Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Новиков, Е. М. Семёнов, Ф. Л. Эрнандес,
Строго сингулярные вложения, *Функц. анализ и его
прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:35:20

для всех знаков $\vartheta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$, матриц Адамара $\mathcal{H}_n \in \mathcal{H}_n^{\text{all}}$ и натуральных чисел $n \in \mathcal{N}_H$.

С помощью $\varrho^{(n)}$ и ϱ_n можно охарактеризовать пространства, изоморфные l_1 .

ТЕОРЕМА 14. Пусть X — банахово пространство с нормированным субсимметрическим базисом (φ_k) с единичной константой субсимметричности. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) пространство X изоморфно l_1 ;
- (ii) существует константа $\varepsilon > 0$, такая, что $\varrho^{(n)}/(n2^n) \geq \varepsilon$ для всех $n = 1, 2, \dots$, где ε не зависит от n ;
- (iii) существуют константа $\delta > 0$, такая, что $\varrho_n/(n\sqrt{n}) \geq \delta$ для всех $n \in \mathcal{N}_H$, где δ не зависит от n .

Автор выражает глубокую признательность проф. Н. Н. Вахания и С. А. Чобаняну за внимание и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **160**, No. 2, 201–203 (1999).
2. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **162**, No. 2, 199–202 (2000).
3. Vakhania N., Kvaratskhelia V. Bull. Georgian Acad. Sci., **163**, No. 3 (2001).
4. Холл М. Комбинаторика. Мир, М., 1970.
5. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. Связь, М., 1979.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
7. Diestel J., Jarchow H., Tonge A. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
8. Day M. M. Normed linear spaces. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

Институт вычислительной математики
им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии

Поступило в редакцию
27 октября 2000 г.
В переработанном виде
27 августа 2001 г.

УДК 517.982

Строго сингулярные вложения*

© 2002. С. Я. Новиков, Е. М. Семенов, Ф. Л. Эрнандес

Оператор A , действующий из банахова пространства E в банахово пространство F , называется *строго сингулярным* или *оператором Като*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство $B \subset E$ не является изоморфизмом [1, Sec. 2.c]. Оператор A , действующий из банаховой решетки E в банахово пространство F , называется *дизъюнктно строго сингулярным*, если никакое его сужение на бесконечномерное подпространство, порожденное системой дизъюнктивных элементов, не является изоморфизмом [2].

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.) или *симметричным*, если

1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;

*Работа второго автора была частично поддержана РФФИ, грант 98-01-00044, и фондом «Университеты России», грант 3667, а третьего автора — DGIES (Испания), грант PB 97-0240.

2) из равноизмеримости функций $x(t)$ и $y(t)$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$ ([3, Сес. 2.а] или [4, разд. 2.4]).

Аналогично (с очевидными изменениями) определяется симметричное пространство на $[0, \infty)$.

Следуя [3], мы будем предполагать, что E сепарабельно или изоморфно сопряженному к некоторому сепарабельному пространству. Изложению теории г.и.-пространств посвящены монографии [3, 4, 16].

Настоящая работа посвящена изучению вопроса, когда для пары вложенных г.и.-пространств $E \subset F$ тождественный оператор, действующий из E в F , строго сингулярен. Это означает, что для любого бесконечномерного подпространства $B \subset E$ нормы пространств E и F не эквивалентны на B . Очевидно, что строго сингулярное вложение пары г.и.-пространств является дизъюнктно строго сингулярным. Обратное утверждение не имеет места. Например, если $1 \leq p < q < \infty$, то вложение $L_q \subset L_p$ дизъюнктно строго сингулярно, но не строго сингулярно. Действительно, в силу неравенства Хинчина нормы пространств L_q и L_p эквивалентны на линейной оболочке системы Радемахера $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t$.

Если E — г.и.-пространство и $\|1\|_E = 1$, то справедливы вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$ и для всех $x \in L_\infty$ выполняются неравенства $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_E \leq \|x\|_{L_\infty}$ [4, теорема 2.4.1]. В [5] было доказано, что вложение $L_\infty \subset E$ строго сингулярно для любого г.и.-пространства $E \neq L_\infty$. Этому утверждению предшествовала теорема А. Гротендика о том, что вложение $L_\infty \subset L_p$ строго сингулярно для любого $p \in [1, \infty)$ [6]. В действительности это свойство характеризует L_∞ в классе г.и.-пространств. Более точно, если г.и.-пространство E отлично от L_1 и всякое вложение $E \subset F$ строго сингулярно для любого г.и.-пространства $F \neq E$, то $E = L_\infty$ [7].

Обозначим через G замыкание пространства L_∞ в пространстве Орлича L_M , где $M(u) = e^{u^2} - 1$. Норма в G вводится следующим образом:

$$\|x\|_G = \inf \left\{ \lambda : \lambda > 0, \int_0^1 e^{(x(t)/\lambda)^2} dt \leq 2 \right\}.$$

Пусть E — г.и.-пространство. Для того чтобы нормы

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n \right\|_E, \quad \|c\|_{l_2}$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $E \supset G$ ([8] или [3, Theorem 2.b.4]). Обозначим через $[r_n] = [r_n]_E$ подпространство в E , порожденное системой Радемахера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E — г.и.-пространство. Для того чтобы вложение $E \subset L_1$ было не строго сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы $E \supset G$.

Достаточность условия $E \supset G$ была показана выше. Необходимость доказывалась значительно сложнее и использует результаты работ [9–12, 3–5]. Теорема 1 была сформулирована как гипотеза в [13], однако попытки доказать ее предпринимались и ранее; более слабые результаты содержатся в [13–15].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E — г.и.-пространство. Если нормы пространств E и L_1 эквивалентны на некотором бесконечномерном подпространстве, то $[r_n]_E \cong [r_n]_{L_1} \cong l_2$.

Как видно из доказательства теоремы 2.b.4 из [3], условия $E \supset G$ и

$$\sup_n n^{-1/2} \left\| \sum_{k=1}^n r_k \right\|_E < \infty$$

эквивалентны.

Теорема 1 и следствие 2 говорят об экстремальных свойствах пространства G и системы Радемахера. Следующее утверждение показывает, что теорема 1 описывает также и характеристическое свойство пространства L_1 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть E, F — r.i.-пространства, $L_\infty \subset E \subset F \subset L_1$, $E \neq L_\infty$, $F \neq L_1$. Существует такое r.i.-пространство F_1 , что

- 1) $F_1 \subset F$ и это вложение не является дизъюнктно строго сингулярным;
- 2) $E \not\subset F_1$.

С помощью теоремы 1 и техники Кадеца–Пелчинского [17] доказывается

ТЕОРЕМА 4. Пусть E, F — r.i.-пространства, $E \subset F$ и E сепарабельно. Вложение $E \subset F$ строго сингулярно тогда и только тогда, когда оно дизъюнктно строго сингулярно и нормы пространств E, F не эквивалентны на подпространстве, порожденном системой Радемахера.

Естественный вопрос о существенности условия сепарабельности пространства E в теореме 4 остался открытым. Однако теорему 4 удалось применить для решения задачи о строгой сингулярности вложения пространств $\exp L_p$, которые, как известно, несепарабельны. Для любого $p > 0$ функция $e^{|u|^p}$ выпукла для достаточно больших u . Поэтому существует выпуклая на всей оси функция $M_p(u)$, эквивалентная $e^{|u|^p}$ при $|u| \geq 1$. Пространство Орлича, порожденное функцией $M_p(u)$, обозначается через $\exp L_p$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $0 < p < q < \infty$. Вложение $\exp L_q \subset \exp L_p$ строго сингулярно тогда и только тогда, когда $q > 2$.

Используя результаты работы [7], нетрудно показать, что вложение $\exp L_q \subset \exp L_p$ дизъюнктно строго сингулярно для любых $0 < p < q < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
2. Garsia del Amo A., Hernandez F. L., Ruiz C. Proc. Roy. Soc. Edinburg. Sect. A, 126, 1011–1026 (1996).
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
5. Новиков С. Я. Матем. заметки, **62**, № 4, 549–563 (1997).
6. Grothendieck A. Canad. J. Math., **6**, 158–160 (1954).
7. Garsia del Amo A., Hernandez F. L., Sanchez V. M., Semenov E. M. J. London Math. Soc., **62**, 239–252 (2000).
8. Rodin V. A., Semenov E. M. Anal. Math., **1**, 207–222 (1975).
9. Aldous D. J. Trans. Amer. Math. Soc., **267**, 445–463 (1981).
10. Dor L. Ann. of Math., **102**, 463–474 (1975).
11. Dacunha-Castelle D., Krivine J.-L. Israel J. Math., **26**, 330–351 (1977).
12. Raunaud Y. Illinois J. Math., **39**, 212–250 (1995).
13. Montgomery-Smith S., Semenov E. M. Positivity, **4**, 397–402 (2000).
14. Токарев Е. В. Функц. анализ и его прил., **13**, вып. 2, 93–94 (1979).
15. Novikov S. Ya. Collect. Math., **44**, 211–215 (1993).
16. Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L. Memoirs Amer. Math. Soc., **217** (1979).
17. Kadec M. I., Pelczynski A. Studia Math., **21**, 161–176 (1961/1962).