Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 28–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 04:06:23

УДК 517.518.237, 512.643.5

Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой*

© 2002. Г. А. КАЛЯБИН

§1. Обозначения и формулировка основного результата

Пусть $W_2^m(I)$ — соболевское пространство всех функций $f(x)$, определенных на интервале $I := (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$, имеющих абсолютно непрерывную производную $f^{(m-1)}(x)$ и таких, что

$$\|f\|_{W_2^m(I)} := \left(\int_I (|f(x)|^2 + |f^{(m)}(x)|^2) dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (1)$$

В [1] построены операторы продолжения $T_m: W_2^m(\mathbb{R}_-^1) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}^1)$, нормы которых не превосходят 8^m . С другой стороны, в [2] было показано, что $W_2^m(\mathbb{R}_-^1)$ содержит такую функцию $f_m(x)$, что любая функция $g(x)$, определенная на всей прямой и совпадающая с $f_m(x)$ при всех $x < 0$, имеет в $W_2^m(\mathbb{R}^1)$ норму, большую, чем $0,08 m^{-1/4} 2^m \|f_m\|_{W_2^m(\mathbb{R}_-^1)}$. Нашей целью является устранение имеющегося разрыва между верхними и нижними оценками и установление приведенной ниже асимптотической формулы (точной в логарифмической шкале) для величины

$$\tau_m := \min \|T_m\|_{W_2^m(\mathbb{R}_-^1) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}^1)}. \quad (2)$$

Обозначим через $\mathbf{G}$ так называемую константу Каталана (см., например, [3, 865.03, 48.32]),

$$\mathbf{G} := \int_0^{\pi/4} \ln(\operatorname{ctg} x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0,91596559 \dots \quad (3)$$

ТЕОРЕМА. При $m \rightarrow \infty$ мы имеем $\ln \tau_m \approx K_0 m$, где

$$K_0 := \frac{4}{\pi} \mathbf{G} = 1,166243 \dots = \ln 3,209912 \dots \quad (4)$$

В ходе доказательства будет установлено, что оператор продолжения с наименьшей нормой в рассматриваемом случае является линейным и тесно связан с оператором наилучшей экстраполяции (т.е. продолжения из «одной точки»), задачу исследования которого поставил Л. Д. Кудрявцев. Будет также показано, что τ_m явно выражается через наибольшее и наименьшее собственные значения некоторой матрицы, связанной со специальными матрицами Вандермонда.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Буренкову и Л. Д. Кудрявцеву за постановку задачи и внимание к работе, а также С. И. Похожаеву и другим участникам Семинара по теории функций МИ РАН под руководством С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева и О. В. Бесова за ряд ценных замечаний.

*Работа была поддержана грантом РФФИ №99-01-00868.

§2. Предварительные рассмотрения

Рассмотрим квадратичный функционал

$$J_m[y] := \int_0^\infty (|y^{(m)}(x)|^2 + |y(x)|^2) dx = \|y(x)\|_{W_2^m(\mathbb{R}_+^1)}^2 \quad (5)$$

и для любого вектора $a := (a_1, \dots, a_m)$ введем обозначение для минимума квадрата W_2^m -нормы всевозможных экстраполяций с заданными начальными данными:

$$\psi_m(a) := \min\{J_m[y] : y^{(s-1)}(0) = a_s, s \in \{1, \dots, m\}\}. \quad (6)$$

Экстремалами функционала $J_m[y]$ служат решения уравнения Эйлера

$$(-1)^m y^{(2m)} + y = 0, \quad (7)$$

стремящиеся к 0 при $x \rightarrow +\infty$, которые, следовательно, могут быть представлены как линейные комбинации экспонент (совокупность всех таких линейных комбинаций мы будем обозначать через Y_m):

$$y(x) = \sum_{k=1}^m b_k e^{\mu_k x}, \quad (8)$$

где $\mu_k = \mu_{k,m} := e^{i\pi(2k+m-1)/(2m)}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, суть корни степени $2m$ из $(-1)^{m+1}$, лежащие в левой полуплоскости. Отметим, что для указанных корней справедливы тождества $\mu_k^m = i^{m-1}(-1)^k$, $\mu_k^{-1} = \bar{\mu}_k = \mu_{m+1-k}$, существенно используемые в дальнейшем.

Для произвольной функции $f \in W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$ обозначим через $y := y(f; x)$ функцию из $W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$, имеющую те же самые начальные значения, что и f , и дающую минимум функционала $J_m[y]$. Тогда продолжение функции f на положительную полуось посредством $y(f; x)$ и будет (в силу определений) искомым оператором продолжения с наименьшей возможной нормой. Поскольку отображение функции $f \in W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$ в множество ее предельных значений $A_m := \{\{a_s\}\} = \{\{f^{(s-1)}(0-)\}\}$ и отображение пространства A_m в множество соответствующих экстремалей Y_m линейны (так как линейно уравнение Эйлера (7)), описанный оператор наилучшего продолжения также линеен.

Для функций (8) значение $J_m[y]$ может быть записано в виде квадратичной формы от коэффициентов b_j :

$$\begin{aligned} J_m[y] &= \int_0^\infty \left(\left(\sum_{j=1}^m b_j e^{\mu_j x} \right) \left(\sum_{k=1}^m \overline{b_k e^{\mu_k x}} \right) + \left(\sum_{j=1}^m b_j \mu_j^m e^{\mu_j x} \right) \left(\sum_{k=1}^m \overline{\mu_k^m b_k e^{\mu_k x}} \right) \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m q_{j,k}^{(m)} b_j \bar{b}_k, \quad q_{j,k}^{(m)} := -\frac{1 + \mu_j^m \bar{\mu}_k^m}{\mu_j + \bar{\mu}_k} = -\frac{1 + (-1)^{j+k}}{\mu_j + \bar{\mu}_k}, \quad j, k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражение $J_m[y]$ может быть переписано и в терминах начальных значений $y^{(s-1)}(0) = a_s$, поскольку коэффициенты b_j однозначно определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^m \mu_k^{j-1} b_k = a_j, \quad j \in \{1, \dots, m\}, \quad (10)$$

матрицей которой является классическая матрица Вандермонда

$$V_m = \|v_{j,k}^{(m)}\| := \|\mu_k^{j-1}\| \quad (11)$$

(невыврожденная, поскольку все числа μ_k попарно различны), и если обозначить через $\Phi_m = \|\varphi_{j,k}^{(m)}\|$, $j, k \in \{1, \dots, m\}$, матрицу, обратную к V_m (явные формулы для ее элементов приведены, например в [4]), то в векторной записи мы имеем $V_m b = a$ или $b = \Phi_m a$. Следовательно,

$$\psi_m(a) = (Q_m b, b) = (Q_m \Phi_m a, \Phi_m a) = (G_m a, a), \quad G_m := \Phi_m^* Q_m \Phi_m, \quad (12)$$

где Q_m есть матрица с элементами $q_{j,k}^{(m)}$, определенными в (9), а скобки обозначают обычное скалярное произведение в m -мерном унитарном пространстве комплекснозначных векторов.

С другой стороны, для любых двух функций $f(x)$, $g(x)$ из $C^{2m}[0, +\infty)$, которые стремятся к 0 при $x \rightarrow +\infty$ вместе со своими производными до порядка $2m-1$, с помощью интегрирования по частям легко проверяется следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx &= -f^{(m)}(0) g^{(m-1)}(0) + f^{(m+1)}(0) g^{(m-2)}(0) - \dots \\ &+ (-1)^m f^{(2m-1)}(0) g(0) + (-1)^m \int_0^\infty f^{(2m)}(x) g(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Выбирая здесь в качестве $f(x)$ любую функцию $y(x)$ вида (8), а в качестве $g(x)$ комплексно-сопряженную к ней и учитывая, что в силу уравнения (7) последнее слагаемое, взятое со знаком минус, будет равно интегралу от $|y(x)|^2$ по промежутку $[0, +\infty]$, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} J_m[y] &= \sum_{j=1}^m (-1)^j y^{(m+j-1)}(0) \overline{y^{(m-j)}(0)} \\ &= i^{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m b_k (-1)^k \mu_k^{j-1} \right) (-1)^j \overline{y^{(m-j)}(0)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь пусть задан вектор начальных условий $a = (a_1, \dots, a_m)$; тогда вектор коэффициентов $b = (b_1, \dots, b_m)$ получается, как уже отмечалось, умножением a слева на матрицу Φ_m , $b = \Phi_m a$, а переход от b к вектору $\tilde{b} := (-b_1, b_2, \dots, (-1)^m b_m)$ осуществляется умножением слева на матрицу P_m , у которой на главной диагонали стоят знакопередающиеся $(-1)^k$, а остальные элементы нулевые: $\tilde{b} = P_m b$. Переход же от $\tilde{b}$ к вектору с координатами, равными суммам по k в последнем выражении в формуле (14), соответствует умножению на матрицу V_m . Наконец, вектор с координатами $y^{(m-j)}(0)$ получается умножением a слева на матрицу S_m с единицами на побочной диагонали и нулями на всех остальных местах. Таким образом, мы получили другую формулу для квадратичной формы $\psi_m(a)$ и ее матрицы G_m (см. (5), (6), (14)):

$$\begin{aligned} \psi_m(a) &= J_m[y] = (i^{m-1} V_m P_m \Phi_m a, P_m S_m a) = (G_m a, a), \\ G_m &= i^{m-1} S_m P_m V_m P_m \Phi_m. \end{aligned} \quad (15)$$

§3. Свойства симметрии матриц G_m

ЛЕММА 1. Матрица G_m вещественна и симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, во-первых, что матрица G_m по определению (см. (12)) эрмитова и положительно определенная. Докажем, что она вещественна. В самом деле, множество тех решений уравнения (7), которые стремятся к 0 при $x \rightarrow +\infty$, в точности совпадает с множеством *всех* решений дифференциального уравнения $(D - \mu_1) \cdots (D - \mu_m)y(x) = 0$ порядка m , где $D := d/dx$. Для четного и нечетного m оно принимает (соответственно) форму

$$\prod_{k=1}^{m/2} (D^2 - 2\operatorname{Re} \mu_k D + 1)y = 0, \quad (D+1) \prod_{k=1}^{(m-1)/2} (D^2 - 2\operatorname{Re} \mu_k D + 1)y = 0, \quad (16)$$

т. е. $D^m y + B_1 D^{m-1} y + B_2 D^{m-2} y + \cdots + B_{m-1} D y + y = 0$, где все коэффициенты вещественны (даже положительны). Поэтому если все числа $y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$ вещественны, то функция $y(x)$ будет вещественной при всех $x > 0$, а следовательно, $y^{(m)}(0), y^{(m+1)}(0), \dots, y^{(2m-1)}(0)$ также вещественны, что в силу первого равенства в (14) означает вещественность всех элементов матрицы G_m , а отсюда вытекает и ее симметричность.

Доказательство леммы 1 закончено.

ЛЕММА 2. Матрица G_m симметрична и относительно побочной диагонали, т. е. $G_m = S_m G_m S_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем исходить из равенства (см. (15)) $G = i^{m-1} S P V P \Phi$, где для краткости индекс m у рассматриваемых матриц опущен. Введем диагональную матрицу $H := \operatorname{diag}(\mu_k^{m-1})$. Напомним, что умножение некоторой квадратной матрицы на матрицу S *слева* (*справа*) равносильно ее отражению относительно срединной *горизонтали* (*вертикали*), а умножение *слева* (*справа*) на диагональную матрицу означает умножение каждой *строки* (*столбца*) на соответствующие диагональные элементы; поэтому для матриц $V S$ и $S V$ имеют место соотношения (см. (11) и определение μ_k после формулы (8))

$$V S = \|\mu_{m+1-k}^{j-1}\| = \|\mu_k^{1-j}\|, \quad S V = \|\mu_k^{m-j}\| = V S H \iff \Phi S = H^{-1} S \Phi. \quad (17)$$

Далее, имеем цепочку тождеств

$$\begin{aligned} S G S &= (-i)^{m-1} S P (S V) P (\Phi S) = (-i)^{m-1} S P (V S H) P (H^{-1} S \Phi) \\ &= (-i)^{m-1} S P V (S P S) \Phi = i^{m-1} S P V P \Phi = G, \end{aligned}$$

где мы учли перестановочность диагональных матриц H и P , а также приняли во внимание простые матричные тождества $S P = (-1)^{m-1} P S$, $S S = P P = E := \operatorname{id}_m$.

Доказательство леммы 2 закончено.

Наиболее неожиданным и весьма существенным является, однако, следующее свойство, в котором содержится, в частности, утверждение о подобии матрицы G_m своей обратной.

ЛЕММА 3. $G_m^{-1} = P_m G_m P_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из формулы (15), леммы 2 и тождеств, использовавшихся в ее доказательстве, вытекает требуемая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G^{-1} &= (-i)^{m-1}(SPVP\Phi)^{-1} = (-i)^{m-1}VP\Phi PS \\ &= i^{m-1}PS(SPVP\Phi)SP = P(SGS)P = PGP. \end{aligned}$$

Следующие утверждения непосредственно вытекают из определений и доказанной леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Спектры матриц G_m и G_m^{-1} совпадают. В частности, наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы G_m удовлетворяют равенству $\lambda_{\min}(G_m) = \lambda_{\max}^{-1}(G_m)$, причем если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ — собственный вектор, отвечающий $\lambda_{\max}(G_m)$, то вектор $P_m\xi = (-\xi_1, \xi_2, \dots, (-1)^m\xi_m)$ также будет собственным и отвечающим $\lambda_{\max}^{-1}(G_m)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Максимум Ω_m и минимум ω_m квадратичной формы $\psi_m(a)$ на единичной сфере $\sum |a_s|^2 = 1$ связаны соотношением $\Omega_m = \omega_m^{-1} = \lambda_{\max}(G_m)$.

Далее, с помощью четного продолжения с левой на правую полуось и с учетом определений величины $\psi_m(a)$ (см. (5), (6)) и матриц P_m убеждаемся, что справедливо тождество

$$\min\{\|y(x)\|_{W_2^m(\mathbb{R}_-)}^2 : y^{(s-1)}(0) = a_s, s \in \{1, \dots, m\}\} = \psi_m(-P_m a), \quad (18),$$

из которого с учетом следствия 1, в свою очередь, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Норма оператора наилучшего продолжения $T_m : W_2^m(\mathbb{R}_-^1) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}_-^1)$ выражается формулой

$$\tau_m = \sqrt{1 + \frac{\Omega_m}{\omega_m}} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}^2(G_m)}. \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что величина $\Omega_m^{1/2}$ есть наименьшая возможная норма операторов экстраполяции $A_m^{(2)} \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$, где $A_m^{(2)}$ — пространство векторов начальных значений $(f(0), f'(0), \dots, f^{(m-1)}(0))$ с евклидовой нормой. В. Н. Габушиным [5] (см. также [6, 2.4.5]) получены явные (однако не эффективные) формулы для наибольших возможных значений в нуле промежуточных производных, т. е. чисел

$$\Gamma_{s,m}^+ := \max\{|y^{(s)}(0)| : \|y\|_{W_2^m(\mathbb{R}_+^1)} = 1\}, \quad s \in \{0, 1, \dots, m-1\}. \quad (20)$$

Эти константы, как можно показать с учетом леммы 3, выражаются через диагональные элементы матрицы G_m , а именно $\Gamma_{s,m}^+ = (g_{s+1,s+1}^{(m)})^{1/2}$. Л. В. Тайков доказал (см. [7] и [6, 2.4.4]), что числа, отличающиеся от (20) взятием нормы не в $W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$, а в $W_2^m(\mathbb{R}^1)$, выражаются простыми конструктивными формулами: $\Gamma_{s,m} = (2m \sin((2s+1)\pi/(2m)))^{-1/2}$.

§4. Верхние оценки для матриц Φ_m

ЛЕММА 4. Имеют место равенства $\ln \max |\varphi_{j,k}^{(m)}| = (K_0 + \varepsilon_m)t$, где K_0 — константа, определенная в (4), а $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матричное равенство $\Phi V = E$ (индекс m опускается) покомпонентно записывается так (см. (11)):

$$\sum_{s=1}^m \varphi_{j,s} \mu_k^{s-1} = \delta_{j,k}, \quad \text{где } \delta_{j,k} := 0 \ (j \neq k), \ \delta_{k,k} := 1, \quad (21)$$

а отсюда следует, что элементы каждой строки $\{\varphi_{j,s}\}$ матрицы Φ суть коэффициенты алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа степени $m-1$

$$L_{m-1,j}(z) := \sum_{s=1}^m \varphi_{j,s} z^{s-1}, \quad \text{таких, что } L_{m-1,j}(\mu_k) = 0, \ k \neq j, \ L_{m-1,j}(\mu_j) = 1, \quad (22)$$

и, значит, эти многочлены могут быть записаны в виде

$$L_{m-1,j}(z) = \prod_{k \neq j} \frac{z - \mu_k}{\mu_j - \mu_k} = \left(\prod_{k \neq j} \frac{1}{\mu_j - \mu_k} \right) \prod_{k \neq j} (z - \mu_k). \quad (23)$$

Модуль первого сомножителя, зависящего только от m, j и не зависящего от z , как явствует из геометрических соображений, при фиксированном m достигает наибольшего значения, когда μ_j максимально приближается к точке -1 . Следовательно, при нечетном $m, m = 2r + 1$, поскольку $\mu_{r+1} = -1$, для любого $j \in \{1, \dots, m\}$ справедлива оценка

$$A_{m,j} := \prod_{k \neq j} \left| \frac{1}{\mu_j - \mu_k} \right| \leq A_{2r+1,r+1} = \prod_{s=1}^r \frac{1}{|\mu_s + 1|^2} = \prod_{s=1}^r \left(2 \sin \frac{\pi s}{2m} \right)^{-2}. \quad (24)$$

Аналогично, для четного $m = 2r$ имеем при всех $j \in \{1, \dots, m\}$

$$A_{m,j} \leq A_{2r,r} = A_{2r,r+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{s=1}^{r-1} \left(2 \sin \frac{\pi s}{2m} \right)^{-2}. \quad (25)$$

Таким образом, при всех m получено соотношение

$$A_m := \max_j A_{m,j} = A_{m,[m/2]+1} \leq \prod_{s=1}^{[m/2]} \left(2 \sin \frac{\pi s}{2m} \right)^{-2}. \quad (26)$$

Для случая $m = 2r + 1, k = r + 1$, группируя во втором сомножителе в (23) пары скобок, соответствующие комплексно-сопряженным корням, получаем

$$\prod_{k \neq r+1} (z - \mu_k) = \prod_{s=1}^r (z^2 - (2 \operatorname{Re} \mu_s)z + 1) =: \tilde{L}_{2r,r+1}(z) = \sum_{s=0}^{2r} \tilde{\varphi}_{r,s} z^s. \quad (27)$$

Все коэффициенты данного многочлена положительны; значит, их сумма равна значению многочлена при $z = 1$, т. е.

$$B_{2r+1,r+1} := \sum_{s=0}^{2r} |\tilde{\varphi}_{r,s}| = \sum_{s=0}^{2r} \tilde{\varphi}_{r,s} = \tilde{L}_{2r,r+1}(1) = \prod_{k \neq r+1} (1 - \mu_k) = \prod_{s=1}^r \left(2 \cos \frac{\pi s}{2m} \right)^2. \quad (28)$$

Здесь мы снова использовали геометрические соображения, связанные с расположением корней, и приняли во внимание тот факт, что при μ , лежащем на единичной окружности, векторы $1 - \mu$ и $1 + \mu$ ортогональны.

Далее, если m нечетно, $m = 2r + 1$, но $j < r + 1$, то

$$\tilde{L}_{2r,j}(z) = (z + 1) \prod_{s=1}^r {}^{j'} (z^2 - 2(\operatorname{Re} \mu_s)z + 1), \quad (29)$$

где верхний индекс j' означает, что сомножитель с $s = j$ отброшен, и, следовательно,

$$B_{2r+1,j} = B_{2r+1,2r+1-j} \leq 2 \prod_{s=1}^r {}^{j'} \left(2 \cos \frac{\pi s}{2m} \right)^2 \leq B_{2r+1,r+1}, \quad (30)$$

так как $(2 \cos(\pi j/(2m)))^2 > 2$, поскольку $\pi j/(2m) < \pi/4$.

Для четного m , $m = 2r$, и $j \leq r$ аналогично получаем

$$B_{2r,j} = B_{2r,2r-1-j} \leq 2 \prod_{s=1}^r {}^{j'} \left(2 \cos \frac{\pi(2s-1)}{4m} \right)^2 \leq 4 \prod_{s=1}^r \left(2 \cos \frac{\pi s}{2m} \right)^2. \quad (31)$$

Соединяя (31), (30) и (26), получаем при всех m неравенство

$$B_m := \max_j B_{m,j} \leq 4 \prod_{s=1}^{[m/2]} \left(2 \cos \frac{\pi s}{2m} \right)^2, \quad (32)$$

что вместе с (23) и (26) дает оценку для суммы модулей элементов любой строки матрицы Φ_m :

$$\sum_{k=1}^m |\varphi_{j,k}^{(m)}| \leq A_m B_m \leq 4 \prod_{s=1}^{[m/2]} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2m} \right)^2. \quad (33)$$

Переходя в (33) к логарифмам, получаем для всех m, j неравенство

$$\ln \max_{j,k} |\varphi_{j,k}^{(m)}| \leq \ln 4 + 2 \sum_{s=1}^{[m/2]} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2m} \right). \quad (34)$$

Далее, учитывая монотонное убывание функции $\ln(\operatorname{ctg} x)$ на интервале $(0, \pi/4)$, запишем неравенства между интегральной суммой Римана и интегралами

$$\int_{\pi/(2m)}^{\pi/4} \ln(\operatorname{ctg} x) dx \leq \frac{\pi}{2m} \sum_{s=1}^{[m/2]} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2m} \right) \leq \int_0^{\pi/4} \ln(\operatorname{ctg} x) dx, \quad (35)$$

и, поскольку интеграл в левой части стремится к интегралу справа, мы получаем соотношение

$$\sum_{s=1}^{[m/2]} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2m} \right) = \left(\frac{2m}{\pi} + o(m) \right) \int_0^{\pi/4} \ln(\operatorname{ctg} x) dx. \quad (36)$$

Наконец, из (25) и (30) следует нижняя оценка

$$\ln \max_{j,k} |\varphi_{j,k}^{(m)}| \geq \ln \left| \sum_{k=1}^m \varphi_{[m/2]+1,k}^{(m)} \right| - \ln m \geq 2 \sum_{s=1}^{[m/2]} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2m} + o(m), \quad (37)$$

из которой в соединении с (32), (36) и определением (4) числа K_0 вытекает утверждение леммы 4.

§5. Оценки наименьшего собственного значения матрицы Q_m

Следующее утверждение, относящееся к матрицам, определенным формулой (9), представляет также самостоятельный интерес.

ЛЕММА 5. $\ln \lambda_{\min}(Q_m) \approx -K_0 m$, $m \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m_o и m_e — число нечетных и соответственно четных натуральных чисел, не превосходящих m , т. е. $m_o := [(m+1)/2]$, $m_e := [m/2]$, так что $m_o + m_e = m$. Учитывая, что $q_{j,k}^{(m)} = 0$, если j и k — числа разной четности, мы заключаем, что в базисе $(e_1, e_3, \dots, e_{2m_o-1}; e_2, e_4, \dots, e_{2m_e})$ получаем перестановкой стандартного базиса $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$, матрица Q_m становится блочно-диагональной,

$$Q_m = \begin{pmatrix} Q^{(o)} & 0 \\ 0 & Q^{(e)} \end{pmatrix}, \quad q_{j,k}^{(o)} := \frac{-2}{\mu_{2j-1} + \bar{\mu}_{2k-1}}, \quad q_{j,k}^{(e)} := \frac{-2}{\mu_{2j} + \bar{\mu}_{2k}}, \quad (38)$$

где диагональные блоки $Q^{(o)}$ и $Q^{(e)}$ имеют размеры m_o и m_e соответственно.

Утверждение леммы 5 равносильно следующим соотношениям для наибольших собственных значений матриц $U_{m_o}^{(o)}$, $U_{m_e}^{(e)}$ (порядка m_o , m_e), обратных к $Q^{(o)}$ и $Q^{(e)}$ соответственно:

$$\ln \lambda_{\max}(U_{m_o}^{(o)}) \approx K_0 m, \quad \ln \lambda_{\max}(U_{m_e}^{(e)}) \approx K_0 m, \quad m \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Из формул для определителей Коши [8, §14] (см. также [9, п. 2], где следует положить $x_r = \bar{y}_r = \mu_r$) получаем явные выражения для диагональных элементов матриц $U_{m_o}^{(o)}$, $U_{m_e}^{(e)}$:

$$u_{k,k}^{(o)} = \frac{|\mu_{2k-1} + \bar{\mu}_{2k-1}|}{2} \prod_{j \neq k} \left| \frac{\mu_{2j-1} + \bar{\mu}_{2k-1}}{\mu_{2j-1} - \bar{\mu}_{2k-1}} \right|^2, \quad (40)$$

$$u_{k,k}^{(e)} = \frac{|\mu_{2k} + \bar{\mu}_{2k}|}{2} \prod_{j \neq k} \left| \frac{\mu_{2j} + \bar{\mu}_{2k}}{\mu_{2j} - \bar{\mu}_{2k}} \right|^2.$$

Произведения по j в (40) оцениваются точно так же, как произведения в доказательстве леммы 4 (см. вывод оценок (26), (32), (33)). Вводя обозначения $k_o := [m_o/2] + 1$, $k_e := [m_e/2] + 1$, для произведений по нечетным индексам получим

$$w_k := \prod_{j \neq k} \left| \frac{\mu_{2j-1} + \bar{\mu}_{2k-1}}{\mu_{2j-1} - \bar{\mu}_{2k-1}} \right| \leq \prod_{j \neq k} \left| \frac{\mu_{2j-1} - 1}{\mu_{2j-1} + 1} \right| \leq \prod_{s=1}^{k_o} \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{m} \right)^2 =: p^{(o)}, \quad (41)$$

причем при выборе $k = k_o$ будет выполняться неравенство $w_k \geq p^{(o)}/4$.

Аналогично для произведений по четным индексам имеем

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{\mu_{2j} + \bar{\mu}_{2k}}{\mu_{2j} - \bar{\mu}_{2k}} \right| \leq \prod_{s=1}^{k_e} \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{m} \right)^2 \leq 4 \prod_{j \neq k_e} \left| \frac{\mu_{2j} + \bar{\mu}_{2k_e}}{\mu_{2j} - \bar{\mu}_{2k_e}} \right|. \quad (42)$$

Учитывая еще, что $\max |\mu_k + \bar{\mu}_k| \leq 2$, тогда как оба числа $|\mu_{2k_o-1} + \bar{\mu}_{2k_o-1}|$ и $|\mu_{2k_e} + \bar{\mu}_{2k_e}|$ близки к 2 при всех достаточно больших m , мы заключаем, что максимум диагональных элементов матриц $U_{m_o}^{(o)}$, $U_{m_e}^{(e)}$ равен по порядку

$$\max_k u_{k,k}^{(o)} \asymp \max_k u_{k,k}^{(e)} \asymp u_{[m/4],[m/4]}^{(o)} \asymp u_{[m/4],[m/4]}^{(e)} \asymp \prod_{s=1}^{[m/4]} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{m} \right)^4. \quad (43)$$

Из рассуждений предыдущего параграфа (см. цепочку (35)–(37)) следует, что

$$\ln \max_k u_{k,k}^{(o)} \approx \max_k u_{k,k}^{(e)} \approx 4 \sum_{s=1}^{[m/4]} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi s}{m} \right) \approx \frac{4}{\pi} \mathbf{G}m = K_0 m, \quad m \rightarrow \infty, \quad (44)$$

а поскольку для любой положительно определенной матрицы U_n порядка n выполняются неравенства $\ln \max u_{k,k} \leq \ln \lambda_{\max}(U_n) \leq \ln \sum u_{k,k} \leq \ln n + \ln \max u_{k,k}$, из (44) вытекает (39).

Доказательство леммы 5 закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что, согласно (9), имеет место тождество $Q_m = \tilde{Q}_m + \hat{Q}_m$, где $\tilde{Q}_m$ — матрица с элементами $\tilde{q}_{j,k} := -2(\mu_j + \bar{\mu}_k)^{-1}$, а $\hat{Q}_m := P_m \tilde{Q}_m P_m$. Из рассуждений, примененных в доказательстве леммы 5, следует, что

$$\ln \lambda_{\min}(\tilde{Q}_m) = \ln \lambda_{\min}(\hat{Q}_m) \approx -2K_0 m,$$

тогда как логарифм наименьшего собственного значения их суммы, согласно лемме 5, убывает в два раза медленнее: $\ln \lambda_{\min}(Q_m) \approx -K_0 m$.

§ 6. Завершение доказательства теоремы

Из определения матрицы G_m (см. формулу (15)) вытекает верхняя оценка

$$(G_m a, a) = (i^{m-1} V_m P_m \Phi_m a, P_m S_m a) \leq m^2 \left(\max_{j,k} |\varphi_{j,k}^{(m)}| \right) |a|^2, \quad (45)$$

откуда с учетом определения (19), леммы 4 (см. (36)) и формулы (4) следует неравенство

$$\ln \tau_m \leq \ln \lambda_{\max}(G_m) + o(1) \leq \ln \max_{j,k} |\varphi_{j,k}^{(m)}| + 2 \ln m + O(1) \leq K_0 m + o(m), \quad (46)$$

и нам теперь остается лишь убедиться в том, что справедливо и обратное к (46) неравенство.

Из формулы (12), определяющей матрицу G_m , следует цепочка неравенств

$$(G_m a, a) = (\Phi_m^* Q_m \Phi_m a, a) = (Q_m \Phi_m a, \Phi_m a) \geq \lambda_{\min}(Q_m) (\Phi_m a, \Phi_m a). \quad (47)$$

Выберем здесь в качестве a единичный вектор $\tilde{a}$, $\|\tilde{a}\| = 1$, с равными координатами $\tilde{a}_j = 1/\sqrt{m}$, для которого в силу леммы 4 (см. (37)) выполняется неравенство

$$\|\Phi_m \tilde{a}\| \geq m^{-1/2} \left| \sum_{k=1}^m \varphi_{[m/2]+1,k} \right| \geq e^{(K_0 - \varepsilon_m)m}. \quad (48)$$

Тогда из последних двух соотношений и леммы 5 получаем

$$\ln \lambda_{\max}(G_m) \geq \ln(G_m \tilde{a}, \tilde{a}) \geq \ln \lambda_{\min}(Q_m) + 2 \ln \|\Phi_m \tilde{a}\| \geq (K_0 - \varepsilon_m)m + o(m) \quad (49)$$

и этим доказательство теоремы завершается.

В заключение отметим, что векторы $\tilde{a}$ начальных данных с *равными координатами* обеспечивают рост логарифма нормы экстраполяции в $W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$, асимптотически равный $K_0 m/2$. Однако (при нечетном m) экстраполяция этих начальных условий на *отрицательную* полуось имеет норму в $W_2^m(\mathbb{R}_-^1)$, в точности равную 1. Поэтому остается неясным, какие наборы начальных условий дают разность логарифмов норм экстраполяций в $W_2^m(\mathbb{R}_+^1)$ и $W_2^m(\mathbb{R}_-^1)$, эквивалентную $K_0 m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренков В. И., Горбунов А. Л. Точные оценки наименьших норм операторов продолжения для соболевских пространств. Изв. РАН, сер. матем., **61**, №1, 3–44 (1997).
2. Burenkov V. I., Kalyabin G. A. Lower estimates of the norm of extension operators for Sobolev spaces on the halfline. Math. Nachr., **218**, 19–23 (2000).
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Наука, М., 1978.
4. Klinger A. The Vandermonde matrix. Amer. Math. Monthly, **74**, 571–574 (1967).
5. Габушин В. Н. Точные константы в неравенствах между производными функции. Матем. заметки, **4**, вып. 2, 221–232 (1968).
6. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Изд-во МГУ, М., 1976.
7. Тайков Л. В. Неравенства колмогоровского типа и наилучшие формулы численного дифференцирования. Матем. заметки, **4**, №2, 233–238 (1968).
8. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Наука, М., 1965.
9. Калябин Г. А. Асимптотика наименьших собственных значений матриц типа Гильберта. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 1, 80–84 (2001).

Самарская гуманитарная академия,
Самарский государственный аэрокосмический университет
e-mail: klgnaa@mail.ru, kalyabin@mb.ssau.ru, kalyabin@lycos.com

Поступило в редакцию
19 октября 2001 г.