Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных накрытий Фано, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 88–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:53:19

УДК 512.7

Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных накрытий Фано*

© 2002. А. В. Пухликов

1. Цель заметки — установить бирациональную сверхжесткость и описать группу бирациональных автоморфизмов многомерных комплексных алгебраических многообразий с пучком двойных гиперповерхностей Фано индекса 1. Будет доказано, что заданный пучок двойных гиперповерхностей Фано — единственный пучок дивизоров на рассматриваемых многообразиях, состоящий из унилинейчатых многообразий (т. е. из дивизоров, которые покрываются рациональными кривыми). В частности, любой бирациональный автоморфизм переводит этот пучок в себя.

Опишем конструкцию этих многообразий. Зафиксируем целые положительные l , m и $M \geq 4$, удовлетворяющие соотношению $l + m = M + 1$. Символом $\mathbb{P}$ обозначим $(M + 1)$ -мерное комплексное проективное пространство. Пусть $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ — локально тривиальное $\mathbb{P}$ -расслоение над $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{E} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга $M + 2$. Очевидно, что $\text{Pic } \mathbb{E} = \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}G$, где L — класс тавтологического пучка, а G — класс слоя проекции π . Пусть $X \subset \mathbb{E}$ — гладкий дивизор в линейной системе $|mL + bG|$, а $W \subset \mathbb{E}$ — такой дивизор в линейной системе $|2(lL + cG)|$, что $W \cap X$ есть гладкая гиперповерхность в X , определяющая двойное накрытие $V \xrightarrow{\sigma} X$, разветвленное над $W \cap X$. Для простоты композицию $\pi \circ \sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ обозначим символом π . Легко видеть, что ее слои суть двойные гиперповерхности Фано индекса 1, бирациональная жесткость которых доказана в [3, 4].

ТЕОРЕМА. *Существует такая константа $\gamma(\mathbb{E}) \in \mathbb{Z}$, что для любых b , c , удовлетворяющих неравенству $(2m - 1)b + 2mc \geq \gamma(\mathbb{E})$, и достаточно общих дивизоров X , W расслоение $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ бирационально сверхжесткое. В частности, любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V^\sharp$ на расслоение Фано $\pi^\sharp: V^\sharp \rightarrow S^\sharp$ является послойным:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V^\sharp \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi^\sharp \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\mu} & S^\sharp \end{array}$$

где μ сюръективно (т. е. $S^\sharp$ есть либо $\mathbb{P}^1$, либо точка). Группы бирациональных и бигеометрических автоморфизмов многообразия V совпадают: $\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Константа $\gamma(\mathbb{E})$ вычисляется так. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^{M+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a_i)$, где $a_0 = 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{M+1}$, $a_i \in \mathbb{Z}_+$, так что линейная система $|L|$ свободна. Легко подсчитать, что $L^{M+2} = a = \sum_{i=1}^{M+1} a_i$. Теперь $\gamma(\mathbb{E}) = 4 - ma$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта поддержки исследований молодых ученых 99-15-96013, гранта РФФИ 99-01-01132, и гранта INTAS-OPEN 97/2072.

Общность дивизоров X и W в формулировке теоремы понимается в смысле топологии Зарисского на линейных системах $|mL + bG|$ и $|2(lL + cG)|$ соответственно. Определение сверхжесткости см. в [3–5].

Тот факт, что бирациональные соответствия жестких многообразий являются послойными, хорошо известен [5]. Всякий бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } V$ является послойным и потому для общих X, W сохраняет слои проекции π , откуда ввиду сверхжесткости общего слоя [3, 4] получаем последнее утверждение теоремы. В доказательстве нуждается только сверхжесткость общего расслоения $V/\mathbb{P}^1$.

3. Доказательство теоремы проводится методом максимальных особенностей, начало которому (на современном этапе алгебраической геометрии) положили работа Ю. И. Манина [1] (в размерности два над незамкнутым полем) и работа В. А. Исковских и Ю. И. Манина [2] (в размерности три над $\mathbb{C}$). Современную многомерную теорию см. в [4, 5]. Для доказательства теоремы достаточно установить следующие факты.

Пусть $F = \pi^{-1}(t) \subset V$ — слой над точкой $t \in \mathbb{P}^1$, а $x \in F$ — произвольная точка. Положим $\mu = \text{mult}_x F$. В силу общности $\mu = 1$ или 2 , и если $\mu = 2$, то x — невырожденная квадратичная особенность слоя F . Пусть $Y \subset F$ — неприводимое подмногообразие коразмерности $\delta = 1$ или 2 . Тогда

- (i) при $\delta = 1$ имеем $\text{mult}_x Y \leq (\mu/m) \deg Y$;
- (ii) при $\delta = 1$ и $\mu = 2$, если $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ — раздутие точки x и $E = \varphi^{-1}(x) \subset \tilde{F}$ — исключительный дивизор, то для произвольной точки $y \in E$ выполнено неравенство $\text{mult}_y \tilde{Y} \leq (1/m) \deg Y$, где $\tilde{Y} \subset \tilde{F}$ — собственный прообраз Y на $\tilde{F}$;
- (iii) при $\delta = 2$ имеем $\text{mult}_x Y \leq (2\mu/m) \deg Y$.

Степень $\deg$ берется относительно очень обильного на слоях класса σ^*L .

4. Утверждения (i) и (iii) доказываются модификацией методов, развитых в [3, 4]. В случае (ii) особая точка $x \in F$ может возникнуть либо из особой точки $z = \sigma(x)$ гиперповерхности $Q = \sigma(F) \subset \mathbb{P}$, либо из особенности дивизора ветвления $W \cap Q$. В первом случае комбинация техники, развитой в [5] (леммы 3.4–3.6), с техникой гиперкасательных систем, приспособленной в [4] к изучению двойных гиперповерхностей Фано, дает требуемую оценку. Однако во втором случае (точка $z \in Q$ неособа) этих методов недостаточно. Опишем конструкцию, позволяющую работать и с этим случаем.

5. Предположим, что (ii) не выполнено и $z \in Q$ — гладкая точка. Пусть $\psi: \tilde{Q} \rightarrow Q$ — раздутие точки z и $E^* = \psi^{-1}(z)$ — исключительный дивизор. Морфизм σ продолжается до двойного накрытия $\sigma: E \rightarrow E^*$, разветвленного над неособой квадрикой $R \subset E^*$, $R = \mathbb{P}(T_z(W \cap Q))$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma(y) = w \notin R$. Пусть $T^* \subset E^*$ — квадратичный конус с вершиной w , состоящий из всех прямых, содержащих w и касающихся R , а $T \subset T_z Q$ — его прообраз. Для точки $p \in \mathbb{P}$ общего положения пусть $C(p)$ — конус с вершиной p и базой T (мы рассматриваем $T_z Q$ как гиперплоскость в $\mathbb{P}$). Методами леммы 3.5 из [5] можно показать, что эффективный цикл $Z = \sigma(Y \circ \sigma^{-1}(C(p)))$ коразмерности 2 удовлетворяет неравенству $\text{mult}_z Z > (5/(2m)) \deg Z$. Можно считать, что Z неприводим. Если $Z \not\subset T_z Q$, то эффективный цикл $Z^\sharp = (Z \circ T_z Q)$ имеет коразмерность 3 и удовлетворяет оценке $\text{mult}_z Z^\sharp > (5/m) \deg Z^\sharp$, чего не может быть. Значит, $Z \subset T_z Q$. Но в силу построения цикла Z и общности точки p отсюда вытекает, что $Z = T \cap Q$. Однако нетрудно проверить, что $\deg Z = 2m$,

$\text{mult}_z Z = 4$ — противоречие. Это завершает проверку условий (i)–(iii) и доказывает теорему. Детали намеченных рассуждений будут опубликованы в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манин Ю. И. Матем. сб., **72**, №2, 161–192 (1967).
2. Исковских В. А., Манин Ю. И. Матем. сб., **86**, №1, 140–166 (1971).
3. Пухликов А. В. Функциональный анализ и его приложения, **33**, вып. 4, 88–90 (1999).
4. Пухликов А. В. Матем. сб., **191**, №6, 101–126 (2000).
5. Пухликов А. В. Изв. РАН., сер. матем., **64**, 3, 131–150 (2000).

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
26 декабря 2000 г.

УДК 512.77

Четыре M -кривые степени 8

© 2002. Б. ШЕВАЛЬЕ

Мы доказываем существование четырех топологических типов пар $(\mathbb{RP}^2, C_8)$ (изотопических типов C_8 в $\mathbb{RP}^2$), где C_d обозначает гладкую вещественную алгебраическую плоскую кривую степени d . Классификация пар $(\mathbb{RP}^2, C_d)$, составляющая часть 16-й проблемы Гильберта, до сих пор далека от завершения. См. обзоры [2, 6, 7], а также обзор [3], где приведен список из 78 (соответственно 13) изотопических типов, про которые было известно, что они реализуемы (соответственно неизвестно, реализуемы ли) M -кривыми C_8 (кривая C_d называется M -кривой, если она имеет максимально возможное число овалов, которое равно 22 при $d = 8$). Теорема 1 заменяет эти числа на 82 (соответственно 9). Основное утверждение, используемое при построениях с контролируемой топологией, — это теорема Виро о склеивании карт [8, 9] (см. также [4, 1]).

ТЕОРЕМА 1. Следующие изотопические типы¹⁾ реализуемы вещественными алгебраическими кривыми степени 8:

$$16 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 2 \rangle \rangle, \quad 2 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 16 \rangle \rangle, \quad 13 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle, \quad 5 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle.$$

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Изотопические типы теоремы 1 реализуются возмущениями кривой $C_8^{\text{sing}} = \{(X:Y:Z) \mid F = 0\}$, $F = \prod_{k=1}^4 (YZ - a_k Y^2 - X^2)$, $a_1 < \dots < a_4$. Это объединение

¹⁾Мы используем обозначения Виро [7]: $a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle$ кодирует изотопический тип кривой на рис. 1, где через a , b и c обозначены числа овалов, лежащих вне друг друга в соответствующей области.