Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Карпенков, Комбинаторика мультикраевых особенностей серии B_n^l и числа Бернулли–Эйлера, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:58:04

[2, с. 118, теорема 5.3]. Следует подчеркнуть, что нами никаких ограничений на оператор A , кроме замкнутости пространства $\mathfrak{G}_0^\alpha(A)$ в X , не налагается. Заметим также, что из теоремы 1 при условии на оператор A , обеспечивающем возможность описания некоторых подпространств из $C^\infty(A)$ в терминах поведения функции $\mathcal{E}_r(x)$, как это сделано в [6], а затем в [2, 3], можно получить теорему 5.4 из [2] или, что то же самое, теорему 1.3 из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачук М. Л. Математические методы и физико-механические поля, **41**, 7–12 (1998). 2. Радзиевский Г. В. Матем. сб., **189**, вып. 4, 83–124 (1999). 3. Радзиевский Г. В. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 43–57 (1999). 4. Радыно Я. В. Докл. АН БССР, **27**, № 9, 791–793 (1983). 5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956. 6. Горбачук В. У., Горбачук М. Л. Укр. мат. журн., **48**, № 4, 616–628 (1995).

Институт математики НАН Украины
email: imath@horbach.kiev.ua

Поступило в редакцию
11 января 2000 г.

УДК 515.16

Комбинаторика мультикраевых особенностей серии B_n^l и числа Бернулли–Эйлера*

© 2002. О. Н. КАРПЕНКОВ

Введение. В работах [1, 2] В. И. Арнольд, в частности, установил, что компоненты множества вполне правильных M -морсификаций краевых особенностей серии B_n связаны с комбинаторикой соответствующих конусов Спрингера, а их количество равно числу Бернулли–Эйлера K_n .

В этой заметке рассматриваются обобщения краевых особенностей B_n функций на прямой для случая, когда край состоит из конечного числа (l) точек. Такие особенности B_n^l возникают и в больших размерностях, когда край — иммерсированная гиперповерхность.

Получено рекуррентное соотношение между количеством связных компонент множества вполне правильных M -морсификаций для различных значений n и l .

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину и С. К. Ландо за оказанную помощь.

Основные определения и понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Вполне правильная M -морсификация мультикраевой особенности B_n^l* — это многочлен, все критические точки которого вещественны и различны, причем значения во всех критических точках, а также и значения во всех краевых точках $x = b_i$ различны.

Заметим, что краевые точки у нас пронумерованы, иначе нужно было бы рассматривать фактор пространства $\mathbb{R}^k$ по группе перестановок координат. Краевые точки должны быть пронумерованы, так как они соответствуют разным прообразам, которые не переставляются.

*Работа поддержана грантами РФФИ-00-15-96084 и РФФИ-01-01-00803.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *М-областью* называется замкнутое подмножество пространства многочленов вида $x^n + \lambda_2 x^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} x$, состоящее из многочленов, все критические точки которых вещественны.

Множество вполне правильных *М-морсификаций* является открытым множеством в $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^l$, а его замыкание имеет вид $(\text{М-область}) \times \mathbb{R}^l$. Оно разбивается на связные компоненты бифуркационной диаграммой, состоящей из пяти гиперповерхностей. Три гиперповерхности встречаются уже в случае краевых особенностей типа B_n (см. также [2]):

- (а) краевая каустика, состоящая из функций с критической точкой на крае;
- (б) обыкновенный страт Максвелла, состоящий из функций с равными критическими значениями в различных точках;
- (с) краевой страт Максвелла, состоящий из функций, хотя бы одно из краевых значений которых является критическим (и соответствующая критическая точка не лежит на крае).

Заметим, что в наших обозначениях $B_n = B_n^1$; при этом краевая точка не закреплена. Таким образом, определение вполне правильной *М-морсификации* краевой особенности B_n из статьи [2] является частным случаем определения 1.

В случае мультикраевых особенностей B_n^l , где $l \geq 2$, добавляются еще две гиперповерхности:

- (d) двойная краевая каустика, состоящая из функций с совпадающими краевыми точками;
- (е) двойной краевой страт Максвелла, состоящий из функций с одинаковыми значениями в некоторых различных краевых точках.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма *М-области* особенности B_3^2 ($\lambda \leq 0$)

Рассмотрим пример мультикраевой особенности B_3^2 (рис. 1), т. е. мы рассматриваем семейство многочленов $x^3 + \lambda x$ с краевыми точками $x = b_1$ и $x = b_2$. *М-область* — это полупространство в пространстве с координатами (λ, b_1, b_2) ,

заданное неравенством $\lambda \leq 0$. Гиперповерхности помечены следующим образом: a — краевая каустика, c — краевой страт Максвелла, d — двойная краевая каустика, e — двойной краевой страт Максвелла, f — обычная каустика. Обыкновенный страт Максвелла отсутствует, так как у многочлена третьей степени с вещественными критическими точками совпадение критических значений влечет за собой совпадение критических точек.

Рекуррентное соотношение и следствия из него. Обозначим через K_n числа Бернулли–Эйлера (вот начало последовательности, первый член соответствует $n = 0$: 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, ...), а через K_n^l количество связанных компонент множества вполне правильных M -морсификаций особенности B_n^l . Числа Бернулли–Эйлера являются граничным условием для чисел K_n^l , а именно $K_n^0 = K_{n-1}$ и $K_n^1 = K_{n+1}$ (см. [1]).

ТЕОРЕМА. *Имеет место равенство*

$$K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - n! K_n^{l-1}.$$

Доказательство этой теоремы проводится при помощи σ -образных функций, как и для случая особенностей серии B_k (см. [1]). В работе [1] к многочлену с краевой точкой прибавляется σ -образная функция, сосредоточенная в окрестности краевой точки. Тем самым получается взаимно однозначное соответствие с многочленами без краевых точек, степень которых больше на два. Присутствие других краевых точек несколько осложняют ситуацию: задача как бы теряет симметрию «верх–низ». Поэтому приходится не только добавлять σ -функцию, сосредоточенную в окрестности некоторой точки, но и вычитать. Становится необходимым рассмотрение случая, когда некоторое краевое значение превосходит или, наоборот, меньше всех критических значений. Это приводит к разделению на случаи многочленов четной и нечетной степеней.

В заключение рассмотрим некоторые следствия сформулированной теоремы.

Экспоненциальной производящей функцией для чисел Бернулли–Эйлера является функция $K(t) = \operatorname{tg} t + \sec t$. Заметим, что в случае $l = 0$ и $l = 1$ экспоненциальной производящей функцией для чисел K_n^l можно считать $K(t)$, однако в наших обозначениях это будут $K_0(t) = \int K(t) dt = -\ln \cos t + \ln \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4) + C$ и $K_1(t) = K'(t) = (1 + K^2)/2 = (1 + \sin t)/\cos^2 t = 1/(1 - \sin t)$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Экспоненциальными производящими функциями для $l = 2, 3, 4$ являются соответственно*

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \frac{3 \sin t - t \cos t}{(1 - \sin t)^2}, \\ K_3(t) &= \frac{3}{(1 - \sin t)^3} (\sin t (3 \sin t + 7) - t \cos t (5 + \sin t)), \\ K_4(t) &= \left(\frac{3t^2}{1 - \sin t} - \frac{3t \cos t}{(1 - \sin t)^2} (3 - \sin t) + \frac{3(2 - \sin t)}{(1 - \sin t)^2} \right)^{(4)}. \end{aligned}$$

Пусть

$$K(x, y) = \sum \frac{K_n^l}{l! n!} x^l y^n$$

— экспоненциальная производящая функция двух переменных. Тогда справедли-

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$K_x = (1 - 2x)K_{yy} - xyK_{yyy}.$$

Наконец, соотношение теоремы позволяет получить числа K_n^l , где $n \leq 0$.

K_n^l	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$n = 0$	1	0	0	0	0
$n = -1$	1	0	0	0	0
$n = -2$	?	1	0	0	0
$n = -3$	?	?	2	0	0
$n = -4$	?	?	?	6	0
$n = -5$	?	?	?	?	24

Можно считать, что K_0^l — это количество компонент связности пространства многочленов степени 0 с l краевыми точками, в которых многочлен принимает разные значения. В этом случае все точки прямой критические, и соответственно критическое значение совпадает с краевыми. Что обозначают числа K_n^l для отрицательных n , автору неизвестно.

Заметим, что с некоторого момента в каждой строке таблицы стоят нули. Сформулируем это утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \leq -1$; тогда $K_n^l = 0$ для $l > -n$, а $K_n^{-n} = (-n - 1)!$. Кроме того, $K_0^l = 0$ при $l > 1$.

Доказательство опирается на теорему и проводится индукцией по n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold V. I. Duke Math. J., **63**, No. 2, 537–555 (1991). 2. Arnold V. I. J. Algebraic Geom., **1**, No. 2, 197–214 (1992).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
26 сентября 2000 г.

УДК 519.142.6+517.982.22

Некоторые неравенства, связанные с матрицами Адамара

© 2002. В. В. КВАРАЦХЕЛИЯ

В настоящей работе вводится числовая характеристика матрицы Адамара (Сильвестра), которая играет важную роль при изучении сходимости рядов в банаховых пространствах (см. [1–3]). Здесь приводятся оценки этой характеристики, которые, в частности, можно интерпретировать как конкретные максимальные неравенства в банаховых пространствах с субсимметрическим базисом. Как нам кажется, ресурс введенной характеристики далеко не исчерпан, по крайней мере с точки зрения изучения сходимости рядов.