, 1}, \dots, y_{\beta_p, p}) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(nv) e_{\beta_1, \dots, \beta_p}(nu).$$

Мы должны доказать, что $\psi_{\alpha_1, \dots, \beta_p}(y_{\alpha_1, 1}, \dots, y_{\beta_p, p}) = 0$ при всех $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$. Проверим это в случае $\alpha_1 \neq \beta_1, \dots, \alpha_p \neq \beta_p$. Вычисление показывает, что тогда

$$\begin{aligned} & \psi_{\alpha_1, \dots, \beta_p}(y_{\alpha_1, 1}, \dots, y_{\beta_p, p}) \\ &= \frac{\theta_1(0) \cdots \theta_{n-1}(0) \theta_0(v - u + \eta) \cdots \theta_{n-1}(v - u + \eta)}{\theta_0(\eta) \cdots \theta_{n-1}(\eta) \theta_0(v - u) \cdots \theta_{n-1}(v - u)} \frac{\theta(nv - nu + n\eta)}{\theta(nv - nu)} \\ & \quad \times \left(w_\alpha(y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 u, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p u) w_\beta(y_{\beta_1, 1} + \nu_1 v + \lambda_1, \dots, y_{\beta_p, p} + \nu_p v + \lambda_p) \right. \\ & \quad \times \frac{\theta(n\eta) \theta(nv - nu + y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})}{\theta(nv - nu) \theta(y_{\alpha_1, 1} - y_{\beta_1, 1})} \\ & \quad + \sum_{1 \leq t < p} \frac{\theta(n\eta) \theta(y_{\beta_t, t} - y_{\alpha_t, t} + y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})}{\theta(y_{\beta_t, t} - y_{\alpha_t, t}) \theta(y_{\alpha_{t+1}, t+1} - y_{\beta_{t+1}, t+1})} \\ & \quad \times w_\alpha(y_{\beta_1, 1} + \nu_1 u, \dots, y_{\beta_t, t} + \nu_t u, y_{\alpha_{t+1}, t+1} + \nu_{t+1} u, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p u) \\ & \quad \times w_\beta(y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 v + \lambda_1, \dots, y_{\alpha_t, t} + \nu_t v + \lambda_t, \\ & \quad \quad y_{\beta_{t+1}, t+1} + \nu_{t+1} v + \lambda_{t+1}, \dots, y_{\beta_p, p} + \nu_p v + \lambda_p) \\ & \quad + \frac{\theta(y_{\beta_p, p} - y_{\alpha_p, p} + n\eta)}{\theta(y_{\beta_p, p} - y_{\alpha_p, p})} w_\alpha(y_{\beta_1, 1} + \nu_1 u, \dots, y_{\beta_p, p} + \nu_p u) \\ & \quad \quad \times w_\beta(y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 v + \lambda_1, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p v + \lambda_p) \Big) \\ & - \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{\theta_{\beta-\alpha+r(k-1)}(v - u + \eta)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{\beta-\alpha-r}(v - u)} w_{\beta-r}(y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 v, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p v) \\ & \quad \times w_{\alpha+r}(y_{\beta_1, 1} + \nu_1 u + \lambda_1, \dots, y_{\beta_p, p} + \nu_p u + \lambda_p). \end{aligned}$$

Заменим в этом выражении $\theta_0(v - u + \eta) \cdots \theta_{n-1}(v - u + \eta)$, $\theta_0(\eta) \cdots \theta_{n-1}(\eta)$, $\theta_0(v - u) \cdots \theta_{n-1}(v - u)$ с помощью тождества (1). После этого равенство $\psi_{\alpha_1, \dots, \beta_p} = 0$ сразу вытекает из тождества (2).

Случай, когда для каких-то α_j, β_j выполняется равенство $\alpha_j = \beta_j$, рассматривается аналогично. $\square$

§5. Полиспектральные алгебры с обменными соотношениями

Пусть $p' \in \mathbb{N}$, $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{p'} \in \mathbb{C}$. Определим ассоциативную алгебру $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$ следующим образом. Она порождена образующими $\{e(u, u_1, \dots, u_{p'}); u, u_1, \dots, u_{p'} \in \mathbb{C}\}$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(v - u + \mu)}{\theta(v - u)} e(u, u_1, \dots, u_{p'}) e(v, v_1 + \mu_1, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) \\ &= \frac{\theta(\mu) \theta(v - u + u_1 - v_1)}{\theta(v - u) \theta(u_1 - v_1)} e(v, u_1, \dots, u_{p'}) e(u, v_1 + \mu_1, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) \\ &+ \sum_{1 \leq t < p'} \frac{\theta(\mu) \theta(v_t - u_t + u_{t+1} - v_{t+1})}{\theta(v_t - u_t) \theta(u_{t+1} - v_{t+1})} e(v, v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_{p'}) \\ &\quad \times e(u, u_1 + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t, v_{t+1} + \mu_{t+1}, \dots, v_{p'} + \mu_{p'}) \\ &+ \frac{\theta(v_{p'} - u_{p'} + \mu)}{\theta(v_{p'} - u_{p'})} e(v, v_1, \dots, v_{p'}) e(u, u_1 + \mu_1, \dots, u_{p'} + \mu_{p'}). \end{aligned} \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\mu = \mu_1 = \dots = \mu_{p'} = 0$ алгебра $Y_{p'}(\Gamma, 0, \dots, 0)$ есть кольцо многочленов от бесконечного набора переменных $\{e(u, u_1, \dots, u_{p'}); u, \dots, u_{p'} \in \mathbb{C}\}$. Можно проверить, что алгебра $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$ есть плоская деформация этой алгебры. Это означает, что $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$ есть алгебра Замолотчикова для R -матрицы в пространстве функций переменных $u_1, \dots, u_{p'}$, т.е. u для $e(u, u_1, \dots, u_{p'})$ является спектральным параметром, а $u_1, \dots, u_{p'}$ нумеруют базис (являются аналогом i для $x_i(u)$ в конечномерной R -матрице). Уравнение Янга–Бакстера проверяется непосредственно.

§6. Гомоморфизм полиспектральной алгебры с обменными соотношениями в алгебру $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Существует гомоморфизм*

$$\Psi: Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'}) \rightarrow Z_{n,k}(\Gamma, \eta),$$

который на образующих задается формулой

$$\Psi(e(nu, u_1, \dots, u_{p'})) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x_{1-\alpha}(u) w_\alpha(u_1 + \gamma_1 u, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} u). \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-k} &= n'_1 - \frac{1}{n'_2 - \dots - \frac{1}{n'_{p'}}}, \quad \mu = n\eta, \\ \mu_j &= d(n'_1, \dots, n'_{j-1})\eta, \quad \gamma_j = -d(n'_{j+1}, \dots, n'_{p'})\eta, \quad 1 \leq j \leq p'. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (12) показывает, что пространство образующих алгебры $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ при фиксированном u естественно двойственно пространству $\Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$ (см. разд. 1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Мы должны проверить справедливость образа соотношений (11) в алгебре $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$ относительно гомоморфизма Ψ . Применяя Ψ к разности между левой и правой частями формулы (11) и используя соотношения (8) в алгебре $Z_{n,k}(\Gamma, \eta)$, нетрудно преобразовать полученное

выражение к виду $\sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \psi_{\gamma, \delta}(u, v, u_1, \dots, u_{p'}, v_1, \dots, v_{p'}) x_{1-\gamma}(v) x_{1-\delta}(u)$. Мы должны доказать, что $\psi_{\gamma, \delta}(u, \dots, v_{p'}) = 0$. Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} & \psi_{\gamma, \delta}(u, \dots, v_{p'}) \\ &= \frac{\theta(nv - nu + n\eta)}{\theta(nv - nu)} \sum_{r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} w_{\delta-r}(u_1 + \gamma_1 u, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} u) \\ & \quad \times w_{\gamma+r}(v_1 + \mu_1 + \gamma_1 v, \dots, v_{p'} + \mu_{p'} + \gamma_{p'} v) \frac{\theta_{\delta-\gamma-r(k+1)}(v - u + \eta)}{\theta_{kr}(\eta) \theta_{\delta-\gamma-r}(v - u)} \\ &= \frac{\theta_1(0) \dots \theta_{n-1}(0) \theta_0(v - u + \eta) \dots \theta_{n-1}(v - u + \eta)}{\theta_0(\eta) \dots \theta_{n-1}(\eta) \theta_0(v - u) \dots \theta_{n-1}(v - u)} \\ & \quad \times \left(\frac{\theta(n\eta) \theta(nv - nu + u_1 - v_1)}{\theta(nv - nu) \theta(u_1 - v_1)} w_{\gamma}(u_1 + \gamma_1 v, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} v) \right. \\ & \quad \times w_{\delta}(v_1 + \mu_1 + \gamma_1 u, \dots, v_{p'} + \mu_{p'} + \gamma_{p'} u) \\ & \quad + \sum_{1 \leq t \leq p'} \frac{\theta(n\eta) \theta(v_t - u_t + u_{t+1} - v_{t+1})}{\theta(v_t - u_t) \theta(u_{t+1} - v_{t+1})} \\ & \quad \times w_{\gamma}(v_1 + \gamma_1 v, \dots, v_t + \gamma_t v, u_{t+1} + \gamma_{t+1} v, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} v) \\ & \quad \times w_{\delta}(u_1 + \gamma_1 u + \mu_1, \dots, u_t + \mu_t + \gamma_t u, \\ & \quad \quad \quad v_{t+1} + \mu_{t+1} + \gamma_{t+1} u, \dots, v_{p'}' + \mu_{p'}' + \gamma_{p'}' u) \\ & \quad \left. + \frac{\theta(v_{p'} - u_{p'} + n\eta)}{\theta(v_{p'} - u_{p'})} w_{\gamma}(v_1 + \gamma_1 v, \dots, v_{p'} + \gamma_{p'} v) \right. \\ & \quad \left. \times w_{\delta}(u_1 + \mu_1 + \gamma_1 u, \dots, u_{p'} + \mu_{p'} + \gamma_{p'} u) \right). \end{aligned}$$

Используя (1), заменим опять $\theta_0(v - u + \eta) \dots \theta_{n-1}(v - u + \eta)$, $\theta_0(\eta) \dots \theta_{n-1}(\eta)$, $\theta_0(v - u) \dots \theta_{n-1}(v - u)$. Кроме того, сделаем замену $u_j \mapsto u_j - \gamma_j u - \gamma_j v$, $v_j \mapsto v_j - \gamma_j u - \gamma_j v$. В результате снова получим тождество (2), но только для тета-функций из пространства $\Theta_{n/(n-k)}(\Gamma)$. $\square$

Замечания. 1. Композиция гомоморфизмов Ψ и Φ дает гомоморфизм

$$\Phi \circ \Psi: Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'}) \rightarrow X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

Учитывая (6), получаем формулу

$$\begin{aligned} & \Phi \circ \Psi(e(nu, u_1, \dots, u_{p'})) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1 \leq m_1 \\ \dots \\ 1 \leq \alpha_p \leq m_p}} \Delta_{n, n-k}(u_1 + \gamma_1 u, \dots, u_{p'} + \gamma_{p'} u; y_{\alpha_1, 1} + \nu_1 u, \dots, y_{\alpha_p, p} + \nu_p u) e_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(nu). \end{aligned}$$

2. Функция $\theta(z)$ допускает тригонометрическое и рациональное вырождения. При этом она заменяется на $1 - e^{2\pi i z}$ и на z соответственно. Делая эти замены в определениях алгебр $X_p^{m_1, \dots, m_p}(\Gamma, \mu; \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ и $Y_{p'}(\Gamma, \mu; \mu_1, \dots, \mu_{p'})$, получим тригонометрические и рациональные вырождения этих алгебр. Предложения 6 и 7 превращаются в этом случае в конструкции тригонометрических и рациональных R -матриц, если пространство $\Theta_{n/k}(\Gamma)$ заменить на пространство многочленов переменных $t_1, \dots, t_p$ степени меньше n_j по переменной t_j ($1 \leq t \leq p$). Здесь $t_j = e^{2\pi i z_j}$ в тригонометрическом случае и $t_j = z_j$ в рациональном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, М., 1985.
2. Белавин А. А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 4, 18–26 (1980).
3. Одесский А. В., Фейгин Б. Л. Конструкции эллиптических алгебр Склянина и квантовых R -матриц. Функц. анализ и его прил., **27**, вып. 1, 37–45 (1993).
4. Felder G., Pasquier V. A simple construction of elliptic R -matrices. Lett. Math. Phys., **32**, 167–171 (1994).
5. Felder G. Elliptic quantum groups. In: Proc. XIth ICMP (Paris, 1994), Internat. Press, Cambridge, 1995, 211–218.
6. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях. ИО НФМИ, Н., 1998.
7. Кричевер И. М. Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия. Функц. анализ и его прил., **15**, вып. 2, 22–35 (1981).

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау, РАН

Поступило в редакцию
10 мая 2001 г.