Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, О гармоническом анализе каузальных операторов, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 65–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa19>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 04:09:23

О гармоническом анализе каузальных операторов*

© 2006. А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ

В данной заметке для определения и изучения каузальных (причинных) операторов, играющих важную роль в теории систем [1] и дифференциальных уравнениях [2, 3], используется спектральная теория представлений абелевых групп (банаховых модулей над групповыми алгебрами). Мы считаем, что применение такой теории создает определенные преимущества по сравнению с двумя известными способами исследования теории каузальных операторов. Первый из них относится к операторам, действующим в гильбертовом пространстве, и определение каузальных операторов использует разложение единицы по системе ортопроекторов [1]. Другое направление исследования каузальных операторов изложено, например, в монографиях [2, 3] для операторов, действующих в функциональных пространствах. Оно тесно связано с приложениями к теории функциональных уравнений и, в частности, к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом.

Пусть X_1, X_2 — комплексные банаховы пространства, $\text{Hom}(X_1, X_2)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2 , и $\text{End } X = \text{Hom}(X, X)$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X . Пусть $\mathbb{G}$ — локально компактная абелева группа и $\widehat{\mathbb{G}}$ — двойственная к ней группа ее непрерывных унитарных характеров. Символом $L_1(\mathbb{G})$ обозначим банахову алгебру комплексных суммируемых (относительно меры Хаара на $\mathbb{G}$) функций со сверткой функций в качестве умножения, и пусть $\hat{f}: \widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{C}$ — преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{G})$.

Считается, что каждое рассматриваемое здесь банахово пространство X является банаховым $L_1(\mathbb{G})$ -модулем, модульная структура на котором определяется с помощью некоторого сильно непрерывного изометрического представления $T: \mathbb{G} \rightarrow \text{End } X$ формулой

$$T(f)x = fx = \int_{\mathbb{G}} T(-g)f(g)x \, dg, \quad f \in L_1(\mathbb{G}), \, x \in X. \quad (1)$$

При этом $L_1(\mathbb{G})$ -модуль X будет часто обозначаться через (X, T) , а оператор $x \mapsto fx: X \rightarrow X, f \in L_1(\mathbb{G})$, — через $T(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4–6]. *Спектром Берлинга* вектора x из $L_1(\mathbb{G})$ -модуля (X, T) называется подмножество из $\widehat{\mathbb{G}}$ вида $\Lambda(x) = \Lambda(x, T) = \{\gamma \in \widehat{\mathbb{G}} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L_1(\mathbb{G}) \text{ с } \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$.

ПРИМЕР 1. Пусть H — (комплексное) гильбертово пространство и на σ -алгебре Σ борелевских подмножеств из группы $\widehat{\mathbb{G}}$ задана сильно непрерывная ограниченная проекторнозначная мера $E: \Sigma \rightarrow \text{End } H$. Тогда формула $T(g)x = \int_{\widehat{\mathbb{G}}} (\gamma, g) dE(\gamma)x, x \in H$, определяет изометрическое представление $T: \mathbb{G} \rightarrow \text{End } H$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 04-04-00141.

а формула (1) — структуру $L_1(\mathbb{G})$ -модуля на H . Множество $\Lambda(x) = \Lambda(x, T)$ совпадает с носителем меры E .

ПРИМЕР 2. Пусть Δ — измеримое подмножество из $\widehat{\mathbb{G}}$ ненулевой меры и $L_p(\Delta, Y)$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых со степенью p измеримых (по Бохнеру) функций, определенных на группе $\mathbb{G}$ и принимающих значения в банаховом пространстве Y с нормой $\|x\|_p = (\int \|x(\gamma)\|^p d\gamma)^{1/p}$. Структура $L_1(\mathbb{G})$ -модуля на $L_p(\Delta, Y)$ определяется формулой $(V(f)x)(\gamma) = (fx)(\gamma) = \hat{f}(\gamma)x(\gamma)$, $f \in L_1(\mathbb{G})$, $x \in L_p(\Delta, Y)$, $\gamma \in \Delta$. В этом случае ассоциированное представление $V: \mathbb{G} \rightarrow \text{End } L_p(\Delta, Y)$ имеет вид $(V(g)x)(\gamma) = \gamma(g)x(\gamma)$, $g \in \mathbb{G}$, $\gamma \in \Delta$, и $\Lambda(x, V) = \text{supp } x$, $x \in L_p(\Delta, Y)$.

Пусть $T_i: \mathbb{G} \rightarrow \text{End } X_i$, $i = 1, 2$, — два сильно непрерывных изометрических представления. Особую роль в данной заметке играют две структуры банаховых модулей, которые можно ввести на пространстве операторов $\mathfrak{U} = \text{Hom}(X_1, X_2)$. Модульные структуры на $\mathfrak{U}$ вводятся с помощью формулы (1) по представлениям $\tilde{T}: \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \text{End } \mathfrak{U}$, $\tilde{T}(g_1, g_2)A = T_2(g_2)AT_1(g_1)$, и $T_0: \mathbb{G} \rightarrow \text{End } \mathfrak{U}$, $T_0(g)A = T_2(g)AT_1(-g)$, где $g, g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ и $A \in \mathfrak{U}$.

Множество операторов $\mathfrak{U}_0 = \{A \in \mathfrak{U} : \text{функция } g \rightarrow T_0(g)A: \mathbb{G} \rightarrow \mathfrak{U} \text{ непрерывна в равномерной операторной топологии}\}$ образует замкнутый подмодуль в $\mathfrak{U}$ и одновременно является подалгеброй в $\mathfrak{U}$, если $X_1 = X_2 = X$, $T_1 = T_2 = T$.

ТЕОРЕМА 1 [6]. *Спектр Берлинга $\Lambda(A, T_0)$ любого линейного оператора $A \in \text{Hom}(X_1, X_2)$ представим в виде $\Lambda(A, T_0) = \overline{\{\gamma_2 - \gamma_1 : (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda(A, \tilde{T})\}}$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. $\Lambda(Ax, T_2) \subseteq \overline{\Lambda(A, T_0) + \Lambda(x, T_1)}$ для любых $x \in X_1$ и $A \in \mathfrak{U}$.

Пусть (X, T) — банахов $L_1(\mathbb{G})$ -модуль и σ — замкнутое подмножество из $\widehat{\mathbb{G}}$. Тогда множество $X(\sigma) = \{x \in X : \Lambda(x) \subseteq \sigma\}$, являющееся замкнутым подмодулем в X , называется *спектральным подмодулем* или *подпространством* (см. [5, 6]).

Пусть (X_i, T_i) , $i = 1, 2$, — банаховы $L_1(\mathbb{G})$ -модули и $\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{G}}$ — замкнутая полугруппа, такая, что 0 лежит в замыкании внутренней $\text{Int } \mathbb{S}$ полугруппы $\mathbb{S}$. Линейный оператор $A \in \mathfrak{U}$ назовем *каузальным* (или *причинным*) относительно полугруппы $\mathbb{S}$ (и представления T_0), если для любого x из X_1 имеет место включение $\Lambda(Ax, T_2) \subseteq \Lambda(x, T_1) + \mathbb{S}$. Множество $\Lambda(A, T_0) \setminus \{0\} \subseteq \widehat{\mathbb{G}}$ назовем *памятью* линейного оператора $A \in \mathfrak{U}$ (ср. [2]). Из теоремы 1 и ее следствия получаем, что линейный оператор $A \in \mathfrak{U}$ каузален относительно полугруппы $\mathbb{S}$ тогда и только тогда, когда его память содержится в $\mathbb{S}$. Таким образом, множество каузальных относительно $\mathbb{S}$ операторов из $\mathfrak{U}$ совпадает со спектральным подмодулем $\mathfrak{U}(\mathbb{S})$, который мы обозначим символом $\mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$. Кроме того, если $X_1 = X_2 = X$ и $T_1 = T_2 = T$, то $\mathfrak{Caus}(X, X)$ образует замкнутую подалгебру в $(\text{End } X, T_0)$, которую мы будем обозначать одним из символов $\mathfrak{Caus}(X, T_0)$, $\mathfrak{Caus}(X)$.

Если $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{G} = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, то в качестве полугруппы $\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{S} \subset \widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$) обычно выступают множества $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ и $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$. Из теоремы 1 следует, что для $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ каузальность оператора $A \in \mathfrak{U}$ относительно $\mathbb{R}_+$ эквивалентна выполнению включений $AX_1([t, \infty)) \subseteq X_2([t, \infty))$, $t \in \mathbb{R}$ (см. [1–3] и пример 1).

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ и $\Delta \subseteq \mathbb{Z}$. Рассмотрим алгебру $\text{End } l_p$, где $l_p = l_p(\Delta) = L_p(\Delta, \mathbb{C})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство комплексных последовательностей, определенных на множестве Δ . Рассмотрим представление $T = V: \mathbb{T} \rightarrow \text{End } l_p$ из примера 2 и соответствующие представления $\tilde{T}: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \text{End}(\text{End } l_p)$ и $T_0: \mathbb{T} \rightarrow \text{End}(\text{End } l_p)$. Тогда для любого оператора $A \in \text{End } l_p$ множество $\Lambda(A, \tilde{T})$ совпадает с множеством $\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a_{ij} \neq 0\}$, где $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j \in \Delta$, — матрица оператора A относительно стандартного базиса в l_p , а множество $\Lambda(A, T_0)$ состоит из тех $k \in \Delta - \Delta$, для которых существуют $i, j \in \Delta$, такие, что $i - j = k$ и $a_{ij} \neq 0$. Поэтому оператор A каузален относительно $\mathbb{Z}_+$ тогда и только тогда, когда его матрица $\mathcal{A} = (a_{ij})$ нижнетреугольная.

Пусть $\gamma_0 \in \hat{\mathbb{G}}$. Ограниченную направленность (f_α) из алгебры $L_1(\mathbb{G})$ назовем γ_0 -направленностью, если $\hat{f}_\alpha(\gamma_0) = 1$ для всех α и $\lim_\alpha f_\alpha * f = 0$ для всех $f \in L_1(\mathbb{G})$ с $\hat{f}(\gamma_0) = 0$. Точку $\gamma_0 \in \Lambda(x, T) \subseteq \hat{\mathbb{G}}$ назовем эргодической для вектора x из $L_1(\mathbb{G})$ -модуля (X, T) , если для некоторой γ_0 -направленности (f_α) существует $x_0 = \lim_\alpha f_\alpha x$. Множество эргодических точек будем обозначать символом $\Lambda_{\text{erg}}(x, T)$. Если $x_0 = 0$, то точку γ_0 назовем точкой непрерывного спектра Берлинга вектора x . Если $x_0 \neq 0$, то x_0 является собственным вектором модуля X , т.е. $T(g)x_0 = \gamma_0(g)x_0$, $g \in \mathbb{G}$, и, в частности, $f x_0 = \hat{f}(\gamma_0)x_0$, $f \in L_1(\mathbb{G})$, откуда следует, что $\Lambda(x_0) = \{\gamma_0\}$. В этом случае характер γ_0 назовем собственным характером. Их совокупность назовем спектром Бора вектора x и обозначим через $\Lambda_B(x, T)$.

Теперь рассмотрим $L_1(\mathbb{G})$ -модуль $\mathfrak{U} = (\text{Hom}(X_1, X_2), T_0)$. Если $\Lambda(A_0, T_0) = \{0\}$ для $A_0 \in \mathfrak{U}$, то $T_2(g)A_0 = A_0 T_1(g)$, $g \in \mathbb{G}$. Такой оператор A_0 назовем оператором без памяти, и для их множества будем использовать обозначение $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathfrak{U})$. Если $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(A, T_0)$, то оператор $A_0 = \lim f_\alpha A \in \mathcal{M}$ (для некоторой 0-направленности f_α) часто будем обозначать символом $M(A)$. Если $M(A) = 0$, то оператор A будем называть равномерно каузальным. Множество таких операторов обозначим символом $\mathcal{WC}$. Отметим, что операторы из примера 3 являются операторами без памяти тогда и только тогда, когда их матрицы диагональны, и равномерно каузальными, когда их матрицы строго нижнетреугольные.

Оператор $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ называется каузально обратимым, если оператор $A^{-1} \in \text{Hom}(X_2, X_1)$ является каузальным относительно представления $T_0^{-1}: \mathbb{G} \rightarrow \text{End Hom}(X_2, X_1)$, определенного формулой $T_0^{-1}(g)B = T_1(g)BT_2(-g)$, $B \in \text{Hom}(X_2, X_1)$. Если $X_1 = X_2 = X$, то символом $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$ будем обозначать спектр оператора A в алгебре $\mathfrak{Caus}(X)$.

Отметим, что $\sigma(A) \subset \sigma_{\mathfrak{Caus}}(A)$, и эти множества могут отличаться друг от друга. Например, оператор A , заданный формулой $(A\varphi)(\gamma) = \gamma\varphi(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, в $L_2(\mathbb{T})$ обладает тем свойством, что $\sigma(A) = \mathbb{T}$, а $\sigma_{\mathfrak{Caus}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ (модульная структура в $L_2(\mathbb{T})$ определяется группой операторов сдвигов функций из $L_2(\mathbb{T})$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X_1, X_2)$ — каузально обратимый оператор и $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(A, T_0)$. Тогда $0 \in \Lambda_{\text{erg}}(A^{-1}, T_0^{-1})$, оператор $M(A)$ обратим и $(M(A))^{-1} = M(A^{-1})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеет место включение $\sigma(M(A)) = \sigma_{\text{caus}}(M(A)) \subseteq \sigma_{\text{caus}}(A)$.

Приведем несколько достаточных условий принадлежности оператора A радикалу $\text{Rad}_{\mathfrak{C}}(X) = \{B \in \mathfrak{Caus}(X) : \sigma(BA) = \{0\} \text{ для любого } A \in \mathfrak{Caus}(X)\}$ алгебры $\mathfrak{Caus}(X)$. В этом случае $X_1 = X_2 = X$ и $T_1 = T_2 = T$; при этом далее всюду будем считать, что для любых двух компактов $K_1 \subset \mathbb{S} \setminus \{0\}$, $K_2 \subset \mathbb{S}$ существует $m \in \mathbb{N}$, при котором $mK_1 \cap K_2 = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3. Оператор $A \in \mathfrak{U}_0$ из алгебры $\mathfrak{Caus}(X)$ принадлежит радикалу этой алгебры, если выполнены следующие условия: 1) $A \in \mathcal{UC}$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in L_1(\mathbb{G})$, такая, что $\|T(\varphi)A - A\| < \varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $A \in \mathcal{UC} \cap \mathfrak{U}_0$ — компактный оператор, то $A \in \text{Rad}_{\mathfrak{C}}(X)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X)$ — компактный оператор и спектр Бора $\Lambda_B(x)$ каждого вектора x из банахова $L_1(\mathbb{G})$ -модуля (X, T) пуст. Тогда $A \in \text{Rad}_{\mathfrak{C}}(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $A, K \in \mathfrak{Caus}(X, T_0)$, K — компактный оператор и $\Lambda_B(x)$ пуст для каждого вектора x из модуля (X, T) . Тогда $\sigma_{\text{caus}}(A + K) = \sigma_{\text{caus}}(A)$.

Под спектральной компонентой из спектра $\sigma(a)$ элемента a банаховой алгебры $\mathcal{B}$ понимается такое непустое подмножество σ_1 из $\sigma(a)$, что $\text{dist}(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ для $\sigma_2 = \sigma(a) \setminus \sigma_1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \in \mathfrak{Caus}(X) \cap \mathfrak{U}_0$ и $0 \in \Lambda'_{\text{erg}}(A, T_0)$. Тогда каждая спектральная компонента из $\sigma_{\text{caus}}(A)$ содержит по крайней мере одну спектральную компоненту множества $\sigma(M(A))$. В частности, $\sigma_{\text{caus}}(A)$ — связное множество и $0 \in \sigma_{\text{caus}}(A)$, если $A \in \mathcal{UC}$.

ПРИМЕР 4. Пусть A — каузальный оператор из примера 3, где $\Delta = \mathbb{N}$, и, следовательно, его матрица $\mathcal{A} = (a_{ij})$ нижнетреугольная. Тогда $\sigma_{\text{caus}}(A)$ содержит множество $\sigma_0 = \{a_{ii}; i \in \Delta\}$, причем каждая спектральная компонента из $\sigma_{\text{caus}}(A)$ содержит хотя бы одно из чисел a_{ii} , $i \geq 1$. Равенство $\sigma_{\text{caus}}(A) = \sigma(A)$ имеет место, если выполнены следующие два условия: 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i, i+k} = 0$, $i \geq 1$, 2) $\sum_{k \geq 1} d_k(A) < \infty$, где $d_k(A) = \sup_{i \geq 1} |a_{i, i+k}|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feintuch A., Sacks R. System Theory. A Hilbert Space Approach. Academic Press, New York–London, 1982.
2. Kurbatov V. G. Functional Differential Operators and Equations. Kluwer Academic Publishers, 1999.
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Методы современной теории линейных функционально-дифференциальных уравнений. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2000.
4. Dohmar Y., Lindahl L.-A. Ann. Inst. Fourier, **25**, No. 2, 1–32 (1975).
5. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. Мир, М., 1982.
6. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. ВГУ, Воронеж, 1987.

Воронежский государственный университет
e-mail: mmio@amm.vsu.ru

Washington University in St. Louis
e-mail: iakr@mail.ru

Поступило в редакцию
12 февраля 2004 г.