Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Шевалье, Четыре M -кривые степени 8, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 90–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:18:43

$\text{mult}_z Z = 4$ — противоречие. Это завершает проверку условий (i)–(iii) и доказывает теорему. Детали намеченных рассуждений будут опубликованы в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манин Ю. И. Матем. сб., **72**, №2, 161–192 (1967).
2. Исковских В. А., Манин Ю. И. Матем. сб., **86**, №1, 140–166 (1971).
3. Пухликов А. В. Функциональный анализ и его приложения, **33**, вып. 4, 88–90 (1999).
4. Пухликов А. В. Матем. сб., **191**, №6, 101–126 (2000).
5. Пухликов А. В. Изв. РАН., сер. матем., **64**, 3, 131–150 (2000).

Институт системного анализа РАН

Поступило в редакцию
26 декабря 2000 г.

УДК 512.77

Четыре M -кривые степени 8

© 2002. Б. ШЕВАЛЬЕ

Мы доказываем существование четырех топологических типов пар $(\mathbb{RP}^2, C_8)$ (изотопических типов C_8 в $\mathbb{RP}^2$), где C_d обозначает гладкую вещественную алгебраическую плоскую кривую степени d . Классификация пар $(\mathbb{RP}^2, C_d)$, составляющая часть 16-й проблемы Гильберта, до сих пор далека от завершения. См. обзоры [2, 6, 7], а также обзор [3], где приведен список из 78 (соответственно 13) изотопических типов, про которые было известно, что они реализуемы (соответственно неизвестно, реализуемы ли) M -кривыми C_8 (кривая C_d называется M -кривой, если она имеет максимально возможное число овалов, которое равно 22 при $d = 8$). Теорема 1 заменяет эти числа на 82 (соответственно 9). Основное утверждение, используемое при построениях с контролируемой топологией, — это теорема Виро о склеивании карт [8, 9] (см. также [4, 1]).

ТЕОРЕМА 1. Следующие изотопические типы¹⁾ реализуемы вещественными алгебраическими кривыми степени 8:

$$16 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 2 \rangle \rangle, \quad 2 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 16 \rangle \rangle, \quad 13 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle, \quad 5 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle.$$

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Изотопические типы теоремы 1 реализуются возмущениями кривой $C_8^{\text{sing}} = \{(X:Y:Z) \mid F = 0\}$, $F = \prod_{k=1}^4 (YZ - a_k Y^2 - X^2)$, $a_1 < \dots < a_4$. Это объединение

¹⁾Мы используем обозначения Виро [7]: $a \sqcup 1 \langle b \sqcup 1 \langle c \rangle \rangle$ кодирует изотопический тип кривой на рис. 1, где через a , b и c обозначены числа овалов, лежащих вне друг друга в соответствующей области.

четырёх коник, имеющих попарные пересечения кратности 4 в точке $(0:0:1)$. Такая кривая не удовлетворяет условиям теоремы Виро о склеивании. При этом k -я коника имеет или не имеет вещественные пересечения с прямой $Z = 0$ в зависимости от знака числа a_k , но при любых знаках C_8^{sing} расположена в некоторой аффинной карте так, как на рис. 2.

Введем аффинные координаты $x = X/Z$, $y = Y/Z$ и $u = x$, $v = y - x^2$. В этих координатах C_8^{sing} имеет вид $\{f(x, y) = 0\}$ и $\{\tilde{f}(u, v) = 0\}$ соответственно, где $f(x, y) = F(x, y, 1)$ и $\tilde{f}(u, v) = f(u, v + u^2) = \prod_{k=1}^4 (v - a_k(v + u^2)^2) = \prod_{k=1}^4 (v - a_k u^4) + \dots$. Таким образом, C_8^{sing} имеет особенность в $(0:0:1)$, которая является полуквазиоднородной относительно координат (u, v) (см. [6]). Эту особенность можно сгладить методом Виро с помощью карты, которая получается склеиванием меньших карт, как изображено на рис. 4 и 5 (в этот момент мы выбираем параметры $a_1, \dots, a_4$). Эти карты соответствуют разбиению треугольника $[(0, 0), (16, 0), (0, 4)]$, изображенному на рис. 3; они получаются бирациональными преобразованиями из карт распусканий особенностей E_6 , D_4 , J_{10} и Z_{15} (см. [6, пп. 4.1, 4.2, 4.4]). Рисунок 4 дает изотопические типы $16 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 2 \rangle \rangle$ и $2 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 16 \rangle \rangle$; рис. 5 дает изотопические типы $13 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 5 \rangle \rangle$ и $5 \sqcup 1 \langle 2 \sqcup 1 \langle 13 \rangle \rangle$. Чтобы поменять местами количества внутренних и внешних овалов (т. е. $13 \leftrightarrow 5$ и $16 \leftrightarrow 2$), достаточно отразить рис. 4 и 5 относительно горизонтальной оси (это соответствует замене a_k на $-a_k$).

Рис. 4

Рис. 5

Такое сглаживание может быть выполнено в координатах (u, v) . Возвращаясь к координатам (x, y) , мы получим мономы степени, большей чем 8, но, согласно [5, Lemma 12], можно осуществить топологически эквивалентное сглаживание при помощи полинома от x , y степени 8. Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательства в [5] основаны на теореме Римана–Роха. Здесь мы приводим прямое полное доказательство для нужного нам частного случая.

Фиксируем полином $\tilde{g}(u, v) = \sum_{i+4j \leq 16} b_{ij} u^i v^j$, реализующий одну из четырех рассматриваемых карт (здесь и далее все индексы предполагаются неотрицательными). Обозначим через $\tilde{g}_t$ полином Виро: $\tilde{g}_t(u, v) = \sum_{i+4j \leq 16} b_{ij}(t) u^i v^j$, где $b_{ij}(t) = t^{16-(i+4j)} b_{ij}$. Выберем $a_1, \dots, a_4$ так, чтобы совпали ограничения полиномов $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на отрезок $[(16, 0), (0, 4)]$, т.е. чтобы коэффициенты при мономах $u^{16-4j} v^j$, $j = 0, \dots, 4$, в $\tilde{f}$ были бы такими же, как и в $\tilde{g}$.

Рассмотрим полином $h(x, y) = \sum_{r+s \leq 8} \varepsilon_{rs} x^r y^s$ с неопределенными коэффициентами. В координатах (u, v) он принимает вид $\tilde{h}(u, v) := h(u, v + u^2) = \sum_{i+2j \leq 16} \eta_{ij}(\vec{\varepsilon}) u^i v^j$, где через $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}, \dots)$ обозначен вектор, составленный из всех ε_{rs} ($r + s \leq 8$), и $\eta_{ij}(\vec{\varepsilon})$ — некоторые явно выписываемые линейные функции от $\vec{\varepsilon}$. Обозначим через $\vec{\varepsilon}(t)$ решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \eta_{ij}(\vec{\varepsilon}) = b_{ij}(t), & i + 4j < 16, \\ \eta_{ij}(\vec{\varepsilon}) = 0, & i + 4j = 16. \end{cases}$$

Фактически это 17 независимых систем: для каждого $m = 0, \dots, 16$ мы имеем систему уравнений, отвечающую множеству индексов $\{(i, j) \mid i + 2j = m\}$. Легко убедиться в том, что матрицы всех этих систем треугольны и невырождены. Поэтому решение существует и его можно явно выразить через $b_{ij}(t)$. Например, $\varepsilon_{rs}(t)$ при $r + 2s \leq 8$ — это просто коэффициент при $x^r y^s$ в полиноме $g(x, y) := \tilde{g}(x, y - x^2)$.

Положим $f_t(x, y) = f(x, y) + h_t(x, y)$, где $h_t(x, y)$ получено из $h(x, y)$ подстановкой $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t)$. Полином $f_t(x, y)$, записанный в координатах (u, v) , принимает вид

$$\tilde{f}_t(u, v) = \tilde{f}(u, v) + \sum_{i+4j < 16} b_{ij}(t) u^i v^j + \sum_{i+4j > 16} c_{ij}(t) u^i v^j, \quad \lim_{t \rightarrow 0} c_{ij}(t) = 0.$$

Значит, используя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы Виро (см. [8, 9]), можно показать, что существует $t_0 > 0$, такое, что при $t \in (0, t_0]$ кривая $\{f_t = 0\}$ получается из $\{f = 0\}$ вклеиванием фрагмента $\{g = 0\}$ в особую точку $(0:0:1)$.

Замечание. Этот подход можно рекурсивно применять к промежуточным картам, используемым при построении кривой $\{\tilde{g} = 0\}$. Почти все изотопические типы M -кривых C_8 можно получить этим способом (слово «почти» порождает вопросы). Его также можно применять к гиперповерхностям.

Благодарности. Интерес к рассмотрению кривой C_8^{sing} у меня возник после обсуждений с А. Б. Корчагиным. Я благодарен С. Ю. Оревкову за значительное улучшение изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Birkhäuser, Boston, 1994.
2. Гудков Д. А. УМН, **29**, 1–79 (1974).
3. Korchagin A. B. In: Visiting Scholars' Lectures—1997. Math. Series, Vol. 19, Texas Tech University, 1997, pp. 85–140.
4. Risler J.-J. Constructions d'hypersurfaces

algébriques réelles (d'après Viro). Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93. Astérisque, No. 216 (1999), Exp. 763, pp. 69–86. **5.** *Shustin E. I.* Алгебра и анализ, **10**, 221–249 (1999). **6.** *Виро О. Я.* Алгебра и анализ, **1**, вып. 5, 1–73 (1989). **7.** *Виро О. Я.* УМН, **41**, 55–82 (1986). **8.** *Viro O. Ya.* In: Lecture Notes in Math., Vol. 1960, 1984, pp. 187–200. **9.** *Виро О. Я.* Вещественные алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами. Диссертация д. ф.-м. н., Ленинград, 1983; <http://www.math.uu.se/~oleg>

Université Toulouse II, Département de Mathématiques,
Laboratoire E. Picard, CNRS UMR 5580

Поступило в редакцию
22 января 2001 г.

УДК 512

О значениях показателей роста групп с условием малого сокращения

© 2002. А. Г. ЭРШЛЕР (ДЮБИНА)

Мы рассматриваем конечно порожденную группу G с фиксированной системой образующих S . Пусть d — словарная метрика, соответствующая системе S , $B_G(n)$ — шар $\{g \in G : d(g, e) \leq n\}$, а $v = v_S(G)$ обозначает (экспоненциальный) показатель роста

$$v = v_S(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\#B_G(n)},$$

где $\#$ — мощность множества.

Группа G имеет экспоненциальный рост, если для некоторой (и, следовательно, для любой) конечной системы образующих S (экспоненциальный) показатель роста $v_S(G)$ больше 1.

Пусть k — количество образующих группы G . Выполнены очевидные оценки

$$1 \leq v \leq 2k - 1,$$

причем равенство в последнем неравенстве достигается только тогда, когда группа свободна.

В общем случае мало что известно о значениях экспоненциальных показателей роста. Но, например, известно, что показатель роста любой гиперболической группы является целым алгебраическим числом [4, 5].

В этой заметке мы рассматриваем множество

$$\Omega = \{v \in [1, \infty) \mid v = v_S(G) \text{ для некоторых } G \text{ и } S\}.$$

Это множество всюду плотно в $[1, \infty)$ (см. [2, 6]). В [6] спрашивается, какую мощность имеет Ω .

Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega_2 = \{v \in [1, \infty) \mid v = v(G) \text{ для 2-порожденной группы } G\}$. Тогда $\#\Omega_2 = 2^{\aleph_0}$.

Эта теорема является следствием такого результата:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Существует функция $E: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ со следующим свойством. Пусть $r_i = (a^{E(i)} b^{E(i)})^{100}$. Для $J \subset \mathbb{N}$ положим

$$G_J = \langle a, b \mid r_j = 1, j \in J \rangle.$$

Тогда если $I \neq J$, то $v_{\{a,b\}}(G_I) \neq v_{\{a,b\}}(G_J)$.