Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Горбачук, О порядке роста операторной экспоненты на целых векторах, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 75–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:29:57

О порядке роста операторной экспоненты на целых векторах

© 2002. М. Л. ГОРБАЧУК

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Вектор $x \in C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}} \mathcal{D}(A^n)$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область определения оператора) называется целым вектором оператора A , если ряд

$$e^{\lambda A}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n A^n x}{n!}$$

сходится для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Ясно, что вектор $x \in C^\infty(A)$ является целым для оператора A тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа α существует постоянная $c = c(\alpha) > 0$, такая, что $\|A^n x\| \leq c \alpha^n n^n$.

Если оператор A ограничен, то любой вектор $x \in X$ является целым вектором этого оператора, а $e^{\lambda A}x$ — целой вектор-функцией экспоненциального типа, т.е. ее порядок не превышает 1. Напомним, что по определению целая вектор-функция $y(\lambda)$ имеет конечный порядок, если существует такое число $k > 0$, что $\|y(\lambda)\| \leq \exp(|\lambda|^k)$ для достаточно больших $|\lambda|$. Точная нижняя грань таких k называется порядком этой вектор-функции и в дальнейшем обозначается через $\rho(y)$. Под типом целой вектор-функции $y(\lambda)$ порядка $\rho = \rho(y)$ понимается число $\sigma(y) = \inf\{a > 0 : \|y(\lambda)\| \leq \exp(a|\lambda|^\rho)\}$. При $\sigma(y) = 0$ целая вектор-функция $y(\lambda)$ имеет так называемый минимальный, а при $0 < \sigma(y) < \infty$ — нормальный тип.

Если пространство X гильбертово, а A — ограниченный нормальный оператор в нем, то $\rho(e^{\lambda A}x) = 1$, $\sigma(e^{\lambda A}x) \leq \|A\|$ и равенство $\sigma(e^{\lambda A}x) = 0$ эквивалентно тому, что $Ax = 0$. Однако нетрудно привести пример ограниченного оператора, не являющегося нормальным и такого, что, какими бы ни были $\rho \in (0, 1]$ и $\sigma \in [0, \infty)$, найдется вектор $x \in X$, для которого $\rho(e^{\lambda A}x) = \rho$, $\sigma(e^{\lambda A}x) = \sigma$.

Неограниченный оператор в банаховом пространстве может вообще не иметь целых векторов, отличных от нулевого, а если таковые x и существуют, то порядок и тип вектор-функций $e^{\lambda A}x$ для таких операторов A могут быть какими угодно. Описать их зависимость от степени гладкости элемента x относительно оператора A — цель этой заметки. При $\rho(e^{\lambda A}x) \leq 1$, $0 \leq \sigma(e^{\lambda A}x) < \infty$ такая зависимость была изучена в [1]. Поведение $\rho(e^{\lambda A}x)$ и $\sigma(e^{\lambda A}x)$ в зависимости от порядка наилучшего приближения вектора x целыми векторами экспоненциального типа оператора A (их определение см. ниже) и при дополнительных условиях на резольвенту оператора A исследовано в [2, 3]. Правда, содержащиеся в [3] теоремы 1.2 и 1.4 сформулированы некорректно, так как введенная там функция $\sigma_E(f, A)$ может принимать лишь два значения, а именно 0 и ∞ .

Итак, пусть A — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве X и x — его целый вектор. Будем говорить, что x имеет конечный порядок, если существует число $\beta \in (-\infty, 1)$, такое, что для достаточно больших n ($n > n_0(\beta)$)

$$\|A^n x\| \leq n^{n\beta}.$$

Точную нижнюю грань таких β назовем порядком вектора x и обозначим через $\tilde{\rho}(x)$. Очевидно, что

$$\tilde{\rho}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^n x\|}{n \ln n}.$$

Определим тип $\tilde{\sigma}(x)$ целого вектора x порядка $\tilde{\rho}(x)$ формулой

$$\tilde{\sigma}(x) = \inf\{\alpha > 0 : \|A^n x\| \leq \alpha^n n^{n\tilde{\rho}(x)}, n > n_0(\alpha)\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\tilde{\sigma}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\|A^n x\|}}{n^{\tilde{\rho}(x)}}.$$

Если $\tilde{\sigma}(x) = 0$, то будем говорить, что x — вектор минимального типа, а если $0 < \tilde{\sigma}(x) < \infty$ — нормального типа.

Положим

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \bigcap_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A),$$

где для чисел $\alpha > 0$ и $\beta \in (-\infty, 1)$

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \mid \exists c = c(x) > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n x\| \leq c \alpha^n n^{n\beta}\}.$$

Элементы пространства $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ называются целыми векторами экспоненциального типа оператора A (см. [4]). Тот факт, что целый вектор x оператора A имеет конечный порядок $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x)$ и нормальный (минимальный) тип, равнозначен включению $x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) с $\beta = \tilde{\rho}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть x — целый вектор оператора A . Для того чтобы целая вектор-функция $e^{\lambda A}x$ имела конечный порядок ρ , необходимо и достаточно, чтобы порядок $\tilde{\rho}$ вектора x был конечен. Ее тип σ является нормальным (минимальным) тогда и только тогда, когда нормален (минимален) тип $\tilde{\sigma}$ вектора x . При этом между ρ и $\tilde{\rho}$, σ и $\tilde{\sigma}$ имеют место соотношения

$$\tilde{\rho} = 1 - 1/\rho, \quad \tilde{\sigma} = (e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что вектор-функция $y(\lambda) = e^{\lambda A}x$ имеет конечный порядок $\rho(y) = \rho$ и тип $\sigma(y) = \sigma$. Тогда для малых $\varepsilon > 0$

$$\|y(\lambda)\| \leq c \exp((\sigma + \varepsilon)|\lambda|^{\rho}), \quad c = \text{const}.$$

Поскольку при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{d^n y(\lambda)}{d\lambda^n} = A^n y(\lambda),$$

то

$$\|A^n x\| = \|A^n y(0)\| = \|y^{(n)}(0)\| = \frac{n!}{2\pi} \left\| \int_{|\lambda|=r} \frac{y(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right\| \leq cn! \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}}}{r^n},$$

где $r > 0$ любое. Учитывая, что минимум функции $e^{\sigma r^{\rho}}/r^n$ достигается в точке $r = (n/(\sigma\rho))^{1/\rho}$, с помощью формулы Стирлинга получаем

$$\|A^n x\| < c_1((e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho} + \varepsilon_1)^n n^{n(\rho-1)/\rho}.$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 < c_1 = \text{const}$. Таким образом,

$$\tilde{\rho} \leq (\rho - 1)/\rho, \quad \tilde{\sigma} \leq (e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho}. \quad (1)$$

Обратно, пусть порядок $\tilde{\rho}$ вектора x и его тип $\tilde{\sigma}$ конечны. Из равенства

$$\rho(y) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln(n!/\|A^n x\|)}$$

(см. [5, с. 13, теорема 2]) и формулы Стирлинга следует соотношение

$$\rho \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln(n!/(c\tilde{\sigma}^n n^{n\tilde{\rho}}))} = \frac{1}{1 - \tilde{\rho}}. \quad (2)$$

Первое из неравенств в (1) и соотношение (2) приводят к выводу, что $\rho = 1/(1 - \tilde{\rho})$.

Для нахождения типа σ воспользуемся формулой

$$(e\sigma(y)\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\frac{\|A^n x\|}{n!}} \right)$$

(см. [5, с. 13, теорема 2]). Тогда

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{\frac{(\tilde{\sigma} + \varepsilon)^n n^{n\tilde{\rho}}}{n!}} = e(\tilde{\sigma} + \varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} \leq e\tilde{\sigma}. \quad (3)$$

Второе неравенство в (1) и неравенство (3) дают $\tilde{\sigma} = (e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для того чтобы вектор-функция $y(\lambda) = e^{\lambda A}x$ была целой вектор-функцией экспоненциального типа, необходимо и достаточно, чтобы x был целым вектором экспоненциального типа оператора A . При этом $\sigma(y) = \tilde{\sigma}(x)$.

Следуя [6], для произвольного вектора $x \in X$, положим

$$\mathcal{E}_r(x) = \inf_{g \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A): \tilde{\sigma}(g) \leq r} \|x - g\|.$$

Функция $\mathcal{E}_r(x)$ монотонно невозрастающая, и

$$(\mathcal{E}_r(x) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty) \iff (\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = X).$$

В предположении замкнутости пространства $\mathfrak{G}_0^\alpha(A)$ в X множество $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{G}_0^{\alpha+\varepsilon}(A)$ также замкнуто в X . Из равносильности соотношений $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{G}_0^{r+\varepsilon}(A)$ и $\tilde{\sigma}(x) \leq r$ вытекает, что

$$\left(x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{G}_0^{r_0+\varepsilon}(A) \right) \iff (\mathcal{E}_r(x) = 0 \text{ при } r > r_0).$$

В этом случае следствие 1 можно переписать в такой эквивалентной форме: вектор-функция $y(\lambda) = e^{\lambda A}x$, где x — целый вектор оператора A , имеет порядок $\rho \leq 1$ и конечный тип тогда и только тогда, когда существует число $r_0 \geq 0$, такое, что $\mathcal{E}_r(x) = 0$ при $r > r_0$; если для некоторого $r_0 > 0$ при $0 < r < r_0$ имеет место неравенство $\mathcal{E}_r(x) > 0$, а при $r > r_0$ — равенство $\mathcal{E}_r(x) = 0$, то x — целый вектор экспоненциального типа оператора A , а вектор-функция $y(\lambda) = e^{\lambda A}x$ имеет первый порядок роста и нормальный тип. Это утверждение при дополнительном условии на поведение резольвенты замкнутого оператора A было установлено в

[2, с. 118, теорема 5.3]. Следует подчеркнуть, что нами никаких ограничений на оператор A , кроме замкнутости пространства $\mathfrak{G}_0^\alpha(A)$ в X , не налагается. Заметим также, что из теоремы 1 при условии на оператор A , обеспечивающем возможность описания некоторых подпространств из $C^\infty(A)$ в терминах поведения функции $\mathcal{E}_r(x)$, как это сделано в [6], а затем в [2, 3], можно получить теорему 5.4 из [2] или, что то же самое, теорему 1.3 из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачук М. Л. Математические методы и физико-механические поля, **41**, 7–12 (1998). 2. Радзиевский Г. В. Матем. сб., **189**, вып. 4, 83–124 (1999). 3. Радзиевский Г. В. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 43–57 (1999). 4. Радыно Я. В. Докл. АН БССР, **27**, № 9, 791–793 (1983). 5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956. 6. Горбачук В. У., Горбачук М. Л. Укр. мат. журн., **48**, № 4, 616–628 (1995).

Институт математики НАН Украины
email: imath@horbach.kiev.ua

Поступило в редакцию
11 января 2000 г.

УДК 515.16

Комбинаторика мультикраевых особенностей серии B_n^l и числа Бернулли–Эйлера*

© 2002. О. Н. КАРПЕНКОВ

Введение. В работах [1, 2] В. И. Арнольд, в частности, установил, что компоненты множества вполне правильных M -морсификаций краевых особенностей серии B_n связаны с комбинаторикой соответствующих конусов Спрингера, а их количество равно числу Бернулли–Эйлера K_n .

В этой заметке рассматриваются обобщения краевых особенностей B_n функций на прямой для случая, когда край состоит из конечного числа (l) точек. Такие особенности B_n^l возникают и в больших размерностях, когда край — иммерсированная гиперповерхность.

Получено рекуррентное соотношение между количеством связных компонент множества вполне правильных M -морсификаций для различных значений n и l .

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину и С. К. Ландо за оказанную помощь.

Основные определения и понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Вполне правильная M -морсификация мультикраевой особенности B_n^l* — это многочлен, все критические точки которого вещественны и различны, причем значения во всех критических точках, а также и значения во всех краевых точках $x = b_i$ различны.

Заметим, что краевые точки у нас пронумерованы, иначе нужно было бы рассматривать фактор пространства $\mathbb{R}^k$ по группе перестановок координат. Краевые точки должны быть пронумерованы, так как они соответствуют разным прообразам, которые не переставляются.

*Работа поддержана грантами РФФИ-00-15-96084 и РФФИ-01-01-00803.