Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Левин, Условия оптимальности для гладких решений Монжа задачи Монжа–Канторовича, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 38–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 05:48:38

УДК 517.9

Условия оптимальности для гладких решений Монжа задачи Монжа–Канторовича*

© 2002. В. Л. ЛЕВИН

§1. Введение

Пусть (X, σ_1) , (Y, σ_2) — польские пространства с конечными положительными борелевскими мерами, $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$ и c — ограниченная непрерывная вещественная функция на $X \times Y$. Далее $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ обозначает множество положительных борелевских мер μ на $X \times Y$, обладающих маргинальными мерами $\pi_1 \mu = \sigma_1$, $\pi_2 \mu = \sigma_2$. Здесь π_1, π_2 — естественные отображения проектирования пространства $X \times Y$ на X, Y ,

$$\begin{aligned}(\pi_1 \mu) B_X &:= \mu \pi_1^{-1}(B_X) = \mu(B_X \times Y), \\ (\pi_2 \mu) B_Y &:= \mu \pi_2^{-1}(B_Y) = \mu(X \times B_Y)\end{aligned}$$

для любых борелевских множеств $B_X \subset X$, $B_Y \subset Y$. Основной интерес представляет для нас случай, когда X, Y — замкнутые области (т.е. замыкания связных открытых множеств) в евклидовых пространствах.

Задача Монжа–Канторовича (ЗМК) с фиксированными маргинальными мерами σ_1, σ_2 и функцией стоимости c состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf\{c(\mu) : \mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)\}, \quad (1)$$

где

$$c(\mu) := \int_{X \times Y} c(x, y) \mu(dx, dy).$$

ЗМК (1) является релаксацией задачи Монжа (ЗМ), которая состоит в нахождении оптимального значения

$$\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) := \inf\{\mathcal{F}(f) : f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)\}, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{F}(f) := \int_X c(x, f(x)) \sigma_1(dx)$$

и $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ — множество сохраняющих меру борелевских отображений $f: X \rightarrow Y$. Отображение f называется *сохраняющим меру*, если $f(\sigma_1) = \sigma_2$, т.е. $\sigma_2 B_Y = \sigma_1 f^{-1}(B_Y)$ для любого борелевского множества $B_Y \subset Y$. Каждому $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ отвечает мера $\mu_f = (\text{id}_X \times f)(\sigma_1)$,

$$\mu_f B = \sigma_1(\text{id}_X \times f)^{-1}(B) = \sigma_1\{x : (x, f(x)) \in B\}$$

---

*Работа выполнена при частичной поддержке международного фонда ИНТАС (проект 97-1050), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00247) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 01-02-00481).

для любого борелевского множества $B \subset X \times Y$. Очевидно, что $\mu_f \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ и $c(\mu_f) = \mathcal{F}(f)$; следовательно,

$$\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) \leq \mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2). \quad (3)$$

Далее меры $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ называются (допустимыми) *решениями*, а меры вида μ_f — *решениями Монжа* ЗМК (1). Если существует оптимальное решение ЗМК, являющееся решением Монжа μ_f , то f — оптимальное решение ЗМ и (3) выполняется со знаком равенства. В общем случае неравенство (3) является строгим. Приведем два примера. В первом примере $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ вообще пусто, а во втором существует оптимальное решение f ЗМ, но при этом μ_f не является оптимальным решением ЗМК.

ПРИМЕР 1. Возьмем $\sigma_1 = \delta_{x_1}$, $\sigma_2 = (\delta_{y_1} + \delta_{y_2})/2$, $y_1 \neq y_2$, где δ_z — единичная масса в точке z . Очевидно, что $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ пусто; следовательно, $\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) = +\infty$. В то же время $\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) = (c(x_1, y_1) + c(x_1, y_2))/2 < +\infty$.

ПРИМЕР 2. $X = Y = [0, 1]$, $c(x, y) = \text{dist}((x, y), M)$, $\sigma_1 = \delta_0/2 + \lambda$, $\sigma_2 = \delta_1/2 + \lambda$, где λ — мера Лебега на $[1/4, 3/4]$,

$$M = (\{0\} \times [1/4, 3/4]) \cup ([1/4, 3/4] \times \{1\}) \cup \{(x, x) : 1/4 \leq x \leq 3/4\}.$$

Имеем $f(0) = 1$ для любого $f \in \Phi(\sigma_1, \sigma_2)$; следовательно, $\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) \geq c(0, 1)/2 = 1/8$. Тогда в силу неотрицательности c отображение f , $f(0) = 1$, $f(x) = x$ для любого x , $x \neq 0$, является оптимальным решением ЗМ и $\mathcal{V}(c; \sigma_1, \sigma_2) = 1/8$. В то же время $c(\mu) = 0$ для $\mu = (\delta_0 \otimes \lambda + \lambda \otimes \delta_1)/2$; следовательно, μ — оптимальное решение ЗМК и $\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2) = 0$.

Для $X \subset \mathbb{R}^n$ и меры σ_1 , абсолютно непрерывной относительно n -мерной меры Лебега, известно несколько случаев существования оптимального решения ЗМК, являющегося решением Монжа [1–5] (см. также книгу [6], где имеются дальнейшие ссылки). В большинстве публикаций рассматривались функции стоимости $c(x, y) = h(x - y)$, функции стоимости общего вида исследованы в [4, 5].

В настоящей работе фиксируются произвольные меры σ_1, σ_2 , $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$, где X, Y — замкнутые области в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, и изучается следующий вопрос. Задано гладкое сохраняющее меру отображение $f: X \rightarrow Y$. При каких условиях на отображение f и функцию стоимости c решение Монжа μ_f является оптимальным решением ЗМК? Нами получены необходимые (теорема 1) и достаточные (теорема 2) условия. Для $m = n$, выпуклой замкнутой области X , являющейся носителем меры σ_1 , и функции стоимости $c(x, y) = \sum_1^n x_j b_j(y)$ необходимые условия совпадают с достаточными, а при $c(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$ оптимальность μ_f равносильна существованию гладкой вогнутой функции $u(x)$, для которой $f(x) = \nabla u(x)$. Доказательства главных теорем опираются на критерий оптимальности решения общей ЗМК в терминах непустоты множеств

$$Q_0(\zeta) := \{u \in \mathbb{R}^X : u(x) - u(z) \leq \zeta(x, z) \text{ для любых } x, z \in X\}$$

для специальных функций ζ на $X \times X$, порождаемых c и f (теорема 3). Кроме того, существенно используются более ранние (1990 г.) результаты автора [7, 8] об условиях (как необходимых, так и достаточных) указанной непустоты для гладких ζ . (Дальнейшие сведения о множествах $Q_0(\zeta)$, условиях их непустоты и связанных с ними вариантах ЗМК с фиксированной разностью маргинальных мер см. в [5, 9–11].)

§ 2. Главные результаты

В этом параграфе X, Y — замкнутые области в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, c — гладкая (класса C^2) вещественная функция на $X \times Y$ и $f: X \rightarrow Y$ — гладкое (класса C^1) отображение, сохраняющее меру.

Определим на $X \times X$ функции

$$\begin{aligned}\varphi(x, z) &:= c(z, f(x)) - c(x, f(x)), \\ \psi(x, z) &:= \varphi(z, x) = c(x, f(z)) - c(z, f(z))\end{aligned}$$

и рассмотрим для каждого $(x, z) \in X \times X$ ($n \times n$)-матрицы

$$\beta_{ij}^\zeta(x, z) := \frac{\partial^2 \zeta(z, z)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \zeta(z, z)}{\partial x_i \partial z_j} + \frac{\partial^2 \zeta(x, z)}{\partial z_i \partial z_j}, \quad \zeta = \varphi, \psi.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^\varphi(x, z) &= \frac{\partial^2 c(z, f(x))}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 c(z, f(z))}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 c(z, f(z))}{\partial x_i \partial y_k} \frac{\partial f_k(z)}{\partial x_j}, \\ \beta_{ij}^\psi(x, z) &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial^2 c(x, f(z))}{\partial y_k \partial y_l} - \frac{\partial^2 c(z, f(z))}{\partial y_k \partial y_l} \right) \frac{\partial f_k(z)}{\partial x_i} \frac{\partial f_l(z)}{\partial x_j} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial c(x, f(z))}{\partial y_k} - \frac{\partial c(z, f(z))}{\partial y_k} \right) \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial x_i \partial x_j} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 c(z, f(z))}{\partial x_j \partial y_k} \frac{\partial f_k(z)}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что на диагонали ($x = z$) имеет место равенство

$$\beta_{ij}^\varphi(x, x) = \beta_{ji}^\psi(x, x) = - \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 c(x, f(x))}{\partial x_i \partial y_k} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Далее $\text{spt } \sigma$ обозначает носитель σ , т.е. наименьшее замкнутое множество полной меры (относительно σ).

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия). *Предположим, что c ограничена на $X \times Y$, $\text{spt } \sigma_1 = X$ и $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Если μ_f — оптимальное решение ЗМК, то матрицы $\beta_{ij}^\varphi(x, z)$, $\beta_{ij}^\psi(x, z)$, $x, z \in X$, симметричны, а матрицы $\beta_{ij}^\varphi(x, x) = \beta_{ij}^\psi(x, x)$, $x \in X$ (см. (4)), положительно полуопределены. В таком случае существует единственная с точностью до постоянного слагаемого функция $u \in Q_0(\varphi) = -Q_0(\psi)$. Она дважды непрерывно дифференцируема и связана с функциями c и f равенством*

$$\nabla u(x) = -\nabla_x c(x, y)|_{y=f(x)}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия). *Предположим, что замкнутая область X выпукла, c ограничена на $X \times Y$ и $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Мера μ_f является оптимальным решением ЗМК в каждом из следующих двух случаев:*

(а) матрицы $\beta_{ij}^\varphi(x, x)$, $x \in X$, симметричны и для любых $x, z \in X$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial c(z, f(z))}{\partial x_j} - \frac{\partial c(z, f(x))}{\partial x_j} \right) (z_j - x_j) \leq 0; \quad (6)$$

(б) матрицы $\beta_{ij}^\psi(x, x)$, $x \in X$, симметричны и для любых $x, z \in X$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial c(z, f(z))}{\partial y_k} - \frac{\partial c(x, f(z))}{\partial y_k} \right) \frac{\partial f_k(z)}{\partial x_j} (z_j - x_j) \leq 0. \quad (7)$$

Более сильные достаточные условия: положительная полуопределенность (без требования симметричности) матриц $\beta_{ij}^\varphi(x, z)$ (соответственно $\beta_{ij}^\psi(x, z)$) для всех $x, z \in X$ в соединении с симметричностью матриц $\beta_{ij}^\varphi(x, x) = \beta_{ij}^\psi(x, x)$, $x \in X$, влечет за собой (6) (соответственно (7)) и, стало быть, является достаточным условием оптимальности μ_f .

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Требование ограниченности c на $X \times Y$ в теоремах 1 и 2 может быть ослаблено до предположения о σ_1 -суммируемости функций $\varphi(\cdot, z)$, $\psi(\cdot, z)$ для каждого $z \in \pi_1 \text{ spt } \mu_f = \{z' : (z', f(z')) \in \text{spt } \mu_f\}$.

2. Условия (6) и (7) представляют собой конкретизации неравенства

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \zeta(z, z)}{\partial z_j} - \frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial z_j} \right) (z_j - x_j) \leq 0$$

для $\zeta = \varphi$ и $\zeta = \psi$ соответственно.

3. Из симметричности $\beta_{ij}^\zeta(x, x)$, $x \in X$, и равенства $\beta_{ij}^\zeta(x, x) = -\frac{\partial^2 \zeta(x, x)}{\partial x_j \partial z_i}$, которое получается повторным дифференцированием тождества $\zeta(x, x) = 0$, следует симметричность всех $\beta_{ij}^\zeta(x, z)$, $x, z \in X$.

Если $m = n$, $c(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j b_j(y)$, то

$$\beta_{ij}^\varphi(x, z) = \beta_{ij}^\varphi(z, z) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_i(f(z))}{\partial y_k} \frac{\partial f_k(z)}{\partial x_j} \quad \text{для любых } x, z \in X.$$

Если к тому же $b_j(y) = y_j$, то $\beta_{ij}^\varphi(x, z) = -\partial f_i(z)/\partial x_j$ для любых $x, z \in X$. Тогда из теорем 1 и 2 вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что X — замкнутая выпуклая область, $c(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j b_j(y)$ ограничена на $X \times Y$, $\text{spt } \sigma_1 = X$ и $f(\sigma_1) = \sigma_2$. Мера μ_f является оптимальным решением ЗМК тогда и только тогда, когда матрицы

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_i(f(x))}{\partial y_k} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}, \quad x \in X,$$

симметричны и отрицательно полуопределены.

Если $b_j(y) = y_j$, то $a_{ij}(x) = \partial f_i(x)/\partial x_j$, $x \in X$. В этом случае необходимым и достаточным условием оптимальности μ_f является существование гладкой вогнутой функции $u(x)$, для которой $f(x) = \nabla u(x)$. При этом $u \in Q_0(\psi) = -Q_0(\varphi)$.

§3. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся некоторые определения и факты, относящиеся к абстрактной циклической монотонности [5]. Пусть X, Y — непустые множества, $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Множество $M \subset X \times Y$ называется *c-циклически антимонотонным по x* , если для любого натурального числа m и любых $(x_k, y_k) \in M$, $k = 1, \dots, m$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^m (c(x_k, y_k) - c(x_{k+1}, y_k)) \leq 0,$$

где $x_{m+1} := x_1$. Многочленное отображение $F: X \rightarrow L$, где $L \subset \mathbb{R}^X$, называется *L-циклически монотонным (L-циклически антимонотонным)*, если для любых натурального m и цикла $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} = x_1$ в $\text{dom } F := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ справедливо неравенство $\sum_1^m (l_k(x_k) - l_k(x_{k+1})) \geq 0$ (соответственно неравенство $\sum_1^m (l_k(x_k) - l_k(x_{k+1})) \leq 0$), каковы бы ни были $l_k \in F(x_k)$, $k = 1, \dots, m$. Очевидно, что F является *L-циклически монотонным* тогда и только тогда, когда $-F$ *(-L)-циклически антимонотонно*.

Пусть $F: X \rightarrow L$ — многочленное отображение, $Z = \text{dom } F$. Свяжем с F две функции на $Z \times Z$

$$\varphi_F(x, z) := \inf_{l \in F(x)} (l(x) - l(z)), \quad \psi_F(x, z) := \inf_{l \in F(z)} (l(x) - l(z)).$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что X, Y — польские пространства, c — ограниченная непрерывная вещественная функция на $X \times Y$ и σ_1, σ_2 — конечные положительные борелевские меры на X, Y с $\sigma_1 X = \sigma_2 Y$. Пусть $\mu \in \Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$. Положим $L = \{-c(\cdot, y) : y \in \text{spt } \sigma_2\}$ и рассмотрим отображения $F: X \rightarrow L$,*

$$F(x) := \{-c(\cdot, y) : (x, y) \in \text{spt } \mu\},$$

и $(-F): X \rightarrow (-L)$. Следующие утверждения равносильны:

- (a) μ — оптимальное решение ЗМК,
- (b) $Q_0(\varphi_F)$ непусто,
- (c) $Q_0(\psi_{-F})$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности и ограниченности c оптимальное значение ЗМК $\mathcal{C}(c; \sigma_1, \sigma_2)$ конечно и достигается на некоторой мере из $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2)$; см. [11, Theorem 1.4]. Далее, согласно [5, Theorem 5.1], μ является оптимальным решением ЗМК тогда и только тогда, когда множество $M = \text{spt } \mu$ *c-циклически антимонотонно по x* . Последнее условие, в свою очередь, равносильно *L-циклической монотонности отображения F и (-L)-циклической антимонотонности отображения $-F$* . Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремами 2.1 и 2.1' в [5], согласно которым *L-циклическая монотонность отображения F равносильна выполнению условия (b), а (-L)-циклическая антимонотонность отображения $-F$ равносильна выполнению условия (c)*. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, а функция $\zeta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ обращается в нуль на диагонали $D = \{(x, x) : x \in X\}$ и регулярна на некоторой окрестности $G \supset D$ в смысле [7] (см. также [5, 8]), т. е.*

- (a) ζ непрерывно дифференцируема на G ,
- (b) на D существуют непрерывные частные производные $\partial^2 \zeta / \partial x_i \partial x_j$, $\partial^2 \zeta / \partial x_i \partial z_j$ и

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_i \partial x_j}(x, x) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_j \partial x_i}(x, x), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

(с) для каждого $x \in X$ функция $\zeta(x, \cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $G(x) := \{z : (x, z) \in G\}$.

Если $Q_0(\zeta)$ непусто, то для каждого $x \in X$ матрица

$$\beta_{ij}^\zeta(x, x) = \frac{\partial^2 \zeta(x, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \zeta(x, x)}{\partial x_i \partial z_j} + \frac{\partial^2 \zeta(x, x)}{\partial z_i \partial z_j} = - \frac{\partial^2 \zeta(x, x)}{\partial x_j \partial z_i}$$

симметрична и положительно полуопределена.

Для открытой области X эта теорема доказана в [7, теорема 2] (см. также [8, Theorem 3.6]). Тогда по непрерывности она верна и для замкнутой области.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X — выпуклая замкнутая область, а ζ регулярна на $X \times X$ и $\zeta(x, x) = 0$ для любого $x \in X$.

I. Если для каждого $x \in X$ матрица $\beta_{ij}^\zeta(x, x)$ симметрична и для любых $x, z \in X$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \zeta(x, z)}{\partial z_j} - \frac{\partial \zeta(z, z)}{\partial z_j} \right) (z_j - x_j) \geq 0, \quad (8)$$

то $Q_0(\zeta)$ непусто.

II. Если матрицы $\beta_{ij}^\zeta(x, x)$, $x \in X$, симметричны, а матрицы $\beta_{ij}^\zeta(x, z)$, $x, z \in X$, удовлетворяют условию положительной полуопределенности:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^\zeta(x, z) s_i s_j \geq 0 \quad \text{для любого вектора } (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$$

(условие симметричности $\beta_{ij}^\zeta(x, z)$ при этом выполняется автоматически; см. замечание 3 выше), то для любых $x, z \in X$ справедливо неравенство (8).

В случае открытой выпуклой области X эта теорема доказана в [7, теоремы 4 и 5] (см. также [8, Theorems 3.7, 3.8; pp. 171–172, Remark]). Тогда по непрерывности теорема сохраняет силу и для замкнутой области.

§4. Доказательства теорем 1 и 2

Прежде всего заметим, что для гладких (классов C^2 и C^1) функций c и f функции φ , ψ регулярны на $X \times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим

$$L = \{-c(\cdot, y) : y \in \text{spt } \sigma_2\}, \quad F(x) = \{-c(\cdot, y) : (x, y) \in \text{spt } \mu_f\}.$$

Поскольку $\text{spt } \sigma_1 = X$, носителем μ_f является график отображения f , $\text{dom } F = X$ и $F(x) = -c(\cdot, f(x))$ для любого $x \in X$. Получаем

$$\varphi_F(x, z) = c(z, f(x)) - c(x, f(x)) = \varphi(x, z) \quad \text{для любых } x, z \in X.$$

Тогда, согласно теореме 3, $Q_0(\varphi) = -Q_0(\psi)$ непусто. Следовательно, по теореме 4 матрицы $\beta_{ij}^\varphi(x, x)$, $x \in X$, симметричны и положительно полуопределены. Далее, согласно [7, теорема 1], непустота $Q_0(\zeta)$ (для $\zeta = \varphi, \psi$) влечет за собой существование единственной с точностью до постоянного слагаемого функции $u \in Q_0(\zeta)$. Она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\nabla u(x) = \nabla_x \zeta(x, z)|_{z=x}, \quad (9)$$

которое превращается в (5) для $\zeta = \varphi$. Следуя [7], определим для каждого $x \in X$ функцию

$$g^x(z) := u(z) + \zeta(x, z), \quad z \in X.$$

Она дважды непрерывно дифференцируема. Используя (9), получаем (ср. [7, лемма 8])

$$\frac{\partial^2 g^x(z)}{\partial z_i \partial z_j} = \beta_{ij}^\zeta(x, z),$$

откуда следует симметричность матриц $\beta_{ij}^\zeta(x, z)$ для $\zeta = \varphi, \psi$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Справедливость одного из неравенств (6) или (7) влечет за собой выполнение условия (8) для $\zeta = \varphi$ или ψ (см. замечание 2 после формулировки теоремы 2). Согласно теореме 5(I), соответствующее множество $Q_0(\zeta)$ тогда непусто. Возьмем L и F , как в доказательстве теоремы 1, и положим $Z = \text{dom } F$. Тогда $Q_0(\zeta | Z \times Z)$ непусто, и так как $F(x) = -c(x, f(x))$ для любого $x \in Z$, $\varphi_F(x, z) = \varphi(x, z)$, $\psi_{-F}(x, z) = \psi(x, z)$ для любых $x, z \in Z$, то достаточность каждого из условий (6), (7) следует из теоремы 3. Второе утверждение теоремы (о более сильных достаточных условиях) вытекает из теоремы 5(II). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Судаков В. Н.* Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. Труды МИАН, **141** (1976).
2. *Brenier Y.* Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. Comm. Pure. Appl. Math., **44**, 375–417 (1991).
3. *Gangbo W., McCann R. J.* The geometry of optimal transportation. Acta Math., **177**, 113–161 (1996).
4. *Левин В. Л.* Существование и единственность сохраняющего меру оптимального отображения в общей задаче Монжа–Канторовича. Функц. анализ и его прил., **32**, вып. 3, 79–82 (1998).
5. *Levin V. L.* Abstract cyclical monotonicity and Monge solutions for the general Monge–Kantorovich problem. Set-Valued Analysis, **7**, 7–32 (1999).
6. *Rachev S. T., Rüschendorf L.* Mass Transportation Problems, Vol. 1: Theory, Vol. 2: Applications. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
7. *Левин В. Л.* Формула для оптимального значения задачи Монжа–Канторовича с гладкой функцией стоимости и характеристика циклически монотонных отображений. Матем. сб., **181**, №12, 1694–1709 (1990).
8. *Levin V. L.* Reduced cost functions and their applications. J. Math. Economics, **28**, 155–186 (1997).
9. *Levin V. L.* A superlinear multifunction arising in connection with mass transfer problems. Set-Valued Analysis, **4**, No. 1, 41–65 (1996).
10. *Левин В. Л.* К теории двойственности для нетопологических вариантов задачи о перемещении масс. Матем. сб., **188**, №4, 95–126 (1997).
11. *Levin V. L.* The Monge–Kantorovich problems and stochastic preference relations. Adv. Math. Economics, **3**, 97–124 (2001).