Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Якимова, Индекс централизаторов элементов
в классических алгебрах Ли, *Функци. анализ и его
прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 52–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:14:34

Индекс централизаторов элементов в классических алгебрах Ли*

© 2006. О. С. ЯКИМОВА

Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим коприсоединенное действие $\text{ad}^*(\mathfrak{g})$. Индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это минимум размерностей стабилизаторов $\mathfrak{g}_\alpha$ по всем ковекторам $\alpha \in \mathfrak{g}^*$,

$$\text{index } \mathfrak{g} = \min_{\alpha \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}_\alpha.$$

Определение индекса было дано Диксмье в [2, 11.1.6]. Это понятие играет важную роль в теории представлений, а также в теории инвариантов. Согласно теореме Розенлихта [12], орбиты общего положения произвольного действия линейной алгебраической группы на неприводимом алгебраическом многообразии разделяются рациональными инвариантами; в частности, $\text{index } \mathfrak{g} = \text{tr. deg } \mathbb{K}(\mathfrak{g}^*)^G$.

Индекс редуктивной алгебры равен ее рангу. Задача нахождения индекса произвольной алгебры Ли является, по-видимому, необозримой. Однако для некоторых классов нередуктивных подалгебр редуктивных алгебр Ли получен ряд интересных результатов. Так, в работах [3, 8, 13] рассматриваются параболические и связанные с ними подалгебры (нильпотентные радикалы, алгебры водорослевого типа). Другой интересный класс подалгебр — это централизаторы элементов. Для них задача нахождения индекса интересна тем, что имеет непосредственное отношение к теории интегрируемых гамильтоновых систем.

Пусть G — полупростая комплексная или вещественная группа Ли, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ и Gx — орбита некоторого ковектора $x \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим стабилизатор точки x через $\mathfrak{g}_x$. Хорошо известно, что орбита Gx обладает G -инвариантной симплектической структурой. Равенство $\text{index } \mathfrak{g}_x = \text{index } \mathfrak{g}$ равносильно существованию полученного методом сдвига аргумента семейства коммутирующих относительно скобки Пуассона полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$, ограничение которого на Gx содержит $\frac{1}{2} \dim(Gx)$ алгебраически независимых функций [1].

ГИПОТЕЗА (Элашвили). Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли. Тогда $\text{index } \mathfrak{g}_x = \text{index } \mathfrak{g}$ для любого ковектора $x \in \mathfrak{g}^*$.

Напомним, что в случае редуктивной алгебры $\mathfrak{g}$ имеет место изоморфизм $\mathfrak{g}$ -модулей $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$. В частности, достаточно доказать «гипотезу об индексе» для стабилизаторов $\mathfrak{g}_x$ векторов $x \in \mathfrak{g}$.

Пусть $x \in \mathfrak{g}$ и $x = x_s + x_n$ — разложение Жордана этого элемента. Тогда $\mathfrak{g}_x = (\mathfrak{g}_{x_s})_{x_n}$. Подалгебра $\mathfrak{g}_{x_s}$ редуктивна и содержит максимальный тор алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, $\text{index } \mathfrak{g}_{x_s} = \text{index } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{g}$. Таким образом, проверка «гипотезы

*Работа выполнена при поддержке гранта CRDF RM1-2543-MO-03 и гранта РФФИ №05-01-00988.

об индексе» сводится к вычислению индексов стабилизаторов нильпотентных элементов. Легко видеть, что можно ограничиться случаем простой алгебры $\mathfrak{g}$.

Отметим, что если x — регулярный нильпотент, то его стабилизатор $\mathfrak{g}_x$ коммутативен и имеет размерность $\mathrm{rk} \mathfrak{g}$. Ранее «гипотеза об индексе» была доказана для субрегулярных нильпотентов и нильпотентов высоты 2 в [9], а также для нильпотентов высоты 3 в [10]. (Высотой нильпотента e называется наибольшее число m , такое, что $(\mathrm{ad} e)^m \neq 0$.)

В настоящей работе доказано, что индекс централизатора $\mathfrak{z}(e) := \mathfrak{g}_e$ нильпотентного элемента $e \in \mathfrak{g}$ простой классической алгебры Ли равен рангу алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что если редуктивная алгебра $\mathfrak{g}$ не содержит исключительных идеалов, то и алгебра $\mathfrak{g}_{x_s}$ обладает этим свойством. Таким образом, гипотеза об индексе доказана для прямых сумм классических алгебр.

Согласно неравенству Винберга, подробно изложенному в [9, Sec. 1], $\mathrm{index} \mathfrak{g}_x \geq \mathrm{index} \mathfrak{g}$ для любого элемента $x \in \mathfrak{g}^*$. Остается получить оценку в другую сторону, для чего достаточно предъявить такую точку $\alpha \in (\mathfrak{g}_x)^*$, что размерность ее стабилизатора в алгебре $\mathfrak{g}_x$ не превосходит $\mathrm{rk} \mathfrak{g}$. Для алгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ явно указана такая точка $\alpha \in \mathfrak{g}_e^*$. В случае ортогональной алгебры часть доказательства проведена по индукции. Предполагается, что основное поле $\mathbb{K}$ содержит как минимум k элементов, где k — число жордановых клеток нильпотента $e \in \mathfrak{g}$. В случаях ортогональной и симплектической алгебры предполагается также, что характеристика основного поля не равна 2.

В последних двух параграфах поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и его характеристика равна 0. Показано, что построенные в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ стабилизаторы $(\mathfrak{g}_e)_\alpha$ являются стабилизаторами общего положения коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}_e$. В ортогональном случае приведен пример нильпотента $e \in \mathfrak{so}_8$, для которого коприсоединенное действие алгебры $\mathfrak{g}_e$ не имеет стабилизатора общего положения. Аналогичные результаты для параболических подалгебр и подалгебр водорослевого типа простых алгебр Ли получены Панюшевым, а также Товелем и Ю. В работе [13] построен пример параболической подалгебры в $\mathfrak{so}_8$, коприсоединенное действие которой не имеет стабилизатора общего положения. Для серий A и C существование стабилизатора общего положения доказано Панюшевым [11].

В заключительной части работы рассматривается коммутаторное многообразие алгебры $\mathfrak{g}_e$ и его связь с коммутаторным многообразием троек матриц.

Когда данная работа уже была принята к печати, автору стало известно, что гипотеза Элашвили доказана в статье Шарбоннеля [5] для случая $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

§1. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая классическая алгебра Ли или полная линейная алгебра. Пусть $e \in \mathfrak{g}$ — нильпотентный элемент и $\mathfrak{z}(e)$ — его централизатор в $\mathfrak{g}$. Заметим, что случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ ничем принципиально не отличается от случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$. Однако он удобнее для вычислений. В случаях ортогональной и симплектической алгебр нам понадобятся некоторые факты из теории симметрических пространств.

Пусть $(\ , \)_V$ — невырожденная симметрическая или кососимметрическая форма на конечномерном линейном пространстве V , заданная матрицей J , т. е. $(v, w)_V = v^t J w$, где знак t означает транспонирование. Элементы алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, сохраняющие форму $(\ , \)_V$, составляют в точности множество $\mathfrak{gl}(V)^\sigma$

неподвижных точек инволюции $\sigma(\xi) = -J\xi^t J^{-1}$. Имеет место $\mathfrak{gl}(V)^\sigma$ -инвариантное разложение $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(V)^\sigma \oplus \mathfrak{g}_1$, причем элементы подпространства $\mathfrak{g}_1$ умножают форму $(\ , \)_V$ на -1 , т.е. $(\xi v, w)_V = (v, \xi w)_V$ для любых $v, w \in V$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)^\sigma$ и $e \in \mathfrak{g}$ — нильпотентный элемент. Обозначим его централизаторы в алгебрах $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{gl}(V)$ через $\mathfrak{z}(e)$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$ соответственно. Поскольку $\sigma(e) = e$, инволюция σ действует на централизаторе $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$. Легко видеть, что $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)^\sigma = \mathfrak{z}(e)$. Возникает $\mathfrak{z}(e)$ -инвариантное разложение $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e) = \mathfrak{z}(e) \oplus \mathfrak{z}_1$. Пусть $\alpha \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)^*$ и $\tilde{\alpha}$ — ограничение точки α на $\mathfrak{z}(e)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)^*$ и $\alpha(\mathfrak{z}_1) = 0$. Тогда $\mathfrak{z}(e)_{\tilde{\alpha}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_\alpha \cap \mathfrak{z}(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \mathfrak{z}(e)$. Так как $[\xi, \mathfrak{z}_1] \subset \mathfrak{z}_1$, то $\alpha([\xi, \mathfrak{z}(e)]) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha([\xi, \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)]) = 0$. В частности, $\mathfrak{z}(e)_{\tilde{\alpha}} = \mathfrak{z}(e)_\alpha$. $\square$

Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли и $\tau \in \text{Aut } \mathfrak{h}$ — инволюция, задающая разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$. Каждая точка $\gamma \in \mathfrak{h}_0^*$ определяет кососимметрическую 2-форму $\hat{\gamma}$ на $\mathfrak{h}_1$ по формуле $\hat{\gamma}(\xi, \eta) = \gamma([\xi, \eta])$.

ЛЕММА 1. В описанных выше обозначениях

$$\text{index } \mathfrak{h} \leq \text{index } \mathfrak{h}_0 + \min_{\gamma \in \mathfrak{h}_0^*} \dim(\text{Ker } \hat{\gamma}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку γ как функцию на $\mathfrak{h}$, равную нулю на $\mathfrak{h}_1$. Тогда $\mathfrak{h}_\gamma = (\mathfrak{h}_0)_\gamma \oplus (\mathfrak{h}_\gamma \cap \mathfrak{h}_1) = (\mathfrak{h}_0)_\gamma \oplus (\text{Ker } \hat{\gamma})$. Для точек общего положения (принадлежащих открытому по Зарискому подмножеству $U_1 \subset \mathfrak{h}_0^*$) $\dim(\mathfrak{h}_0)_\gamma = \text{index } \mathfrak{h}_0$. Для точек другого открытого подмножества $U_2 \subset \mathfrak{h}_0^*$ пространство $\text{Ker } \hat{\gamma}$ имеет минимально возможную размерность. Для элементов пересечения $U_1 \cap U_2$ размерность стабилизатора в $\mathfrak{h}$ совпадает с указанной в лемме суммой. $\square$

§2. Полная линейная алгебра

Рассмотрим нильпотентный элемент $e \in \mathfrak{gl}(V)$, где V есть n -мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Его централизатор обозначим через $\mathfrak{z}(e)$. Покажем, что индекс алгебры $\mathfrak{z}(e)$ равен n .

Пусть k — число жордановых клеток элемента e и $W \subset V$ — некоторое дополнительное подпространство к $\text{Im } e$ размерности k . Обозначим через $d_i + 1$ размер i -й жордановой клетки. Выберем в пространстве W такой базис $w_1, \dots, w_k$, что $e^{d_i+1}w_i = 0$ для каждого i , а векторы $e^s w_i$ при $1 \leq i \leq k$, $0 \leq s \leq d_i$ образуют базис пространства V . Будем называть векторы w_i образующими жордановых клеток, а пространства $V[i] = \langle w_i, e w_i, \dots, e^{d_i} w_i \rangle$ пространствами жордановых клеток. Будем говорить, что набору жордановых клеток с номерами $i_1, \dots, i_t$ соответствует подпространство $V[i_1] \oplus \dots \oplus V[i_t]$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{z}(e)$. Поскольку $\varphi(e^s w_i) = e^s \varphi(w_i)$, элемент φ полностью определяется своими значениями на векторах w_i . Каждое такое значение имеет вид

$$\varphi(w_i) = \sum_{j,s} c_i^{j,s} e^s w_j, \quad \text{где } c_i^{j,s} \in \mathbb{K}. \quad (1)$$

Таким образом, отображение φ полностью определяется своими коэффициентами $c_i^{j,s} = c_i^{j,s}(\varphi)$. Элемент $\varphi \in \mathfrak{z}(e)$ сохраняет пространства жордановых клеток тогда и только тогда, когда $c_i^{j,s}(\varphi) = 0$ при $i \neq j$.

В алгебре $\mathfrak{z}(e)$ можно выбрать базис, состоящий из элементов $\xi_i^{j,s}$, таких, что

$$\xi_i^{j,s}(w_i) = e^s w_j, \quad \xi_i^{j,s}(w_t) = 0 \quad \text{при } t \neq i,$$

где $d_j - d_i \leq s \leq d_j$ при $d_j \geq d_i$ и $0 \leq s \leq d_i$ при $d_j < d_i$.

Рассмотрим точку $\alpha \in \mathfrak{z}(e)^*$, заданную формулой

$$\alpha(\varphi) = \sum_{i=1}^k a_i c_i^{i,d_i}, \quad a_i \in \mathbb{K},$$

где $c_i^{j,s}$ — коэффициенты элемента $\varphi \in \mathfrak{z}(e)$ и a_i — попарно различные ненулевые числа. При $i = j$, $s = d_i$ значение $\alpha(\xi_i^{j,s})$ равно a_i ; в противном случае $\alpha(\xi_i^{j,s})$ равно нулю.

ТЕОРЕМА 1. *Стабилизатор $\mathfrak{z}(e)_\alpha$ точки α в алгебре $\mathfrak{z}(e)$ состоит из преобразований, сохраняющих пространства жордановых клеток, т. е. является линейной оболочкой элементов $\xi_i^{i,s}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $\varphi \in \mathfrak{z}(e)$ задан формулой (1). (Некоторые из чисел $c_i^{j,s}$ должны быть равны нулю, но для нас это неважно.) Для каждого базисного вектора $\xi(w_i) = e^b w_j$ имеем

$$\alpha([\xi_i^{j,b}, \varphi]) = \alpha\left(\sum_{t,s} c_t^{i,s} \xi_t^{j,s+b} - \sum_{t,s} c_j^{t,s} \xi_i^{t,s+b}\right) = a_j c_j^{i,d_j-b} - a_i c_j^{i,d_i-b}.$$

Элемент φ лежит в стабилизаторе $\mathfrak{z}(e)_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha([\varphi, \xi_i^{j,b}]) = 0$ для всех $\xi_i^{j,b}$.

Заметим, что если φ сохраняет пространства жордановых клеток, т. е. $c_i^{j,s} = 0$ при $i \neq j$, то $\alpha([\varphi, \mathfrak{z}(e)]) = 0$. Покажем, что никакие другие элементы не лежат в стабилизаторе точки α . Пусть какое-то $c_i^{j,s}$ отлично от 0 и $i \neq j$. Возможны три различных случая: $d_i < d_j$, $d_i = d_j$ и $d_i > d_j$.

Если $d_j \leq d_i$, то положим $\xi(w_j) = e^{d_i-s} w_i$, $\xi(w_t) = 0$ при $t \neq j$. Здесь следует заметить, что $0 \leq s \leq d_j \leq d_i$ и, таким образом, выражение e^{d_i-s} имеет смысл. Необходимо также проверить, что $e^{d_j+1}(\xi(w_j)) = 0$. Сложим показатели степеней при e и получим $e^{d_j+1}(\xi(w_j)) = e^{d_j+1+d_i-s} w_i = e^{d_j-s}(e^{d_i+1} w_i) = 0$. Имеем $\alpha([\xi, \varphi]) = a_i c_i^{j,s} - a_j c_i^{j,d_j-d_i+s}$. В случае $d_j = d_i$ мы получаем, что $(a_i - a_j) c_i^{j,s} \neq 0$. Если же $d_j < d_i$, то $s > d_j - d_i + s$. Мы можем выбрать минимальное s , при котором $c_i^{j,s} \neq 0$. При таком выборе $\alpha([\xi, \varphi]) = a_i c_i^{j,s} \neq 0$.

Пусть теперь $d_j > d_i$ и s — минимальное, при котором $c_i^{j,s} \neq 0$. Положим $\xi(w_j) = e^{d_j-s} w_i$, $\xi(w_t) = 0$ при $t \neq j$. Как и в предыдущем случае, $0 \leq s \leq d_j$. В частности, $d_j - s \geq 0$, $d_j + 1 + d_j - s > d_i + 1$ и, значит, $e^{d_j+1}(\xi(w_j)) = 0$. Имеем

$$\alpha([\varphi, \xi]) = a_j c_i^{j,s} - a_i c_i^{j,d_i-d_j+s} = a_j c_i^{j,s} \neq 0;$$

здесь $c_i^{j,d_i-d_j+s} = 0$, так как $d_i - d_j + s < s$. □

СЛЕДСТВИЕ. *Индекс алгебры $\mathfrak{z}(e)$ равен n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стабилизатор $\mathfrak{z}(e)_\alpha$ состоит из преобразований, сохраняющих пространства жордановых клеток. В частности, он имеет размерность n .

Следовательно, индекс алгебры $\mathfrak{z}(e)$ не превосходит n . С другой стороны, согласно неравенству Винберга, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \geq n = \text{rk } \mathfrak{gl}(V)$. $\square$

Приведем еще одно доказательство неравенства $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq n$.

ПРИМЕР 1. Пусть $e \in \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}(V)$ — нильпотентный элемент и $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(e)$ — его централизатор. Рассмотрим максимальную по размеру жорданову клетку элемента e . Будем считать, что она первая. Тогда $V = V_{d_1+1} \oplus V_{\text{ост}}$, $e = e_1 + e_2$, где V_{d_1+1} — пространство первой жордановой клетки, а $V_{\text{ост}}$ — пространство всех остальных клеток, причем $e_1 \in \mathfrak{gl}_{d_1+1}$, $e_2 \in \mathfrak{gl}_{n-d_1-1}$. В качестве инволюции τ возьмем такое сопряжение диагональной матрицей второго порядка, что $\mathfrak{gl}(V)^\tau = \mathfrak{gl}_{d_1+1} \oplus \mathfrak{gl}_{n-d_1-1}$. Инволюция τ действует на $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(e)$ и индуцирует разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1$, где $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}(e_1) \oplus \mathfrak{z}(e_2)$ (централизаторы рассматриваются в алгебрах $\mathfrak{gl}_{d_1+1}$ и $\mathfrak{gl}_{n-d_1-1}$ соответственно). Будем считать, что для всех $m < n$ гипотеза об индексе уже доказана, в частности, $\text{index } \mathfrak{z}(e_2) = n - d_1 - 1$. Подалгебра $\mathfrak{z}(e_1)$ коммутативна, и ее индекс равен $d_1 + 1$. Согласно лемме 1, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq \text{index}(\mathfrak{z}(e_1) \oplus \mathfrak{z}(e_2)) + \min_{\gamma \in \mathfrak{t}_0^*} \dim(\text{Ker } \hat{\gamma}) \leq n + \min_{\gamma \in \mathfrak{z}(e_1)^*} \dim(\text{Ker } \hat{\gamma})$. Положим $\gamma(\xi_1^{1,d_1}) = 1$, $\gamma(\xi_i^{j,s}) = 0$ для всех остальных $\xi_i^{j,s}$. Подпространство $\mathfrak{h}_1$ порождается векторами $\xi_i^{1,s}$ и $\xi_i^{i,s}$ при $i \neq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\xi_1^{i,s}, \xi_i^{1,d_1-s}) &= -1, \\ \hat{\gamma}(\xi_1^{i,s}, \xi_i^{1,b}) &= 0 \quad \text{при } s + b \neq d_1, \\ \hat{\gamma}(\xi_1^{i,s}, \xi_i^{i,b}) &= \hat{\gamma}(\xi_i^{1,s}, \xi_i^{1,b}) = 0. \end{aligned}$$

Форма $\hat{\gamma}$ определяет невырожденное спаривание подпространств $U_1^i := \langle \xi_1^{i,s} \mid 0 \leq s \leq d_i \rangle$ и $U_i^1 := \langle \xi_i^{1,s} \mid d_1 - d_i \leq s \leq d_1 \rangle$. Следовательно, она невырожденна и $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq n$.

§3. Симплектическая алгебра

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{sp}(V)$, где V есть $2n$ -мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Как и ранее, $e \in \mathfrak{sp}_{2n}$ — нильпотентный элемент, а $\mathfrak{z}(e)$ — его централизатор в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $(\ , \)_V$ — невырожденная $\mathfrak{g}$ -инвариантная форма на V . Можно так выбрать жорданов базис, связанный с элементом e , чтобы $(V[i], V[j])_V = 0$, если d_i нечетно и $i \neq j$, а клетки нечетного размера были разбиты на пары (i, i') , где $i \neq i'$, $d_i = d_{i'}$ и $(V[i], V[j])_V = 0$, если $j \neq i'$.

Пусть $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$ — централизатор элемента e в алгебре $\mathfrak{gl}_{2n}$. Напомним, что $\mathfrak{z}(e) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)^\sigma \oplus \mathfrak{z}_1$, где σ — инволюция алгебры $\mathfrak{gl}_{2n}$. Сохраним введенные ранее обозначения для элементов алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$.

В качестве точки $\alpha \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)^*$ возьмем функцию, определенную, как и в случае алгебры $\mathfrak{gl}_{2n}$:

$$\alpha(\varphi) = a_1 c_1^{1,d_1} + \dots + a_{2n} c_k^{k,d_k},$$

где элемент φ задается коэффициентами $c_i^{j,s}$, a_i — попарно различные ненулевые числа и $a_{i'} = -a_i$.

ЛЕММА 2. В описанных выше обозначениях $\alpha(\mathfrak{z}_1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется $\psi \in \mathfrak{z}_1$, такое, что $\alpha(\psi) \neq 0$. Тогда для какого-то i коэффициент c_i^{i,d_i} элемента ψ не равен нулю. Напомним,

что $\sigma(\psi) = -\psi$. Элемент ψ «умножает на -1 » $\mathfrak{sp}_{2n}$ -инвариантную кососимметрическую форму $(\ , \)_V$, в частности, $(\psi(w_i), v)_V = (w_i, \psi(v))_V$ для любого вектора $v \in V$. Легко видеть, что векторы $\psi(w_i)$ и w_i должны быть ортогональны относительно формы $(\ , \)_V$. Если d_i нечетно, то $(w_i, e^{d_i} w_i)_V \neq 0$. Следовательно, $c_i^{i, d_i} = 0$. Если же d_i четно, то

$$\begin{aligned} c_i^{i, d_i} (e^{d_i} w_i, w_{i'})_V &= (\psi(w_i), w_{i'})_V = (w_i, \psi(w_{i'}))_V = c_{i'}^{i', d_i} (w_i, e^{d_i} w_{i'})_V \\ &= (-1)^{d_i} c_{i'}^{i', d_i} (e^{d_i} w_i, w_{i'})_V = c_{i'}^{i', d_i} (e^{d_i} w_i, w_{i'})_V. \end{aligned}$$

Следовательно, $c_i^{i, d_i} = c_{i'}^{i', d_i}$. Подставив это равенство в формулу, определяющую α , мы получим сумму по парам нечетных клеток,

$$\alpha(\psi) = \sum_{(i, i')} (a_i + a_{i'}) c_i^{i, d_i},$$

равную нулю в силу условия $a_i = -a_{i'}$. □

Обозначим через $\tilde{\alpha}$ ограничение функции α на подалгебру $\mathfrak{z}(e)$.

ТЕОРЕМА 2. *Размерность стабилизатора $\mathfrak{z}(e)_{\tilde{\alpha}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_{\alpha} \cap \mathfrak{sp}_{2n}$ равна n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стабилизатор точки α в алгебре $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$ состоит из преобразований, сохраняющих пространства жордановых клеток. Согласно предположению 1, $\mathfrak{z}(e)_{\tilde{\alpha}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_{\alpha} \cap \mathfrak{z}(e)$. Найдем пересечение подалгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_{\alpha}$ с симплектической подалгеброй. Если w_i — образующая клетки четного размера, то элементы $\xi_i^{i, s}$ умножают кососимметрическую форму $(\ , \)_V$ на $(-1)^{s+1}$, т. е. $(\xi_i^{i, s}(e^b w_i), e^t w_i)_V = (-1)^s (e^b w_i, \xi_i^{i, s}(e^t w_i))_V$. Рассмотрим пространство, соответствующее паре (i, i') клеток нечетного размера. Положим $d := d_i = d_{i'}$. Напомним, что $(w_i, e^d w_{i'})_V = (-1)^s (e^s w_i, e^{d-s} w_{i'})_V = -(w_{i'}, e^d w_i)_V$. Поскольку $(e^s w_i, e^{d-s} w_{i'})_V = (-1)^s (w_i, e^d w_{i'})_V$, элементы $\xi_i^{i, s} + (-1)^{s+1} \xi_{i'}^{i', s}$ сохраняют форму $(\ , \)_V$, а элементы $\xi_i^{i, s} + (-1)^s \xi_{i'}^{i', s}$ умножают ее на -1 . Таким образом, i -й клетке четного размера соответствуют $(d_i + 1)/2$ векторов в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_{\alpha} \cap \mathfrak{sp}_{2n}$, а паре (i, i') соответствуют $d_i + 1$ векторов. Следовательно, во всей алгебре $\mathfrak{sp}_{2n}$ размерность стабилизатора точки α равняется n . □

§4. Ортогональная алгебра

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n = \mathfrak{so}(V)$. Как и ранее, $e \in \mathfrak{so}_n$ — нильпотентный элемент, а $\mathfrak{z}(e)$ — его централизатор в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $(\ , \)_V$ — невырожденная $\mathfrak{g}$ -инвариантная форма на V . Можно так выбрать жорданов базис, связанный с элементом e , чтобы $(V[i], V[j])_V = 0$, если d_i четно и $i \neq j$, а клетки четного размера были разбиты на пары (i, i^*) , где $i \neq i^*$, $d_i = d_{i^*}$ и $(V[i], V[j])_V = 0$, если $j \neq i^*$. Для клеток нечетного размера положим $i^* := i$.

Как и симплектическая алгебра, $\mathfrak{so}_n$ является симметрической подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Обозначим задающую ее инволюцию через σ . Как и ранее, $\sigma(e) = e$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e) = \mathfrak{z}(e) \oplus \mathfrak{z}_1$. Будем считать, что $(w_i, e^{d_i} w_i)_V = \pm 1$ и $(w_i, e^{d_i} w_i)_V = 1$ при $i = i^*$. Алгебра $\mathfrak{z}(e)$ порождается (как линейное пространство) векторами $\xi_i^{j, d_j - s} + \varepsilon(i, j, s) \xi_{j^*}^{i^*, d_i - s}$, где $\varepsilon(i, j, s) = \pm 1$ в зависимости от i, j и s . В свою очередь, пространство $\mathfrak{z}_1$ порождается векторами $\xi_i^{j, d_j - s} - \varepsilon(i, j, s) \xi_{j^*}^{i^*, d_i - s}$. Напомним, что $(e^s w_i, e^{d_i - s} w_{i^*})_V \neq 0$, если $e^s w_i \neq 0$.

Приведем некоторые элементарные примеры функций, равных нулю на $\mathfrak{z}_1$. Пусть вектор $\varphi \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$ определяется формулой (1). Положим $\beta_i(\varphi) = c_i^{i, d_i-1}$, $\gamma_{i,j}(\varphi) = c_i^{j, d_j}$.

ЛЕММА 3. Если $i = i^*$, $j = j^*$, $t \neq t^*$, то функции β_i , $\gamma_{i,j} - \gamma_{j,i}$ и $\gamma_{t,t} + \gamma_{t^*,t^*}$ тождественно равны нулю на $\mathfrak{z}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \mathfrak{z}_1$ определяется формулой (1). Тогда $(\psi(w_i), ew_i)_V = c_i^{i, d_i-1}(e^{d_i-1}w_i, ew_i)_V$. Так как $\sigma(\psi) = -\psi$, то

$$\begin{aligned} (\psi(w_i), ew_i)_V &= (w_i, \psi(ew_i))_V = (w_i, e\psi(w_i))_V \\ &= -(ew_i, \psi(w_i))_V = -c_i^{i, d_i-1}(ew_i, e^{d_i-1}w_i)_V. \end{aligned}$$

В силу неравенства $(ew_i, e^{d_i-1}w_i)_V \neq 0$ и симметричности формы $(\ , \)_V$ получаем $\beta_i(\psi) = c_i^{i, d_i-1} = 0$.

Аналогично,

$$\begin{aligned} c_i^{j, d_j}(e^{d_j}w_j, w_j)_V &= (\psi(w_i), w_j)_V = (w_i, \psi(w_j))_V = c_j^{i, d_i}(w_i, e^{d_i}w_i)_V, \\ c_t^{d_t, t}(e^{d_t}w_t, w_{t^*})_V &= (\psi(w_t), w_{t^*})_V = (w_t, \psi(w_{t^*}))_V = c_{t^*}^{t^*, d_{t^*}}(w_t, e^{d_{t^*}}w_{t^*})_V. \end{aligned}$$

Напомним, что, согласно нашему выбору, $(e^{d_j}w_j, w_j)_V = (w_i, e^{d_i}w_i)_V = 1$, $(e^{d_t}w_t, w_{t^*})_V = -(w_t, e^{d_t}w_{t^*})_V$. Следовательно, $c_i^{j, d_j} = c_j^{i, d_i}$, $c_t^{d_t, t} = -c_{t^*}^{t^*, d_{t^*}}$. $\square$

Докажем неравенство $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq \text{rk } \mathfrak{so}_n$, используя полную индукцию по n . В следующих двух случаях шаг индукции невозможен, поэтому разберем их отдельно.

Первый случай. Если $e \in \mathfrak{so}_{2m+1}$ — регулярный нильпотентный элемент, то $\mathfrak{z}(e)$ — коммутативная алгебра размерности m .

Второй случай. Пусть $e \in \mathfrak{so}_{4d}$ — нильпотентный элемент, имеющий две жордановы клетки размера $2d$. Положим $\alpha(\varphi) = c_1^{1, 2d-2} - c_2^{2, 2d-2}$, где элемент φ определяется по формуле (1). Нетрудно проверить, что $\mathfrak{z}(e)_\alpha$ имеет следующий базис: $\xi_1^{1, s} + (-1)^{s+1}\xi_2^{2, s}$ при $0 \leq s \leq 2d-1$, и $\dim \mathfrak{z}(e)_\alpha = 2d$.

Упорядочим клетки по убыванию размера: $d_1 \geq \dots \geq d_k$. Здесь, как и в случае полной линейной алгебры, $d_i + 1$ — размерность пространства i -й жордановой клетки. Заметим, что числа n и k всегда имеют одинаковую четность. Будем считать, что $k > 1$ и что в случае $k = 2$ обе клетки имеют нечетный размер. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

1) для некоторого четного числа $2p < k$ ограничение формы $(\ , \)_V$ на пространство, соответствующее первым $2p$ клеткам, невырожденно;

2) число d_i четно при $i = 1, k$ и нечетно для всех остальных клеток;

3) число d_i четно только при $i = 1$.

Каждая из этих трех возможностей разбрана отдельно. В первых двух случаях делается шаг индукции, а в третьем предъявлена точка $\alpha \in \mathfrak{z}(e)^*$, для которой $\dim \mathfrak{z}(e)_\alpha \leq \text{rk } \mathfrak{so}_n$.

1) Пусть пространство V_{2m} , соответствующее первым $2p$ клеткам, имеет размерность $2m$ и ограничение формы $(\ , \)_V$ на него невырожденно. Тогда $V = V_{2m} \oplus V_{\text{ост}}$, $e = e_1 + e_2$, где $e_1 \in \mathfrak{so}_{2m}$, $e_2 \in \mathfrak{so}_{n-2m}$. Рассмотрим инволюцию τ алгебры $\mathfrak{gl}_n$, соответствующую данной прямой сумме, т. е. $\mathfrak{gl}_n^\tau = \mathfrak{gl}(V_{2m}) \oplus \mathfrak{gl}(V_{\text{ост}})$. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(e)$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}(e)^\tau$. Тогда $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}(e_1) \oplus \mathfrak{z}(e_2)$, где централизаторы рассматриваются в алгебрах $\mathfrak{so}_{2m}$ и $\mathfrak{so}_{n-2m}$ соответственно. По предположению

индукции $\text{index } \mathfrak{z}(e_1) = m$, $\text{index } \mathfrak{z}(e_2) = [n/2] - m$. Следовательно, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq [n/2] + \min_{\gamma \in \mathfrak{h}_0^*} \dim(\text{Ker } \hat{\gamma})$. Осталось предъявить точку $\gamma \in \mathfrak{h}_0^*$, для которой форма $\hat{\gamma}$ невырождена. Напомним, что инволюции σ и τ коммутируют, сохраняют e и задают разложение алгебры $\mathfrak{z}_{\text{gl}}(e) = (\mathfrak{z}(e_1) \oplus \mathfrak{z}(e_2) \oplus \mathfrak{h}_1) \oplus \mathfrak{z}_1$. Если $\gamma(\mathfrak{z}_1) = \gamma(\mathfrak{h}_1) = 0$, то $\text{Ker } \hat{\gamma} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)_\gamma$.

Разобьем клетки нечетного размера на пары (i, i') (здесь предполагается, что $i, i' \leq 2p$). Определим точку γ формулой

$$\gamma(\varphi) = \sum_{(i, i'), i, i' \leq 2p} (c_i^{i', d_{i'}} - c_{i'}^{i, d_i}) + \sum_{j \leq 2p, (d_j + 1) - \text{четное}} c_j^{j, d_j},$$

где элемент $\varphi \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)$ задается коэффициентами $c_i^{j, s}$. Первое слагаемое является суммой функций $\gamma_{i, i'} - \gamma_{i', i}$ по парам клеток нечетного размера, второе — суммой функций $\gamma_{j, j} + \gamma_{j^*, j^*}$ по парам клеток четного размера. Согласно лемме 3, оба слагаемых тождественно равны нулю на $\mathfrak{z}_1$. Кроме того, по определению $\gamma(\mathfrak{h}_1) = 0$.

Для клеток четного размера положим $j' := j$. Предположим, что элемент $\psi \in \mathfrak{h}_1$, определенный по формуле (1), лежит в ядре формы $\hat{\gamma}$, т. е. $\gamma([\psi, \mathfrak{h}_1]) = 0$. Тогда $\gamma([\psi, \mathfrak{h}]) = \gamma([\psi, \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)]) = 0$. Поскольку $\psi \in \mathfrak{so}_n$ и $\psi \neq 0$, можно считать, что для некоторых $j > 2p \geq i$ коэффициент $c_i^{j, s}$ не равен нулю. Имеем

$$\gamma([\psi, \eta_i^{j', d_{j'}}]) = \pm c_i^{j, s} \neq 0.$$

Доказано, что форма $\hat{\gamma}$ невырождена и $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq [n/2]$.

2) Рассмотрим разложение $V = V_{\text{ост}} \oplus V_{d_k+1}$, где последнее слагаемое — это пространство самой маленькой клетки, а первое соответствует всем остальным клеткам. Как и ранее, $e = e_1 + e_2$, где $e_2 \in \mathfrak{so}(V_{d_k+1})$. Инволюцию τ , алгебры $\mathfrak{z}(e_1)$, $\mathfrak{z}(e_2)$, $\mathfrak{h}_0$ и подпространство $\mathfrak{h}_1$ определим так же, как и в случае 1). По предположению индукции $\text{index } \mathfrak{z}(e_1) = [(n - d_k - 1)/2]$, $\text{index } \mathfrak{z}(e_2) = d_k/2$. Следовательно, $\text{index } \mathfrak{h}_0 = n/2 - 1$. Согласно лемме 1, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq \text{index } \mathfrak{h}_0 + \min_{\gamma \in \mathfrak{h}_0^*} \dim(\text{Ker } \hat{\gamma})$. В качестве γ возьмем следующую функцию:

$$\gamma(\varphi) = c_1^{1, d_1-1} + \sum_{i=2}^{k-1} c_i^{i, d_i},$$

где элемент φ определен по формуле (1). Первое слагаемое — это β_1 , второе является суммой функций $\gamma_{j, j} + \gamma_{j^*, j^*}$ по парам клеток четного размера. Согласно лемме 3, $\gamma(\mathfrak{z}_1) = 0$. Пусть $\psi \in \mathfrak{h}_1$ определяется коэффициентами $c_i^{j, s}$. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma([\psi, \xi_1^{k, b}]) &= c_k^{1, d_1-1-b}, \\ \gamma([\psi, \xi_i^{k, b}]) &= c_k^{i, d_i-b} \quad \text{при } 1 < i < k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что ядро формы $\hat{\gamma}$ одномерно и порождено вектором $\xi_k^{1, d_1} - \xi_1^{k, d_k}$. Следовательно, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq [n/2] - 1 + 1 = [n/2]$.

3) Пусть теперь n и k нечетны и элемент e имеет всего одну клетку нечетного размера, причем максимального. Пусть $k = 2m + 1$. Занумеруем клетки целыми числами от $-m$ до m так, чтобы единственная клетка нечетного размера имела номер 0; $i^* = -i$ для всех $i \neq 0$; пространства $V[i]$ и $V[j]$ были ортогональны при $i + j \neq 0$; $i(w_i, e^{d_i} w_{-i})_V = |i|$ при $i \neq 0$ и $(w_0, e^{d_0} w_0)_V = 1$; размеры клеток

возрастали для номеров от $-m$ до 0 и убывали для номеров от 0 до m , т. е. если $|i| \leq |j|$, то $d_i \geq d_j$. Заметим, что $d_i = d_{-i}$. Такая нумерация клеток показана на рис. 1.

Рис. 1

Пусть элемент $\varphi \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)$ задается формулой (1). Рассмотрим следующую точку $\alpha \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)^*$:

$$\alpha(\varphi) = \sum_{i=-m+1}^m c_{i-1}^{i, d_i}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что $c_{i-1}^{i, d_i}(\psi) = -c_{-i}^{1-i, d_1-i}(\psi)$ для каждого $\psi \in \mathfrak{z}_1$ и, следовательно, $\alpha(\mathfrak{z}_1) = 0$. Пусть $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{z}(e)^*$ — ограничение функции α . Опишем стабилизатор $\mathfrak{z}(e)_{\tilde{\alpha}} = \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)_{\alpha} \cap \mathfrak{z}(e)$. Отметим, что $\alpha([\xi_i^{j,s}, \varphi]) = c_{j-1}^{i, d_j-s}(\varphi) - c_j^{i+1, d_{i+1}-s}(\varphi)$.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi \in \mathfrak{z}(e)$ и $\text{ad}^*(\varphi)\alpha = 0$. Тогда $c_i^{j,s} = c_i^{j,s}(\varphi) = 0$ при $i < j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно, и рассмотрим максимальное i , для которого существуют такие $j > i$ и s , что $c_i^{j,s} \neq 0$. Так как φ сохраняет форму $(\ , \)_V$, то $c_{-j}^{-i, d_i-d_j+s} = \pm c_i^{j,s} \neq 0$. Следовательно, $-j \leq i < j$, $j > 0$, $|i| \leq j$ и $d_i \geq d_j$. Более того, $-j < (i+1) \leq j$ и $d_{i+1} \geq d_j$. Легко видеть, что $d_{i+1} - s \geq d_j - s \geq 0$ и существует элемент $\xi_j^{i+1, d_{i+1}-s} \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)$. Получаем

$$0 = \alpha([\xi_j^{i+1, d_{i+1}-s}, \varphi]) = c_i^{j,s} - c_{i+1}^{j+1, \delta} = c_i^{j,s};$$

не будем уточнять, чему равняется δ , так как все коэффициенты $c_{i+1}^{j+1, b}$ равны нулю, поскольку $j+1 > i+1 > i$. Мы получили противоречие. Тем самым утверждение леммы доказано. $\square$

Будем говорить, что элемент $\varphi \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)$ имеет шаг l , если $c_i^{j,s}(\varphi) \neq 0$ только при $j = i + l$. Вектор $\varphi \in \mathfrak{z}_{\text{gl}}(e)$ можно представить в виде суммы $\varphi = \varphi_{-2m} + \varphi_{-2m+1} + \dots + \varphi_{2m-1} + \varphi_{2m}$, где φ_l имеет шаг l . Так как $(-i) - (-j) = j - i$, шаг корректно определен на алгебре $\mathfrak{z}(e)$. Из определения точки α следует, что $\alpha(\varphi_l, \varphi_t) \neq 0$ только при $l + t = 1$. Стабилизатор $\mathfrak{z}(e)_{\alpha}$ является прямой суммой своих подпространств Φ_l , каждое из которых состоит из преобразований шага l .

Как было показано, $\Phi_l = \emptyset$ при $l > 0$. Осталось описать преобразования с неположительными шагами.

ПРИМЕР 2. Покажем, что $\dim \Phi_0 \leq d_0/2$. Пусть $\varphi \in \Phi_0$, $\varphi \neq 0$ и $\varphi(w_0) = 0$. Рассмотрим минимальное по модулю число i , для которого $\varphi(w_i) \neq 0$. Так как $\varphi \in \mathfrak{so}_n$, то также $\varphi(w_{-i}) \neq 0$. Будем считать, что $i > 0$ и коэффициент $c_i^{i,s}$ элемента φ отличен от нуля. Тогда $|i-1| < i$, $d_{i-1} \geq d_i$, существует элемент $\xi := \xi_{i-1}^{i, d_i-s}$ и $0 = \alpha([\varphi, \xi]) = c_i^{i,s} - c_{i-1}^{i-1,s} = c_i^{i,s}$. Следовательно, если $\varphi(w_0) = 0$, то и $\varphi = 0$. Получаем, что векторы пространства Φ_0 полностью определяются своими значениями на w_0 . В свою очередь, $\varphi(w_0) = c_1 e w_0 + c_3 e^3 w_0 + \dots + c_{d_0-1} e^{d_0-1} w_0$.

ЛЕММА 5. Если $q = 2l$ или $q = 2l-1$, где $0 < l \leq m$, то $\dim \Phi_{-q} \leq (d_l+1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично разобранному примеру покажем, что если $\varphi \in \Phi_{-q}$ и $\varphi(w_l) = 0$, то и $\varphi = 0$. Если $\varphi(w_i) \neq 0$, то и $\varphi(w_{q-i}) \neq 0$, так как $\varphi \in \mathfrak{so}_n$. Пусть $\varphi(w_j) \neq 0$ для некоторого номера j . Если $j < l$, то $j-q \geq l$, однако $\varphi(w_l) = 0$; следовательно, $j > l$. Найдем минимальное $j > l$, для которого $\varphi(w_j) \neq 0$. Пусть $c_j^{j-q,s} = c_j^{j-q,s}(\varphi) \neq 0$. Имеем $-j < -l \leq j-q-1 < j$, $d_j \leq d_{j-q-1}$ и $d_{j-q}-s \geq 0$. Следовательно, существует $\xi := \xi_{j-q-1}^{j, d_j-q-s} \in \mathfrak{gl}(e)$. Как и в примере 2, $0 = \alpha([\varphi, \xi]) = c_j^{j-q,s} - c_{j-1}^{j-q-1,\delta} = c_j^{j-q,s}$ (не будем уточнять, чему равняется δ , ведь $\varphi(w_{j-1}) = 0$, поскольку $l \leq j-1 < j$).

Осталось выяснить какие значения принимает $\varphi(w_l)$. Если $q = 2l$, то $\varphi(w_l) = c_0 w_{-l} + c_2 e^2 w_{-l} + \dots + c_{d_l} e^{d_l} w_{-l}$. В случае $q = 2l-1$ получаем следующее уравнение на коэффициенты элемента φ : $0 = \alpha([\varphi, \xi_{-l}^{l,b}]) = c_l^{-l+1, d_{l-1}-b} - c_{l-1}^{-l, d_{l-1}-b}$, т.е. $c_l^{-l+1, d_{l-1}-b} = c_{l-1}^{-l, d_{l-1}-b}$. Такое возможно только при нечетном b . $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $e \in \mathfrak{so}_n$ — нильпотентный элемент. Тогда $\text{index } \mathfrak{z}(e) = \text{rk } \mathfrak{so}_n = [n/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если имеет место возможность 3), то, как было показано, $\mathfrak{z}(e)_{\bar{\alpha}} = \bigoplus_{q=0}^{2m} \Phi_{-q}$. Кроме того, $\dim \Phi_q$ не превосходит половины размера жордановой клетки с номером $[(q+1)/2]$. Таким образом, $\dim \mathfrak{z}(e)_{\bar{\alpha}} \leq (d_0+1)/2 + \sum_{l=1}^m d_l = [n/2]$. С другой стороны, согласно неравенству Винберга, $\text{index } \mathfrak{z}(e) \geq [n/2]$.

В случаях 1) и 2) неравенство $\text{index } \mathfrak{z}(e) \leq \text{rk } \mathfrak{so}_n$ было доказано по индукции.

Если же ни одна из этих трех возможностей не имеет места, то либо $k = 1$ и e — регулярный нильпотент, либо $k = 2$ и обе жордановы клетки элемента e имеют четный размер. Эти два случая были разобраны отдельно. $\square$

§5. Точки общего положения

В данном параграфе предполагается, что поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто и его характеристика равна нулю. Пусть задано линейное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на векторном пространстве V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор $x \in V$ (подалгебра $\mathfrak{g}_x$) называется *точкой общего положения* (стабилизатором общего положения), если для точек $y \in U \subset V$ некоторого открытого по Зарисскому подмножества U алгебры $\mathfrak{g}_y$ и $\mathfrak{g}_x$ сопряжены в $\mathfrak{g}$.

Хорошо известно, что точка общего положения существует для любого линейного действия редуکتивной алгебры Ли.

В работе [4, §1] Элашвили доказал, что подалгебра $\mathfrak{g}_x$ является стабилизатором общего положения тогда и только тогда, когда $V = V^{\mathfrak{g}_x} + \mathfrak{g}_x$, где $V^{\mathfrak{g}_x}$ — множество неподвижных относительно действия подалгебры $\mathfrak{g}_x$ векторов пространства V . Товель и Ю заметили, что в случае коприсоединенного представления $\mathfrak{g}_x = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)^* = \text{Ann}(\mathfrak{g}_x)$, $(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}_x} = \text{Ann}([\mathfrak{g}_x, \mathfrak{g}])$. Это позволило им получить простой и удобный критерий.

ТЕОРЕМА 4 [13, Corollaire 1.8]. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $x \in \mathfrak{g}^*$. Подалгебра $\mathfrak{g}_x$ является стабилизатором общего положения коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{g}_x, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{g}_x = \{0\}$.

К сожалению, авторы работы [13] не были знакомы с упомянутым выше результатом Элашвили и доказали его заново.

Пусть $e \in \mathfrak{gl}_n$ — нильпотентный элемент и $\mathfrak{z}(e)$ — его централизатор. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(e)_\alpha$, где точка $\alpha \in \mathfrak{z}(e)^*$ определена так же, как и в §2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место $\mathfrak{h}$ -инвариантное разложение $\mathfrak{z}(e) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где пространство $\mathfrak{m}$ порождается векторами $\xi_i^{j,s}$ при $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что алгебра $\mathfrak{h}$ порождается векторами $\xi_i^{i,s}$. Включение $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ непосредственно следует из равенств

$$[\xi_i^{i,s}, \xi_j^{t,b}] = \begin{cases} -\xi_i^{t,s+b} & \text{при } i = j, i \neq t, \\ \xi_j^{i,s+b} & \text{при } i = t, i \neq j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \square$$

Аналогичное разложение имеет место и в случае симплектической алгебры. Пусть $e \in \mathfrak{sp}(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$. Сохраним обозначения из §3. Пусть $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Легко видеть, что это разложение σ -инвариантно и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{sp}}(e) = \mathfrak{h}^\sigma \oplus \mathfrak{m}^\sigma$, где $\mathfrak{h}^\sigma = \mathfrak{z}_{\mathfrak{sp}}(e)_{\tilde{\alpha}}$.

ТЕОРЕМА 5. Построенные в случаях полной линейной и симплектической алгебр подалгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)_\alpha$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{sp}}(e)_{\tilde{\alpha}}$ являются стабилизаторами общего положения коприсоединенных действий алгебр $\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{sp}}(e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что выполнено условие теоремы 4. Поскольку $[\mathfrak{h}, \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, имеем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}}(e)] \cap \mathfrak{h} = 0$. Аналогично, $[\mathfrak{h}^\sigma, \mathfrak{z}_{\mathfrak{sp}}(e)] \subset \mathfrak{m}^\sigma$. $\square$

В ортогональном случае стабилизатор общего положения коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{z}(e)$ может и не существовать.

ПРИМЕР 3. Пусть $e \in \mathfrak{so}_8$ — субрегулярный нильпотентный элемент. Тогда он имеет две жордановы клетки размера 3 и 5. Нормируем образующие жордановых клеток так, что $(w_1, e^2 w_1)_V = (w_2, e^4 w_2)_V = 1$. Алгебра $\mathfrak{z}(e)$ имеет размерность 6 и трехмерный центр, порожденный векторами e , $e^3 = \xi_2^{2,3}$ и $\varphi_3 = \xi_1^{2,4} - \xi_2^{1,2}$. Поскольку $\text{index } \mathfrak{z}(e) = 4$, в точках некоторого открытого подмножества $\alpha \in U \subset \mathfrak{z}(e)^*$ выполнено равенство $\dim \mathfrak{z}(e)_\alpha = 4$.

Предположим, что существует стабилизатор общего положения коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{z}(e)$, и обозначим его через $\mathfrak{f}$. Ясно, что $\mathfrak{f}$ содержит центр алгебры $\mathfrak{z}(e)$. Рассмотрим элемент $\varphi_2 = \xi_1^{2,3} + \xi_2^{1,1} \in \mathfrak{z}(e)$. Легко видеть, что подпространство $[\varphi_2, \mathfrak{z}(e)]$ является линейной оболочкой векторов e^3 и φ_3 .

В частности, оно содержится в центре алгебры $\mathfrak{z}(e)$ и, таким образом, в $\mathfrak{f}$. Следовательно, $[\varphi_2, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{f}$ и, согласно теореме 4, $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{z}(e)_{\varphi_2}$. Поскольку $\dim \mathfrak{z}(e)_{\varphi_2} = 4$, имеет место равенство $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}(e)_{\varphi_2}$. Однако $\mathfrak{z}(e)_{\varphi_2} = \langle e, e^3, \varphi_3, \varphi_2 \rangle_{\mathbb{K}}$ является нормальной, но не центральной подалгеброй в $\mathfrak{z}(e)$.

Рассмотрим вложение алгебры $\mathfrak{so}_8$ в $\mathfrak{so}_9$ в качестве стабилизатора первого базисного вектора в $\mathbb{K}^9$. Аналогичным рассуждением можно показать, что коприсоединенное действие алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{so}_9}(e)$ не имеет стабилизатора общего положения.

§6. Коммутаторные многообразия

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Замкнутое подмножество $Y = \{(x, y) \mid x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = 0\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ называется *коммутаторным многообразием* алгебры $\mathfrak{g}$. Вопрос о неприводимости многообразия Y вызывает большой интерес. В случае редуктивной алгебры $\mathfrak{g}$ это многообразие Y неприводимо и совпадает с замыканием $\overline{G(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$ разнесения $G(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ — картановская подалгебра, G — связная группа Ли и $\text{Lie } G = \mathfrak{g}$.

Пусть $e \in \mathfrak{gl}_n$ — нильпотентный элемент и $\mathfrak{z}(e)$ — его централизатор. Сохраним обозначения §2. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(e)_{\alpha}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}(e)$, порожденную векторами $\xi_i^{i,0}$. Легко видеть, что $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$. Более того, так как $[\xi_i^{j,s}, t_i \xi_i^{i,0} + t_j \xi_j^{j,0}] = (t_i - t_j) \xi_i^{j,s}$, алгебра $\mathfrak{h}$ совпадает с нормализатором (централизатором) подалгебры $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{z}(e)$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{z}(e)_{\alpha}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{z}(e)$.

Пусть $Z(e)$ — связная компонента централизатора элемента e в GL_n . Тогда $Y_0 = \overline{Z(e)(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})} \subset Y$ — неприводимая компонента максимальной размерности. Следовательно, Y неприводимо тогда и только тогда, когда $Y_0 = Y$. Известно, что если нильпотент e имеет не более двух жордановых клеток, то Y неприводимо [7]. В общем случае это неверно, так как привело бы к неприводимости многообразия троек коммутирующих матриц.

ПРИМЕР 4. Предположим, что $Y_0 = Y$ для всех нильпотентных элементов $e \in \mathfrak{gl}_m$ при $m \leq n$. Рассмотрим множество троек коммутирующих матриц

$$C_3 = \{(A, B, C) \mid A, B, C \in \mathfrak{gl}_n, [A, B] = [A, C] = [B, C] = 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}_n$ — подалгебра диагональных матриц. Легко видеть, что $\overline{\text{GL}_n(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$ — неприводимая компонента многообразия C_3 . Докажем по индукции, что она совпадает с C_3 . При $n = 1$ доказывать нечего. Пусть $n > 1$. Покажем, что каждая тройка (A, B, C) коммутирующих матриц лежит в замыкании $\overline{\text{GL}_n(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$. Без ограничения общности можно считать, что $A, B, C \in \mathfrak{sl}_n$. Пусть $A = A_s + A_n$ — разложение Жордана матрицы A . Если $A_s \neq 0$, то рассмотрим его централизатор $\mathfrak{z}(A_s)$ в алгебре $\mathfrak{gl}_n$. Легко видеть, что $A, B, C \in \mathfrak{z}(A_s)$ и $\mathfrak{z}(A_s)$ является суммой нескольких алгебр $\mathfrak{gl}_{n_i}$ меньшей размерности. Можно считать, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(A_s)$. Тогда по предположению индукции

$$(A, B, C) \in \overline{Z(A_s)(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})} \subset \overline{\text{GL}_n(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})}.$$

Пусть теперь все три элемента A, B, C нильпотенты и хотя бы один из них, например A , не является регулярным. Рассмотрим централизатор $\mathfrak{z}(A) \subset \mathfrak{gl}_n$. Мы предположили, что $Y_0 = Y$, т. е. пара (B, C) лежит в замыкании разнесения

$Z(A)(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. Достаточно показать, что $(A, \mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \subset \overline{\mathrm{GL}_n(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})}$. Пусть $x \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ — полупростой элемент, не лежащий в центре алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Тогда $A \in (\mathfrak{gl}_n)_x$ и $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{gl}_n)_x$. Мы снова можем сделать шаг индукции, перейдя к подалгебре $(\mathfrak{gl}_n)_x$.

Если же все три элемента A, B, C — регулярные нильпотенты, то некоторая их нетривиальная линейная комбинация A' является нерегулярным нильпотентом. В частности, тройка (A, B, C) эквивалентна относительно действия GL_n некоторой тройке (A', B', C') коммутирующих матриц.

Известно, что при $n > 31$ многообразие C_3 приводимо, см. [6]. Следовательно, заведомо для некоторых нильпотентов многообразие Y также приводимо. Было бы интересно найти минимальные (в некотором смысле) нильпотенты, для которых Y приводимо и/или описать какие-либо классы нильпотентов, для которых Y неприводимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента. Докл. АН СССР, **301**, №5, 1037–1040 (1988).
2. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. Мир, М., 1978.
3. Элашвили А. Г. Об индексе орисферических подалгебр полупростых алгебр Ли. Труды Тбилисс. матем. ин-та им. Размадзе, **77**, 116–126 (1985).
4. Элашвили А. Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли. Функци. анализ и его прил., **6**, вып. 1, 51–62 (1972).
5. Charbonnel J.-Y. Propriétés (Q) and (C). Variété commutante, Bull. Soc. Math. France, **132**, No. 4, 477–508 (2004).
6. Guralnick R. M. A note on commuting pairs of matrices, Linear and Multilinear Algebra, **31**, 71–75 (1992).
7. Neubauer M. G., Sethuraman B. A. Commuting pairs in the centralizers of 2-regular matrices. J. Algebra, **214**, No. 1, 174–181 (1999).
8. Panyushev D. Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras. Mosc. Math. J., **1**, No. 2, 221–241 (2001).
9. Panyushev D. The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer. Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., **134**, No. 1, 41–59 (2003).
10. Panyushev D. Some amazing properties of spherical nilpotent orbits. Math. Z., **245**, No. 3, 557–580 (2003).
11. Panyushev D. An extension of Raïs' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras. Ann. Inst. Fourier, **55**, No. 3, 693–715 (2005).
12. Rosenlicht M. A remark on quotient spaces. An. Acad. Brasil. Cienc., **35**, 487–489 (1963).
13. Tauvel P., Yu R. W. T. Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie. J. Algebra, **273**, No. 2, 507–516 (2004).