Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кварацхелия, Некоторые неравенства, связанные с матрицами Адамара, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 81–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:25:47

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$K_x = (1 - 2x)K_{yy} - xyK_{yyy}.$$

Наконец, соотношение теоремы позволяет получить числа K_n^l , где $n \leq 0$.

K_n^l	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$n = 0$	1	0	0	0	0
$n = -1$	1	0	0	0	0
$n = -2$	?	1	0	0	0
$n = -3$	?	?	2	0	0
$n = -4$	?	?	?	6	0
$n = -5$	?	?	?	?	24

Можно считать, что K_0^l — это количество компонент связности пространства многочленов степени 0 с l краевыми точками, в которых многочлен принимает разные значения. В этом случае все точки прямой критические, и соответственно критическое значение совпадает с краевыми. Что обозначают числа K_n^l для отрицательных n , автору неизвестно.

Заметим, что с некоторого момента в каждой строке таблицы стоят нули. Сформулируем это утверждение:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $n \leq -1$; тогда $K_n^l = 0$ для $l > -n$, а $K_n^{-n} = (-n - 1)!$. Кроме того, $K_0^l = 0$ при $l > 1$.

Доказательство опирается на теорему и проводится индукцией по n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold V. I. Duke Math. J., **63**, No. 2, 537–555 (1991). 2. Arnold V. I. J. Algebraic Geom., **1**, No. 2, 197–214 (1992).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
26 сентября 2000 г.

УДК 519.142.6+517.982.22

Некоторые неравенства, связанные с матрицами Адамара

© 2002. В. В. КВАРАЦХЕЛИЯ

В настоящей работе вводится числовая характеристика матрицы Адамара (Сильвестра), которая играет важную роль при изучении сходимости рядов в банаховых пространствах (см. [1–3]). Здесь приводятся оценки этой характеристики, которые, в частности, можно интерпретировать как конкретные максимальные неравенства в банаховых пространствах с субсимметрическим базисом. Как нам кажется, ресурс введенной характеристики далеко не исчерпан, по крайней мере с точки зрения изучения сходимости рядов.

Матрицей Адамара называется квадратная матрица порядка n , такая, что ее элементы суть ± 1 и любые две ее строки (столбцы) ортогональны (см., например, [4, с. 283] и [5, с. 52]). Матрицу Адамара порядка n будем обозначать через $\mathcal{H}_n = [h_{ki}^n]$. Легко видеть, что если матрица Адамара существует, то ее порядок равен 1 или 2 либо делится на 4. Адамаром была высказана гипотеза, что для любого n , кратного 4, существует матрица Адамара порядка n . Насколько нам известно, вопрос о справедливости гипотезы Адамара остается открытым. Обозначим через $\mathcal{N}_H$ множество всех натуральных чисел n , для которых существует матрица Адамара порядка n . Например, $2^n \in \mathcal{N}_H$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Матрица Сильвестра — частный случай матрицы Адамара и определяется следующими рекуррентными соотношениями (см. [2, с. 52]):

$$\mathcal{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}^{(n-1)} & \mathcal{S}^{(n-1)} \\ \mathcal{S}^{(n-1)} & -\mathcal{S}^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Ясно, что $\mathcal{S}^{(n)}$ действительно является матрицей Адамара порядка 2^n .

Используемые здесь понятия и их свойства можно найти, например, в [6–8].

Пусть $\mathcal{S}^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$, $n = 1, 2, \dots$, — матрица Сильвестра и X — банахово пространство с нормированным базисом (φ_k) . Для произвольного данного n рассмотрим следующий функционал:

$$\varrho^{(n)}(m) = \left\| \sum_{i=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n)} \right) \varphi_i \right\|, \quad m = 1, \dots, 2^n. \quad (1)$$

Выражение $\varrho^{(n)}(m)$, очевидно, зависит от X , от нормы в X и от выбора базиса (φ_k) в X .

Положим

$$\varrho^{(n)} = \max_{1 \leq m \leq 2^n} \varrho^{(n)}(m). \quad (2)$$

Функционал $\varrho^{(n)}(m)$ можно выразить и следующим образом. Пусть $a_k = \sum_{i=1}^{2^n} s_{ki}^{(n)} \varphi_i$, $k = 1, \dots, 2^n$. Тогда $\varrho^{(n)}(m) = \left\| \sum_{k=1}^m a_k \right\|$. Если (φ_k) — безусловный базис с единичной константой безусловности, то очевидно, что $\|a_k\| = \lambda(2^n)$ для всех $k = 1, \dots, 2^n$ и $\varrho^{(n)} \leq \lambda(2^n) 2^n \leq 2^{2n}$, где $\lambda(n) = \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right\|$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказано, что в пространстве l_p , $1 \leq p < \infty$, выполняется неравенство $\varrho^{(n)} \leq n 2^n$, и с помощью этой оценки в [3] строятся нетривиальные условно сходящиеся ряды в l_p , $1 \leq p < 2$. Следующая теорема дает аналогичную оценку для $\varrho^{(n)}$ в случае общих банаховых пространств с субсимметрическим базисом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{S}^{(n)} = [s_{ki}^{(n)}]$, $n = 1, 2, \dots$, — матрица Сильвестра, пусть $\varrho^{(n)}$ — выражение, определенное равенством (2), и пусть нормированный базис (φ_k) банахова пространства X , участвующий в определении выражения $\varrho^{(n)}$, является субсимметрическим с единичной константой субсимметричности. Тогда

$$\varrho^{(n)} \leq \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n 2^{-j} \lambda(2^{j-1}) \right\} 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть банахово пространство X удовлетворяет требованиям теоремы 1. Тогда

$$\varrho^{(n)} \leq \lambda(n)2^n.$$

Пусть X — произвольное банахово пространство (не обязательно с базисом), $x_1, \dots, x_{2^n}$ — последовательность произвольных элементов из единичной сферы пространства X и $\mathcal{S}^{(n)}$ — матрица Сильвестра порядка 2^n , $n = 1, 2, \dots$. По аналогии с формулой (1) пусть $\hat{\varrho}^{(n)}(m) = \left\| \sum_{i=1}^{2^n} \left(\sum_{k=1}^m s_{ki}^{(n)} \right) x_i \right\|$, $m = 1, \dots, 2^n$, и пусть $\hat{\varrho}^{(n)} = \max_{1 \leq m \leq 2^n} \hat{\varrho}^{(n)}(m)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место неравенство

$$\hat{\varrho}^{(n)} \leq n2^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X — банахово пространство типа p , $p > 1$, с нормированным субсимметрическим базисом (φ_k) с единичной константой субсимметричности. Тогда справедлива оценка

$$\varrho^{(n)} \leq c2^n,$$

где константа $c \geq 1$ зависит только от пространства X .

Таким образом, в пространствах типа p , $p > 1$ (а также в c_0), $\sup_n \varrho^{(n)}/2^n < \infty$. Следующее утверждение показывает, что в пространстве l_1 это не так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В пространстве l_1 относительно естественного базиса имеет место равенство

$$\varrho^{(n)} = \max_{1 \leq m \leq 2^n} \varrho^{(n)}(m) = (3n + 7)2^n/9 + 2(-1)^n/9, \quad n \geq 1.$$

Более того, для всех n максимум достигается в точке $m_n = (2^{n+1} + (-1)^n)/3$, и если $n \geq 3$, то тот же максимум достигается также и в точке $m'_n = (5 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1})/3$.

Оценим $\varrho^{(n)}$ снизу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если банахово пространство X удовлетворяет требованиям теоремы 1, то

$$\varrho^{(n)} \geq \max\{(n + 2)\lambda(2^n)/6, 2^n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Если базис (φ_k) симметрический, то делитель 6 в (3) можно заменить на 3.

Заметим, что помимо l_1 существуют и другие банаховы пространства, в которых $\sup_n \varrho^{(n)}/2^n = \infty$.

Естественно возникает вопрос, как изменяются указанные здесь результаты, полученные для матриц Сильвестра, при переходе к общим матрицам Адамара. Обозначим через $\mathcal{H}_n^{\text{all}}$ множество всех матриц Адамара порядка n , $n \in \mathcal{N}_H$ (ясно, что если $n = 2^j$, $j = 1, 2, \dots$, то $\mathcal{H}_n^{\text{all}}$ содержит и матрицы Сильвестра порядка 2^j). Для матрицы Адамара $\mathcal{H}_n = [h_{ki}^n]$ аналогично введем числовую характеристику $\varrho_{\mathcal{H}_n}(m) = \left\| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m h_{ki}^n \right) \varphi_i \right\|$, $m = 1, \dots, n$, где (φ_i) — нормированный базис банахова пространства X . Если положить $a_k = \sum_{i=1}^n h_{ki}^n \varphi_i$, то, очевидно, что $\varrho_{\mathcal{H}_n}(m) = \left\| \sum_{k=1}^m a_k \right\|$. Ясно, что если (φ_k) — безусловный базис с единичной константой безусловности, то $\max_{1 \leq m \leq n} \varrho_{\mathcal{H}_n}(m) \leq \lambda(n)n \leq n^2$ для всех $\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}$.

Введем обозначения $\varrho_{\mathcal{H}_n} = \max_{1 \leq m \leq n} \varrho_{\mathcal{H}_n}(m)$ и $\varrho_n = \max_{\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}} \varrho_{\mathcal{H}_n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Характеристику $\varrho_{\mathcal{H}_n} = \varrho(\mathcal{H}_n)$ можно интерпретировать как норму матрицы $\mathcal{H}_n$. В самом деле, обозначим через M_n , $n \in \mathcal{N}_H$, векторное пространство всех квадратных матриц порядка n , и пусть X — банахово пространство с нормированным базисом (φ_i) . Очевидно, что $\mathcal{H}_n^{\text{all}} \subset M_n$. Пусть $\mathcal{T}_n = [t_{ki}^n] \in M_n$ — произвольная матрица, и пусть $\varrho(\mathcal{T}_n) = \max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m t_{ki}^n \right) \varphi_i \right\|$. Легко видеть, что ϱ является нормой в пространстве M_n и относительно этой нормы M_n является банаховым пространством.

Следующая теорема дает оценку снизу для выражения ϱ_n .

ТЕОРЕМА 8. Пусть X — банахово пространство с нормированным безусловным базисом с единичной константой безусловности. Тогда

$$\varrho_n \geq \max\{(1/\sqrt{2})\lambda(n)\sqrt{n}, n\} \quad \text{для всех } n \in \mathcal{N}_H.$$

Сформулируем аналог теоремы 1 в случае матриц Адамара.

ТЕОРЕМА 9. Пусть X — банахово пространство с нормированным субсимметрическим базисом с единичной константой субсимметричности. Тогда

$$\varrho_n \leq \lambda([\sqrt{n}] + 1)n$$

для всех $n \in \mathcal{N}_H$, где $[\sqrt{n}]$ — целая часть числа $\sqrt{n}$.

Следующее предложение уточняет теорему 9 в случае l_p , $1 \leq p < \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. В пространстве l_p , $1 \leq p < \infty$, относительно естественного базиса для всех $n \in \mathcal{N}_H$ справедливо неравенство

$$\varrho_n \leq \max\{n^{(p+2)/2p}, n\}.$$

Для матриц Сильвестра из предложений 6 и 10 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 11. В пространстве l_p , $p \geq 2$, относительно естественного базиса

$$\varrho^{(n)} = 2^n.$$

Пусть X — банахово пространство (не обязательно с базисом), $x_1, \dots, x_n$ — последовательность произвольных элементов из единичной сферы пространства X и $\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}$, $n \in \mathcal{N}_H$. По аналогии введенными выше выражениями рассмотрим выражения $\hat{\varrho}_{\mathcal{H}_n}(m) = \left\| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m h_{ki}^n \right) x_i \right\|$, $m = 1, \dots, n$, $\hat{\varrho}_{\mathcal{H}_n} = \max_{1 \leq m \leq n} \hat{\varrho}_{\mathcal{H}_n}(m)$ и $\hat{\varrho}_n = \max_{\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}} \hat{\varrho}_{\mathcal{H}_n}$.

СЛЕДСТВИЕ 12. Для всех $n \in \mathcal{N}_H$ справедливо неравенство

$$\hat{\varrho}_n \leq n\sqrt{n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Теорему 9 можно перефразировать в терминах максимального неравенства. Пусть $\mathcal{H}_n = [h_{ki}^n]$ — произвольная матрица Адамара порядка $n \in \mathcal{N}_H$, и пусть $a_k = \sum_{i=1}^n h_{ki}^n \varphi_i$, $k = 1, \dots, n$, где (φ_i) — нормированный субсимметрический базис банахова пространства X с единичной константой субсимметричности. Тогда

$$\max_{1 \leq m \leq n} \left\| \sum_{k=1}^m \vartheta_k a_k \right\| \leq \lambda([\sqrt{n}] + 1)n$$

для всех знаков $\vartheta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$, матриц Адамара $\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}$ и натуральных чисел $n \in \mathcal{N}_H$.

С помощью $\varrho^{(n)}$ и ϱ_n можно охарактеризовать пространства, изоморфные l_1 .

ТЕОРЕМА 14. Пусть X — банахово пространство с нормированным субсимметрическим базисом (φ_k) с единичной константой субсимметричности. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) пространство X изоморфно l_1 ;
- (ii) существует константа $\varepsilon > 0$, такая, что $\varrho^{(n)}/(n2^n) \geq \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \dots$, где ε не зависит от n ;
- (iii) существуют константа $\delta > 0$, такая, что $\varrho_n/(n\sqrt{n}) \geq \delta$ для всех $n \in \mathcal{N}_H$, где δ не зависит от n .

Автор выражает глубокую признательность проф. Н. Н. Вахания и С. А. Чобаняну за внимание и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **160**, No. 2, 201–203 (1999).
2. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **162**, No. 2, 199–202 (2000).
3. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, No. 3 (2001).
4. Холл М. Комбинаторика. Мир, М., 1970.
5. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. Связь, М., 1979.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
7. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
8. Day M. M. Normed linear spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

Институт вычислительной математики
им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии

Поступило в редакцию
27 октября 2000 г.
В переработанном виде
27 августа 2001 г.

УДК 517.982

Строго сингулярные вложения*

© 2002. С. Я. Новиков, Е. М. Семенов, Ф. Л. Эрнандес

Оператор A , действующий из банахова пространства E в банахово пространство F , называется *строго сингулярным* или *оператором Като*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство $B \subset E$ не является изоморфизмом [1, Sec. 2.c]. Оператор A , действующий из банаховой решетки E в банахово пространство F , называется *дизъюнктно строго сингулярным*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство, порожденное системой дизъюнктивных элементов, не является изоморфизмом [2].

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.) или *симметричным*, если

1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;

*Работа второго автора была частично поддержана РФФИ, грант 98-01-00044, и фондом «Университеты России», грант 3667, а третьего автора — DGIES (Испания), грант PB 97-0240.