Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Эршлер (Дюбина), О значениях показателей роста групп с условием малого сокращения, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 1, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:14:51

algébriques réelles (d'après Viro). Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93. Astérisque, No. 216 (1999), Exp. 763, pp. 69–86. **5.** Shustin E. I. Алгебра и анализ, **10**, 221–249 (1999). **6.** Бу-ро О. Я. Алгебра и анализ, **1**, вып. 5, 1–73 (1989). **7.** Бу-ро О. Я. УМН, **41**, 55–82 (1986). **8.** Viro O. Ya. In: Lecture Notes in Math., Vol. 1960, 1984, pp. 187–200. **9.** Бу-ро О. Я. Вещественные алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами. Диссертация д. ф.-м. н., Ленинград, 1983; <http://www.math.uu.se/~oleg>

Université Toulouse II, Département de Mathématiques,
Laboratoire E. Picard, CNRS UMR 5580

Поступило в редакцию
22 января 2001 г.

УДК 512

О значениях показателей роста групп с условием малого сокращения

© 2002. А. Г. ЭРШЛЕР (ДЮБИНА)

Мы рассматриваем конечно порожденную группу G с фиксированной системой образующих S . Пусть d — словарная метрика, соответствующая системе S , $B_G(n)$ — шар $\{g \in G : d(g, e) \leq n\}$, а $v = v_S(G)$ обозначает (экспоненциальный) показатель роста

$$v = v_S(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\#B_G(n)},$$

где $\#$ — мощность множества.

Группа G имеет экспоненциальный рост, если для некоторой (и, следовательно, для любой) конечной системы образующих S (экспоненциальный) показатель роста $v_S(G)$ больше 1.

Пусть k — количество образующих группы G . Выполнены очевидные оценки

$$1 \leq v \leq 2k - 1,$$

причем равенство в последнем неравенстве достигается только тогда, когда группа свободна.

В общем случае мало что известно о значениях экспоненциальных показателей роста. Но, например, известно, что показатель роста любой гиперболической группы является целым алгебраическим числом [4, 5].

В этой заметке мы рассматриваем множество

$$\Omega = \{v \in [1, \infty) \mid v = v_S(G) \text{ для некоторых } G \text{ и } S\}.$$

Это множество всюду плотно в $[1, \infty)$ (см. [2, 6]). В [6] спрашивается, какую мощность имеет Ω .

Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega_2 = \{v \in [1, \infty) \mid v = v(G) \text{ для 2-порожденной группы } G\}$. Тогда $\#\Omega_2 = 2^{\aleph_0}$.

Эта теорема является следствием такого результата:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Существует функция $E: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ со следующим свойством. Пусть $r_i = (a^{E(i)} b^{E(i)})^{100}$. Для $J \subset \mathbb{N}$ положим

$$G_J = \langle a, b \mid r_j = 1, j \in J \rangle.$$

Тогда если $I \neq J$, то $v_{\{a,b\}}(G_I) \neq v_{\{a,b\}}(G_J)$.

Доказательство предложения основано на вспомогательных утверждениях, которые мы приводим ниже.

Обозначим через $|w|$ длину слова w . Известно, что для неположительной матрицы A (см. [1]) существует неотрицательное собственное число $v(A)$, такое, что для любого другого собственного числа v' выполняется неравенство $|v'| \leq v(A)$.

Мы используем в дальнейшем стандартную терминологию, относящуюся к теории малых сокращений [7, 9] и марковским грамматикам (см. [5]).

Пусть G — группа, а $\langle S, R \rangle$ — ее задание образующими и соотношениями. Симметризация R_* состоит из различных свободно приведенных циклических перестановок определяющих соотношений и их обратных. Слово u называется куском слова $r \in R_*$, если $r = uv'$ и симметризация R_* содержит еще одно, отличное от r , слово вида uv'' . Пусть $\lambda > 0$. Говорят, что $\langle S, R \rangle$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, если для любого $r \in R_*$ и любого его куска u

$$|u| < \lambda|r|.$$

Если конечно представимая группа удовлетворяет условию $C'(1/6)$, то эта группа гиперболична [9]. Следовательно, существует геодезическая марковская грамматика, соответствующая G [4, 5].

В дальнейшем, если мы говорим, что марковская грамматика соответствует некоторой группе, мы подразумеваем, что грамматика геодезична, т. е. что элемент группы g представляется словом марковской грамматики длины $l(g)$. Аналогично случаю группы можно определить функцию роста и экспоненциальный показатель роста для любого языка над конечным алфавитом, в частности для языка, порожденного марковской грамматикой.

Рассмотрим марковскую грамматику с состояниями $1, \dots, N$. Матрица инцидентности M этой грамматики — это такая матрица, что $M(i, j)$ — число ориентированных путей из состояния i в состояние j . Используя теорию Перрона–Фробениуса [1], можно проверить, что в этом случае показатель роста языка, порожденного рассматриваемой грамматикой, равен $v(M)$.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим марковскую грамматику с s состояниями и k метками. Пусть v — показатель роста соответствующего языка. Предположим, что $s \leq N$, и фиксируем p слов длины $4N$. Будем называть эти слова запрещенными. Рассмотрим новый язык, состоящий из тех слов старого языка, которые не содержат запрещенных слов в качестве подслов. Пусть v_{new} — показатель роста нового языка. Тогда*

$$v_{\text{new}}^N \geq (v^N/s^2 - 4Np)/k^s.$$

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$G = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_{n+1} = 1 \rangle, \quad H = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1 \rangle.$$

Предположим, что эти задания удовлетворяют условию $C'(1/6)$ и что $|w_i| > 6$ для любого i . Мы называем слово w $(1/12)$ -приведенным относительно w_{n+1} , если оно не содержит подслов длины $\geq (1/12)|w_{n+1}|$ слова w_{n+1} и если оно свободно приведенное.

1. Если w является $(1/12)$ -приведенным относительно w_{n+1} и w — геодезическая в H , то w — геодезическая в G .

2. Пусть γ_1 и γ_2 являются $(1/12)$ -приведенными относительно w_{n+1} . Если γ_1 и γ_2 — геодезические в H и $\gamma_1 \neq \gamma_2$ в H , то $\gamma_1 \neq \gamma_2$ в G .

Предыдущие леммы имеют такие следствия:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$G = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_{n+1} = 1 \rangle, \quad H = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1 \rangle.$$

Предположим, что эти задания удовлетворяют условию $C'(1/6)$ и что существует марковская грамматика для H , состоящая из s состояний. Тогда существует $\gamma(s, k)$, такое, что если

$$|w_{n+1}| > \gamma(s, k),$$

то

$$v_S(G) \geq v_S(H) - 200/\sqrt{|w_{n+1}|}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$H = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_n = 1 \rangle, \quad H_k = \langle S \mid w_1 = w_2 = \dots = w_n = \tilde{w}_k = 1 \rangle.$$

Предположим, что эти задания удовлетворяют условию $C'(1/6)$ и что $|\tilde{w}_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $\lim v_S(H_k) = v_S(H)$

Это обобщает следствие из [8], где в качестве H рассматривалась свободная группа.

В [3] сформулирована гипотеза о том, что если G — факторгруппа неэлементарной гиперболической группы H по бесконечной нормальной подгруппе, то $v(G) < v(H)$. Следующее предложение имеет отношение к частному случаю этой гипотезы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$G = \langle S \mid w_1 = \dots = w_n = (a^N b^N)^{100} = 1 \rangle, \quad H = \langle S \mid w_1 = \dots = w_n = 1 \rangle.$$

Предположим, что $N > |w_i|$ для любого i .

Предположим также, что эти задания удовлетворяют условию $C'(1/50)$ и что ни одно из слов $a^{\pm 1}b^{\pm 1}a^{\pm 1}$ и $b^{\pm 1}a^{\pm 1}b^{\pm 1}$ (ни при каком выборе знаков) не является подсловом данных определяющих соотношений. Тогда $v_S(G) < v_S(H)$.

Я благодарна П. де ла Арпу и А. М. Вершику за полезные замечания по поводу этой статьи. Часть результатов этой статьи получена во время пребывания автора в университете Женевы. Автор выражает благодарность за поддержку Швейцарскому научному национальному фонду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Наука, М., 1988.
2. Grigorchuk R., de la Harpe P. Limit behavior of exponential growth rates for finitely generated groups. Preprint, University of Geneva, 1999.
3. Grigorchuk R., de la Harpe P. On problems related to growth, entropy, and spectrum in group theory. J. Dynam. Control Systems, **3**, No. 1, 51–89 (1997).
4. Gromov M. Hyperbolic groups, Essays in Group Theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 8, Springer, New York–Berlin, 1987.
5. Ghys E., de la Harpe P. Propriété de Markov. In: Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, E. Ghys and P. de la Harpe (eds.). Progr. Math., Vol. 83, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 165–187.
6. de la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory. The University of Chicago Press, 2000.
7. Линдон П., Шупп П. Комбинаторная теория групп. Мир, М., 1980.
8. Шухов А. Г. Матем. заметки, **65**, № 4, 612–618 (1999).
9. Strebel R. Small cancellation groups. In: Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, E. Ghys and P. de la Harpe (eds.). Progr. Math., Vol. 83, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 227–273.