Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Обломков, Изознергетическая спектральная задача для многомерных разностных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 45–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 02:26:03

УДК 517.958

Изоэнергетическая спектральная задача для многомерных разностных операторов*

© 2002. А. А. Обломков

Введение

Спектральная задача для многомерного уравнения Шрёдингера в случае, когда спектральные данные собираются с одного фиксированного уровня энергии, имеет давнюю историю, связанную с именами Р. Ньютона, П. Сабатье, Б. М. Левитана и др. (см. например книгу Шадана и Сабатье [1], где имеется замечательный исторический обзор с обширным списком литературы).

Алгебро-геометрический анализ этой проблемы был начат Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером и С. П. Новиковым в известной работе [2], где был введен класс двумерных операторов Шрёдингера, конечнозонных по отношению к одному уровню энергии. Собственная функция такого оператора определена на алгебраической кривой и мероморфна вне выделенных точек, в которых она имеет экспоненциальные особенности (так называемая функция Бейкера–Ахиезера). В последующих работах А. П. Веселов и С. П. Новиков нашли достаточные условия на спектральную кривую и дивизор полюсов ψ , для которых соответствующий оператор чисто потенциален [3–5].

Исследование разностных операторов с аналогичными свойствами было начато И. М. Кричевером в работах [6, 7], где была предложена конструкция для обратной задачи на одном уровне энергии для операторов на двумерной решетке. Прямая задача для операторов на двумерной решетке исследовалась в недавней работе [8], в этой работе также даны ответы на некоторые вопросы, поставленные в работе [7]. Отметим также работу [9], где исследуется обратная спектральная задача для некоторого класса двумерных разностных операторов с ненулевой диагональю.

В работах Т. Каппелера и Д. Бэттига [10, 11] была построена компактификация спектрального многообразия для многомерного разностного оператора Шрёдингера при всех уровнях энергии и исследован вопрос об операторах с одинаковыми спектральными многообразиями (непрерывной версии этих результатов посвящены работы [12, 13]).

В недавних работах С. П. Новикова и И. А. Дынникова [14, 15] были найдены некоторые примеры интегрируемых в стиле теории солитонов дискретных операторов на многомерной симплицальной решетке. Эти работы стимулировали дальнейшие исследования в указанном направлении [16], к которому относится и настоящая работа.

*Работа поддержана грантом РФФИ №01-01-00803.

В работе исследуются прямая и обратная спектральные задачи на нулевом уровне энергии для класса операторов L , действующих на пространстве V функций, определенных на решетке $\Gamma = \mathbb{Z}^N$, по следующей формуле:

$$(L\psi)(n) = \sum_{\zeta=(\pm 1, \dots, \pm 1)} a(n; \zeta) \psi(n + \zeta).$$

Предполагается, что коэффициенты оператора удовлетворяют условиям самосопряженности $a(n; \zeta) = a(n + \zeta; -\zeta)$ и периодичности $a(n + T_i e_i; \zeta) = a(n; \zeta)$, $T_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, N$.

Заметим, что диагональные элементы оператора L равны нулю. В одномерном случае алгебро-геометрический анализ спектральной теории «бездиагональных» операторов $(L\psi)_n = c_n \psi_{n-1} + c_{n+1} \psi_{n+1}$ был произведен С. П. Новиковым (см. [17]). Спектральными данными в этом случае являлись кривая с симметрией и дивизор на этой кривой. В работе [18] была найдена связь таких операторов с цепочкой Гейзенберга и выявлено различие между четным и нечетным случаями.

Спектральными данными в нашем случае будут наборы гиперповерхностей (спектральные многообразия), оснащенные набором дивизоров, удовлетворяющих некоторым условиям. Первая часть этих условий обобщает соотношения Веселова–Новикова [3, 4], вторая часть гарантирует существование многомерных аналогов функции Бейкера–Ахиезера [6]. Спектральные данные обладают замечательным свойством, которое мы называем наличием индуктивной структуры. Это свойство заключается в том, что компоненты, добавляемые при компактификации спектрального многообразия, вместе с ограничениями на них набора дивизоров представляют собой спектральные данные ограничения изначального разностного оператора на некоторую подрешетку. Это позволяет свести задачу восстановления оператора по спектральным данным к одномерному случаю и получить формулы в θ -функциях. Опишем эти спектральные данные и соответствующие соотношения. Аффинной частью спектрального многообразия оператора L называется гиперповерхность $Y = Y_L = \{\lambda \in (\mathbb{C}^*)^N \mid V(\lambda) \cap \ker L \neq 0\}$, где $V(\lambda) = \{\psi \in V \mid \psi(n + T_i e_i) = \lambda_i \psi(n)\}$ — пространство блоховских функций. Для простоты будем считать, что все T_i нечетны (в основной части статьи это ограничение отсутствует). В этом случае для общего L гиперповерхность Y_L является неприводимой, инвариантной относительно действия группы $\mathbb{Z}_2^N$ и меняющей знаки у компонент вектора λ . Ее фактор по этой группе обозначим через $X = X_L$ и будем называть *модифицированным спектральным многообразием*. Вложение $(\mathbb{C}^*)^N \subset (\mathbb{CP}^1)^N$ дает естественную компактификацию многообразия X . Многообразия, добавляемые при компактификации, имеют аналогичную структуру: $X^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = X_{L^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]}$, где оператор $L^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq N$, $\gamma = \pm 1$, является «редукцией» оператора L на $(N - 1)$ -мерную подрешетку $\Gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \{\xi \in \Gamma \mid \xi_i = k\}$ (точные определения см. в основном тексте). На X естественным образом действует инволюция $\sigma: \lambda \rightarrow \lambda^{-1}$, которая специальным образом переставляет «бесконечности» $X^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Общей точке $\lambda \in Y$ отвечает вектор $\psi(\lambda, n) \in \ker L \cap V(\lambda)$, единственный с точностью до умножения на константу. При этом $\psi(\lambda, 2n + \varepsilon) / \psi(\lambda, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}^N$, является корректно определенной функцией на X . Таким образом, вектор $\psi(\lambda, 2n + \varepsilon)$, $n \in \Gamma$, нормированный условием $\psi(\lambda, \varepsilon) \equiv 1$, корректно определен на X . Для упрощения формулировок положим $\varepsilon = 0$. Тогда существует

эффективный дивизор $\mathcal{D}_0$, не имеющий неприводимых компонент, лежащих на бесконечности (дивизоры с таким свойством будем называть конечными), такой, что выполнены соотношения

$$\mathcal{D}_0 + \sigma(\mathcal{D}_0) + \sum_{s=1}^N \sum_{p=0}^{(T_s-1)/2} (X^1[{}^s_{2p+1}] - X^{-1}[{}^s_{2p+1}]) - \sum_{s=1}^N X^{+1}[{}^s_0] \sim \mathcal{K}_X, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_{2n} := (\psi(\cdot, 2n)) - \mathcal{D}_0 + Q[{}^0_{2n}] - Q[{}^{2n}_0] > 0 \quad \forall n \in \Gamma, \quad (2)$$

$$X^{\pm 1}[{}^r_{p+T_r}] = X^{\pm 1}[{}^r_p], \quad Q[{}^{2n+2T_r e_r}_{2n}] \sim 0, \quad r = 1, \dots, N; \quad (3)$$

здесь $\mathcal{K}_X$ — канонический дивизор, а $Q[{}^{2n}_0] = \sum_{s=1}^N \sum_{p=n^0_s}^{n^1_s} (X^1[{}^s_{2p+1}] - X^{-1}[{}^s_{2p+1}])$, где суммирование предполагается лишь в случае $n^0_s \leq n^1_s$. Соотношение (1) является многомерным дискретным обобщением соотношений Веселова–Новикова, соотношение (2) обобщает стандартные требования к функции Бейкера–Ахиезера (фиксированная особенность в конечной части и кратности полюсов (нулей) на бесконечности, зависящие от n), а условие (3) гарантирует квазипериодичность функции ψ . При $N = 2$ соотношение (2) было выписано в работе И. М. Кричевера [6], а соотношение (1) — в работе автора [8].

Многообразие X вместе с дивизором $\mathcal{D}_0$ являются спектральными данными нашей задачи. Тот факт, что набор $\{X^\gamma[{}^i_k], \mathcal{D} \cap X^\gamma[{}^i_k]\}$ является набором спектральных данных прямой задачи для операторов $L^\gamma[{}^i_k]$, является для нас ключевым. Он позволяет свести решение обратной спектральной задачи для N -мерного оператора к решению спектральных задач для двумерных операторов, а в двумерном случае эта задача решена в [7] (см. также [8]) и имеются явные θ -функциональные формулы.

На пространстве операторов L действует калибровочная группа по формуле $a'(n; \zeta) = g(n)g(n + \zeta)a(n; \zeta)$, где g — произвольная периодическая функция на решетке. Нетрудно видеть, что она сохраняет спектральные данные, отвечающие нулевому уровню энергии. Основным результатом работы является утверждение о том, что спектральные данные $\{X_L, \mathcal{D}_0\}$ однозначно определяют калибровочный класс оператора L . Оператор L может быть восстановлен в терминах θ -функций некоторых кривых, лежащих на «бесконечности» X_L . Например, при $N = 3$ обратная спектральная задача решается следующим образом. Определим $\mathcal{D}_{2n}$ по $\mathcal{D}_0$ формулой (2), а затем по спектральным данным $\{X^\gamma[{}^i_{2n_i - \gamma}], \mathcal{D}_{2n} \cap X^\gamma[{}^i_{2n_i - \gamma}]\}$ восстановим двумерный оператор $L^\gamma[{}^i_{2n_i}]$ по схеме работы [6]. Коэффициенты $L^\gamma[{}^i_{2s}]$, $i, s \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \pm 1$, дают нам все коэффициенты оператора L .

Автор благодарен проф. А. П. Веселову за постановку задачи в двумерном случае, полезные обсуждения и предложения по улучшению первоначального текста.

§1. Геометрия N -мерной кубической решетки, редуцированные операторы и их спектральные многообразия

Здесь и далее используются следующие соглашения. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^N$, $l = (l_1, \dots, l_r) \in \mathbb{Z}^r$, $l_i \leq N$; тогда $\mu_l = (\mu_{l_1}, \dots, \mu_{l_r})$ и $\mu^k = \mu_1^{k_1} \cdots \mu_N^{k_N}$.

Для описания алгебраической структуры спектральных данных оператора L нам понадобятся связанные с ним операторы $L_j^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, действующие в пространстве V^M функций на решетке $\Gamma^M = \mathbb{Z}^N$, $M \leq N$. Здесь и далее $i \in \mathbb{Z}^{N-M}$ и $j \in \mathbb{Z}^M$ задают разбиение множества $\{1, \dots, N\}$ на два непересекающихся подмножества: $\{i_1, \dots, i_{N-M}\} \cup \{j_1, \dots, j_M\} = \{1, \dots, N\}$, $k \in \mathbb{Z}^{N-M}$, $\gamma \in \{+1, -1\}^{N-M}$. Действие оператора $L_j^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ задается формулой

$$(L_j^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \psi)(m) = \sum_{\zeta, \zeta_i = \gamma} a(n; \zeta) \psi \left(m + \sum_{r=1}^M \zeta_{j_r} e_r \right),$$

где $\zeta = (\pm 1, \dots, \pm 1)$, $m \in \Gamma^M = \mathbb{Z}^M$, $n_i = k$, $n_j = m$. Вектор j фиксирует порядок переменных, и когда нам будет неважен этот порядок, мы будем индекс j опускать. Отметим, что оператор L является частным случаем оператора $L_j^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ (при $M = N$, $\gamma, i = \emptyset$, $j = (1, \dots, N)$).

Поясним неформально смысл оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Пусть $M = N - 1$, $\gamma = \pm 1$, $i = N$; тогда $(L\psi)(n) = (L^{+1} \begin{bmatrix} N \\ n_N \end{bmatrix} \varphi^{+1})(\tilde{n}) + (L^{-1} \begin{bmatrix} N \\ n_N \end{bmatrix} \varphi^{-1})(\tilde{n})$, где $\tilde{n} = (n_1, \dots, n_{N-1})$, $\varphi^\gamma(m) = \psi(m_1, \dots, m_{N-1}, n_N + \gamma)$. То есть «локально» оператор L представим в виде суммы $L^{+1} \begin{bmatrix} N \\ n_N \end{bmatrix} \oplus L^{-1} \begin{bmatrix} N \\ n_N \end{bmatrix}$. Оператор $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ можно рассматривать как редукцию оператора L на подрешетку $\Gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \{\xi \in \Gamma^N \mid \xi_i = k\}$ в направлении γ . Точки $n + \zeta$, $\zeta = (\pm 1, \dots, \pm 1)$ являются вершинами N -мерного куба. На оператор $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ можно смотреть как на оператор, действующий на пространстве $\{\psi \in V^N \mid \text{supp } \psi \subset \Gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} + \gamma\} \cong V^M$. Следуя идеологии работы [14], будем считать, что в каждую вершину n входят ребра, соединяющие эту вершину с вершинами $n + \zeta$, и на этих ребрах написаны числа $a(n; \zeta)$. Для вычисления $(L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \psi)(n_j)$ необходимо взять соответствующую грань куба, т.е. вершины $n + \zeta$, такие, что $n_i = k$, $\zeta_i = \gamma$, и просуммировать значения ψ по вершинам этой грани с весами $a(n; \xi)$, написанными на соответствующих ребрах.

Пространство $V^M(\lambda) = \{\psi \in V^M \mid \psi(n + T_r e_r) = \lambda_r \psi(n), r = 1, \dots, M\}$ будем называть пространством блоховских функций с множителем Флоке λ . Рассмотрим ограничение оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ на подпространство $V^M(\lambda)$ и обозначим его символом $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda$. Множество точек $Y^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \{\lambda \in (\mathbb{C}^*)^M \mid \ker L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda \neq 0\}$ будем называть аффинной частью спектрального многообразия оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Выбрав естественную в этом случае компактификацию многообразия $(\mathbb{C}^*)^M \subset (\mathbb{CP}^1)^M$, получаем компактификацию $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ многообразия $Y^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Множество $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \setminus Y^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ будем обозначать символом $Y^{\infty, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$.

Полученное многообразие $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, вообще говоря, приводимо, и чтобы описать неприводимые компоненты этого многообразия, нам понадобится следующая конструкция. Пространство V^M естественным образом разлагается в сумму: $V^M = \bigoplus_\varepsilon V_\varepsilon^M$, $V_\varepsilon^M = \{\psi \in V^M \mid \text{supp } \psi \subset \Gamma_\varepsilon^M\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^M$, $\Gamma_\varepsilon^M = \{\xi \in \Gamma^M \mid \xi = \varepsilon \pmod{2}\}$. Это разложение не может быть перенесено на пространство блоховских функций, так как сдвиг на вектор, имеющий хотя бы одну нечетную координату, перемешивает узлы разных типов. Но эту сложность можно обойти с помощью следующей конструкции. Пусть $T'_r = T_r/2$, если T_r четно, и $T'_r = T_r$ в противном случае. Введем пространства $W_\varepsilon^M(\mu) = \{\psi \in V_\varepsilon^M \mid \psi(m + 2T'_r e_r) = \mu_r \psi(m), r =$

$1, \dots, M\}$ и отображения $\Phi: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$, $\Phi(\lambda) = \mu$, где $\mu_r = \lambda_r^2$, если T_{j_r} нечетно, и $\mu_r = \lambda_r$ в противном случае. Введем обозначения для четных и нечетных периодов: $l \in \mathbb{Z}^S$, $h \in \mathbb{Z}^{M-S}$, $S \leq M$, $\{l_1, \dots, l_S\} \cup \{h_1, \dots, h_{M-S}\} = \{1, \dots, M\}$; если T_{j_r} четно, то $r \in \{l_1, \dots, l_S\}$, в противном случае $r \in \{h_1, \dots, h_{M-S}\}$. Определим отображение $F_\varepsilon^\lambda: W_\varepsilon^M(\mu) \rightarrow V^M(\lambda)$, где $\mu = \Phi(\lambda)$, следующим образом: $F_\varepsilon^\lambda(\varphi) = \psi$, причем если $m_l = \varepsilon_l \pmod{2}$, то $\psi(m) = \varphi(m - \sum_{r=1}^M \rho_r T_r e_r) \mu^\rho$, где $\rho_r = 1$, когда T_{j_r} нечетно и $m_r \neq \varepsilon_r \pmod{2}$, и $\rho_r = 0$ в противном случае, а если $m_l \neq \varepsilon_l \pmod{2}$, то $\psi(m) = 0$.

Символом $L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu$ будем обозначать ограничение оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ на пространство $W_{1-\varepsilon}^M(\mu)$, $L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu: W_{1-\varepsilon}^M(\mu) \rightarrow W_\varepsilon^M(\mu)$. Нетрудно видеть, что F_ε^λ корректно определено и инъективно. При этом имеем $F_{1-\varepsilon}^\lambda(\ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu) \subset \ker L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda$, $\mu = \Phi(\lambda)$. Пусть $X_\varepsilon^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \{\mu \in (\mathbb{C}^*)^M \mid \ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu \neq 0\}$, $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \overline{X_\varepsilon^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}} \subset (\mathbb{CP}^1)^M$, $Y_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}) \subset Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Добавляемую при компактификации бесконечную часть многообразия $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ будем обозначать $X_\varepsilon^{\infty, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \setminus X_\varepsilon^{\text{aff}, \gamma} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Символом $V_\varepsilon^M(\lambda) \subset V^M(\lambda)$ обозначим $F_\varepsilon^\lambda(W_\varepsilon^M(\mu))$. Так как сдвиг на вектор $T_{j_{h_r}} e_{h_r}$, $r = 1, \dots, M - S$, переводит пространство $W_{1-\varepsilon}(\mu)$ в пространство $W_{1-\varepsilon'}(\mu)$, $\varepsilon' = \varepsilon + e_{h_r} \pmod{2}$, и оставляет инвариантным оператор $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, то $V_{1-\varepsilon}(\lambda) = V_{1-\varepsilon'}(\lambda)$, $F_{1-\varepsilon}^\lambda(\ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu) = F_{1-\varepsilon'}^\lambda(\ker L_{\varepsilon'}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu)$; следовательно, $Y_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = Y_{\varepsilon'}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, если $\varepsilon_l = \varepsilon'_l$. Подсчетом размерностей можно показать, что имеет место разложение $V(\lambda) = \bigoplus_{\varepsilon, \varepsilon_h=0} V_\varepsilon(\lambda)$. Так как $F_{1-\varepsilon}^\lambda(\ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu) = V_\varepsilon^M(\lambda) \cap \ker L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$, то $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \bigcup_{\varepsilon, \varepsilon_h=0} Y_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Пусть $X^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \Phi(Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}) = \bigcup_{\varepsilon, \varepsilon_h=0} X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Многообразие $X^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ ($X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$) будем называть *модифицированным спектральным многообразием оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$* ($L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$).

Наиболее просто приведенная выше конструкция выглядит в случае, когда все T_{j_r} четны. Тогда $\mu = \lambda$, $W_\varepsilon(\mu) = V_\varepsilon(\lambda)$, $V(\lambda) = \bigoplus_\varepsilon V_\varepsilon(\lambda)$, $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = Y_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ и задача нахождения $\ker L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda$ эквивалентна нахождению $\ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda$ для всех ε . В случае же общего T_j приведенная выше конструкция является сведением к четному случаю. То есть мы рассматриваем $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ не как T_j -периодический оператор, а как $2T'_j$ -периодический оператор. Соответственно множители Флоке λ заменяются на множители Флоке μ . Но следует помнить, что в действительности коэффициенты оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ T_j -периодичны, из чего следует, что

$$X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = X_{\varepsilon'}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k + T_{i_r} e_r \end{bmatrix}, \quad r = 1, \dots, N - M, \quad (4)$$

где $\varepsilon_l = \varepsilon'_l$. Необходимость такого сведения мотивирована тем, что $\det L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\lambda$ является рациональной функцией от $\lambda_{h_r}^2$, $r = 1, \dots, M - S$, и переход от $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ к $X^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ отвечает факторизации многообразия $Y^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ по инволюциям $\lambda_{h_r} \rightarrow -\lambda_{h_r}$, $r = 1, \dots, M - S$.

Открытое по Зарисскому множество операторов L , таких, что $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ для всех ε являются неприводимыми, обозначим символом $U_{ir}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$. Непустота этого множества будет доказана в лемме 4.

§2. Спектральные данные: индуктивная структура

Наличие индуктивной структуры заключается в возможности сведения изучения одного оператора L , действующего в размерности N , к изучению большого числа операторов $L_j^\gamma [k]$ такого же типа, действующих уже в размерности $M < N$.

Выберем базис $\{e_{\varepsilon,j}^M(\mu)\}$ в $W_\varepsilon^M(\mu)$, такой, что матрица оператора $L^\gamma [k]$, записанная в этом базисе, имеет блочную структуру, отражающую индуктивную структуру оператора $L^\gamma [k]$. Пусть $0 \leq m'_r < T'_{j_r}$, $a = 1 + \sum_{b=1}^M m'_b \prod_{r=b+1}^M T'_{j_r}$; тогда $e_{\varepsilon,j,a}^M(\mu)$ однозначно определяется из условия $e_{\varepsilon,j,a}(\mu) \in W_\varepsilon^M(\mu)$, $e_{\varepsilon,j,a}(\mu, m) = \prod_{b=1}^M \delta_{\varepsilon_b+2m'_b}^m$ при $0 \leq m - \varepsilon < 2T'_{j_1}$. Матрицу оператора $L_\varepsilon^\gamma [k]_\mu$, записанную в базисах $\{e_{1-\varepsilon,j}(\mu)\}$, $\{e_{\varepsilon,j}(\mu)\}$, будем обозначать символом $\mathbf{M}_{\varepsilon,j}^\gamma [k]_\mu(\mu)$. Эта матрица имеет блочно-двудиagonalную структуру с блоками вида $\mathbf{M}_{\varepsilon,j}^{\gamma,\pm 1} [k,u]_{\varepsilon,j}^{i,t}$:

$$\mathbf{M}_{\varepsilon,j}^\gamma [k] = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma'} [k,0] & 0 & \dots & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma''} [k,0] \mu_1^{-1} \\ \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma''} [k,2] & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma'} [k,2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma'} [k,2(T'_{j_1}-1)] \end{vmatrix}$$

при $\varepsilon_{j_1} = 1$,

$$\mathbf{M}_{\varepsilon,j}^\gamma [k] = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma''} [k,1] & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma'} [k,1] & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma''} [k,3] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma'} [k,2T'_{j_1}-1] \mu_1 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{\varepsilon,\tilde{j}}^{\gamma''} [k,2T'_{j_1}-1] \end{vmatrix}$$

при $\varepsilon_{j_1} = 0$; здесь использованы обозначения $\tilde{j} = (j_2, \dots, j_M)$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M)$, $\gamma' = (\gamma, 1)$, $\gamma'' = (\gamma, -1)$. Индукцией по M можно показать, что

$$(\mathbf{M}_{\varepsilon,j}^\gamma [k]_\mu(\mu))^t = \mathbf{M}_{1-\varepsilon,j}^{-\gamma} [k+\gamma]_\mu(\mu^{-1}), \quad (5)$$

где $\mu^{-1} = (\mu_1^{-1}, \dots, \mu_M^{-1})$, а символ t означает транспонирование.

Уравнение $R_{\varepsilon,j}^\gamma [k]_\mu(\mu) = \det(M_{\varepsilon,j}^\gamma [k]_\mu(\mu)) = 0$ определяет многообразие $X_\varepsilon^\gamma [k]$. Нетрудно видеть, что $R_{\varepsilon,j}^\gamma [k]_\mu(\mu) = C R_{\varepsilon,\tau(j)}^\gamma [k]_\mu(\tau(\mu))$, где $C \neq 0$ — константа, $\tau \in S_M$ — перестановка, $\tau(j) = (j_{\tau(1)}, \dots, j_{\tau(M)})$, $\tau(\mu) = (\mu_{\tau(1)}, \dots, \mu_{\tau(M)})$; поэтому мы будем опускать j в обозначении $R_{\varepsilon,j}^\gamma [k]$. Из вида матрицы $M_{\varepsilon,j}^\gamma [k]$ следует, что $R_{\varepsilon,j}^\gamma [k]$ является полиномом от $\mu_1^{(1-2\varepsilon_{j_1})}$ степени $\prod_{t=2}^M T'_{j_t}$, и из предыдущего рассуждения также следует, что $R_\varepsilon^\gamma [k]$ является полиномом от $\mu_r^{(1-2\varepsilon_{j_r})}$ степени $(T'_{j_r})^{-1} \prod_{p=1}^M T'_{j_p}$, $r = 1, \dots, M$. Суммируем полученные нами наблюдения:

ЛЕММА 1. Для общего оператора L справедливы следующие утверждения: $R_\varepsilon^\gamma [k]_\mu(\mu)$ является полиномом по $\mu_r^{(1-2\varepsilon_{j_r})}$ и $\deg_{\mu_r^{(1-2\varepsilon_{j_r})}} R_\varepsilon^\gamma [k]_\mu(\mu) = (T'_{j_r})^{-1} \prod_{t=1}^M T'_{j_t}$;

$$R_\varepsilon^\gamma [k] = R_{\varepsilon'}^{\gamma'} [k+T'_{j_r}],$$

где $r = 1, \dots, N - M$, $\varepsilon_l = \varepsilon'_l$;

$$R_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(\mu) = R_{1-\varepsilon}^{-\gamma} \begin{bmatrix} i \\ k+\gamma \end{bmatrix}(\mu^{-1}); \quad (6)$$

$$R_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(\mu) \mu_p^{T'_{jp} \delta_{2\varepsilon_p-1}^w} \Big|_{\mu_p^{-w}=0} = \prod_{r=0}^{T'_{jp}-1} R_\varepsilon^{\gamma'} \begin{bmatrix} i, j_r \\ k, 1-\varepsilon_p+2r \end{bmatrix}(\tilde{\mu}), \quad (7)$$

где $p = 1, \dots, M$, $w = \pm 1$, $\gamma' = (\gamma, w)$, $\tilde{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_{p+1}, \dots, \mu_M)$, $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_M)$.

Формула (7) является непосредственным следствием блочно-двудиAGONальной структуры матрицы $\mathbf{M}_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$.

Из соотношения (6) следует, что естественная инволюция σ на $(\mathbb{CP}^1)^N$, $\sigma(\mu) = \mu^{-1}$, действует на $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ по следующему правилу:

$$\sigma(X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}) = X_{1-\varepsilon}^{-\gamma} \begin{bmatrix} i \\ k+\gamma \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Наличие этой инволюции является следствием самосопряженности оператора $L^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$.

Символом $(\mathbb{CP}^1)_\mu^M$ будем обозначать многообразие $(\mathbb{CP}^1)^M$ с фиксированным набором координат μ : μ_r является координатой на r -м $\mathbb{CP}^1$. Теперь введем определение набора многообразий, совместимого с группой периодов T . Набор $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N\}$, где $X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)^N$ — неприводимые гладкие гиперповерхности, является набором многообразий, совместимых с группой периодов T , если

- X_ε — многообразие степени $((T'_1)^{-1}, \dots, (T'_N)^{-1}) \prod_{u=1}^N T'_u$;
- $X_\varepsilon \cap \{\mu_1^{-\gamma_1} = 0, \dots, \mu_{i_{N-M}}^{-\gamma_{N-M}} = 0\} = \bigcup_{0 \leq k < T'_i} X_{\varepsilon_j}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ 2k+\varepsilon_i \end{bmatrix}$, где $X_{\varepsilon_j}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ \cdot \end{bmatrix}$ — неприводимое гладкое многообразие степени $((T'_{j_1})^{-1}, \dots, (T'_{j_M})^{-1}) \prod_{u=1}^{N-M} T'_{j_u}$;
- выполнены соотношения (4), (8).

Обозначим символом $U_{sm}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ множество операторов L , таких, что $X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ неособо для всех ε . Это множество открыто по Зарисскому и, как будет доказано в лемме 4, непусто. Из леммы 1 следует, что для $L \in \bigcap_{i,k,\gamma} U_{sm}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \cap U_{ir}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ набор $\{X_\varepsilon\}$ совместим с набором периодов T , где X_ε есть набор спектральных многообразий оператора L , т. е. $X_\varepsilon^\emptyset \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$.

Заметим, что из данного определения следует, что $\{X_{\varepsilon_j}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}\}$ является многообразием, совместимым с набором периодов T_j , и

$$X_{\varepsilon_j}^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \cap X_{\varepsilon_{j'}}^{\gamma'} \begin{bmatrix} i' \\ k' \end{bmatrix} = X_{\varepsilon_j, \gamma'}^{\gamma, \gamma'} \begin{bmatrix} i, i' \\ k, k' \end{bmatrix}, \quad (9)$$

при $\{i_1, \dots, i_M\} \cap \{i'_1, \dots, i'_{M'}\} = \emptyset$, $\tilde{j} = \{j_1, \dots, j_M\} \cap \{j'_1, \dots, j'_{M'}\}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^N$ и $k = \varepsilon_i \pmod{2}$, $k' = \varepsilon_{i'} \pmod{2}$.

Перейдем к изучению свойств блоховских функций из ядра $L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu$. Далее будем обозначать символом $\psi_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(\mu, m)$ для общего $\mu \in X_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ вектор из $W_\varepsilon^M(\mu)$, такой, что $\ker L_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}_\mu = \langle \psi_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(\mu, \cdot) \rangle$, и в выражении $\psi_\varepsilon^\gamma \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}(m)$ всегда $m \in \Gamma_{1-\varepsilon}^M$.

Отметим, что $\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma \in \ker L_\varepsilon^\gamma [i]_\mu$ определен с точностью до умножения на константу, но отношение $\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(m)/\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(m')$ является корректно определенной мероморфной функцией на $X_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma$. Исследуем поведение этой функции в окрестности $X_\varepsilon^\gamma [i, p]_\gamma$. Для этого нам понадобится следующая формула:

$$\frac{\partial R_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma}{\partial a(\zeta; n)} \bigg/ \frac{\partial R_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma}{\partial a(\xi; n)} = \frac{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(n_j + \zeta_j)}{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(n_j + \xi_j)}, \quad (10)$$

где $n_i = k$, $\zeta_i = \xi_i = \gamma$, $n_j \in \Gamma_\varepsilon^M$, которая является непосредственным следствием структуры матрицы $\mathbf{M}_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma$. Обозначим символом $W_R^\gamma [i]_\gamma$ множество операторов L , таких, что

$$\frac{\partial R_\varepsilon^{\gamma, \gamma'} [i, r]_{[k, p]}}{\partial a(\xi; n)} \bigg|_{X_\varepsilon^{\gamma, \gamma'} [i, r]_{[k, p]}} \neq 0$$

при любых $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^N$, $r, p, \gamma' \in \mathbb{Z}$ и $\xi_i = \gamma$, $\xi_r = \gamma'$, $n_i = k$, $n_j \in \Gamma_\varepsilon^M$, символом $U_R^\gamma [i]_\gamma$ — множество операторов L , таких, что

$$\frac{\partial R_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(j)}{\partial a(\xi; n)} \mu_q^{\bar{\gamma} + \delta_{1-2\varepsilon} T'_{i, r}} \bigg|_{X_\varepsilon^{\gamma, \bar{\gamma}} [i, z]_{[k, p]}} \neq 0,$$

где $j_q = r$, $T'_{i, r} = (T'_r)^{-1} \prod_{a=1}^M T'_{j_a}$, $\xi_r = -\bar{\gamma}$, $\xi_i = \gamma$, $n_i = k$, $n_j \in \Gamma_\varepsilon^M$ при любых $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^N$, $z, r, p, \bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$, таких, что либо $z = r$, либо $p \neq m_r$, а символом $U_{tr}^\gamma [i]_\gamma$ — множество операторов L , таких, что при любых $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^N$, $r \in \mathbb{Z}$ выполнено следующее условие: $X_\varepsilon^\gamma [i, p]_\gamma = X_\varepsilon^\gamma [i, p']_\gamma$ тогда и только тогда, когда $p = p' \pmod{2T'_r}$. Введенные множества $U_R^\gamma [i]_\gamma$, $W_R^\gamma [i]_\gamma$, $U_{tr}^\gamma [i]_\gamma$ являются открытыми по Зарискому, и их непустота будет доказана в лемме 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для $L \in U_{sm}^\gamma [i]_\gamma \cap U_R^\gamma [i]_\gamma \cap W_R^\gamma [i]_\gamma \cap U_{tr}^\gamma [i]_\gamma$ выполняются следующие соотношения:

$$\left(\frac{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(m^1)}{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(m^0)} \right) = \mathcal{D}_{m^1}^\gamma [i]_\gamma - \mathcal{D}_{m^0}^\gamma [i]_\gamma - Q^\gamma [i]_\gamma [m^1]_{m^0} + Q^\gamma [i]_\gamma [m^0]_{m^1}, \quad (11)$$

$$Q^\gamma [i]_\gamma [m^1]_{m^0} = \sum_{r=1}^M \sum_{p=(m_r^1 - \varepsilon'_r)/2}^{(m_r^1 - \varepsilon'_r)/2 - 1} (X_\varepsilon^{\gamma, 1} [i, j_r]_{[k, 2p + \varepsilon_r]} - X_\varepsilon^{\gamma, -1} [i, j_r]_{[k, 2p + \varepsilon_r]}), \quad (12)$$

где $m, m^0, m^1 \in \Gamma_{\varepsilon'}^M$,

$$\mathcal{D}_m^\gamma [i]_\gamma = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \max_{0 \leq p < T'_j} \text{ord}_{\mathcal{C}} \left(\frac{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(m)}{\psi_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma(\varepsilon' + 2p)} \right),$$

причем суммирование идет по всем конечным дивизорам $\mathcal{C} \subset X_\varepsilon^\gamma [i]_\gamma$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_M)$ и $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$.

Напомним, что дивизор $\mathcal{C}$ конечен тогда и только тогда когда он не имеет неприводимых компонент на бесконечности, т. е. $\dim X_{\infty, \varepsilon}^\gamma [i]_\gamma \cap \mathcal{C} < M - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теперь нетрудно видеть, что утверждение предложения эквивалентно выполнению следующей формулы:

$$\text{ord}_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]} \frac{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m + 2\bar{\gamma}e_d)}{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m)} = -\delta_{j_d}^r \delta_{m_r + \bar{\gamma}},$$

где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_M)$, $j_s = r$ при произвольных $\bar{\gamma}, r, p, d \in \mathbb{Z}$ и $\gamma' = (\gamma, \bar{\gamma})$.

Пусть $\zeta = \xi + 2\bar{\gamma}e_d$, $\xi_d = -\bar{\gamma}$, $n_i = k$, $\xi_i = \gamma$, $n_j = m - \xi$.

Рассмотрим сначала случай $j_d \neq t$. Перепишем формулу (10) с помощью (7) с учетом того, что $L \in U_{tr}^{\gamma}[i]$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m + 2\bar{\gamma}e_d)}{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m)} \right|_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]} &= \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\zeta; n)} \Big/ \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\xi; n)} \Big|_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]} \\ &= \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]}{\partial a(\zeta; n)} \Big/ \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]}{\partial a(\xi; n)} \Big|_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]} \end{aligned} \quad (13)$$

при $\xi_r = \zeta_r = \bar{\gamma}$. Теперь утверждение очевидным образом следует из определения $W_{R[k]}^{\gamma}$.

Рассмотрим далее случай $r = j_d$. Докажем утверждение в случае $\varepsilon_r = 1$, $\bar{\gamma} = -1$, $j_1 = r$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично). Так как $L \in U_{tr}^{\gamma}[i]$, то существует $q \neq 1$, такое, что $\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]/\partial \mu_q \neq 0$; следовательно, $\mu_1, \dots, \mu_{q-1}, \mu_{q+1}, \dots, \mu_M$ являются координатами на $X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]$ в окрестности $X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]$ и в этих координатах $X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]$ задается уравнением $\mu_1 = 0$. Используя формулы (10) и (7), выпишем разложение в терминах этих координат:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m + 2\bar{\gamma}e_d)}{\psi_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i](m)} &= \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\zeta; n)} \Big/ \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\xi; n)} \\ &= \left(\frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\xi; n)} \mu_1^{-1} \right)^{-1} \mu_1^{-1} \left(\frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]}{\partial a(\zeta; n)} (R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r, -1])^{-1} \prod_{s=0}^{T_r'-1} R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, s] + \mu_1 Q(\mu) \right), \end{aligned}$$

где

$$\text{ord}_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[i, r]} Q(\mu) = \text{ord}_{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i, p]} \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma}[i]}{\partial a(\zeta; n)} \mu_1^{-1} = 0.$$

Элементарным анализом полученной формулы в окрестности $\mu_1 = 0$ получаем утверждение предложения. $\square$

Заметим, что из соотношения (13) следует равенство

$$\frac{\psi_{\varepsilon_j}^{\gamma}[i](n'_j)}{\psi_{\varepsilon_j}^{\gamma}[i](n_j)} = \frac{\psi_{\varepsilon}(n')}{\psi_{\varepsilon}(n)} \Big|_{X_{\varepsilon_j}^{\gamma}[i]}, \quad (14)$$

а из (12) и (9), (11) следуют равенства

$$Q^{\gamma}[i] \begin{bmatrix} n'_j \\ n_j \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} n' \\ n \end{bmatrix} X_{\varepsilon_j}^{\gamma}[i], \quad (15)$$

$$\mathcal{D}_{n_j}^{\gamma}[i] = \mathcal{D}_n X_{\varepsilon_j}^{\gamma}[i], \quad (16)$$

где $n_i = k + \gamma$, $n, n' \in \Gamma_{1-\varepsilon}^N$. Наличие индуктивной структуры спектральных данных фактически заключается в этих трех формулах, которые связывают спектральные данные и собственную функцию оператора L со спектральными данными и собственной функцией оператора $L^\gamma[k]$.

Введем еще одно обозначение: $\Delta_\varepsilon^\gamma[k](m, m')$ для алгебраического дополнения к $M_\varepsilon^\gamma[k]_{u,w}$, где $u = 1 + \sum_{b=1}^M m_b \prod_{t=b+1}^M T'_{j_t}$ и $w = 1 + \sum_{b=1}^M m'_b \prod_{t=b+1}^M T'_{j_t}$, $0 \leq m, m' < T'_j$. Определим следующий дивизор на $X_\varepsilon^\gamma[k]$:

$$\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma[k] = \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \min_{0 \leq m, m' < T'_j} (\text{ord}_{\mathcal{C}} \Delta_\varepsilon^\gamma[k](m, m')),$$

где суммирование идет по всем конечным дивизорам $\mathcal{C} \subset X_\varepsilon^\gamma[k]$.

Теперь введем следующий важный дифференциал на $X_\varepsilon^\gamma[k]$:

$$\Omega_{\varepsilon; n; \zeta}^\gamma[k] = \left(\frac{\partial R_\varepsilon^\gamma[k]}{\partial \hat{\mu}_r} \right)^{-1} \frac{\partial R_\varepsilon^\gamma[k]}{\partial a(\zeta; n)} \frac{\Lambda_{p \neq r} d\hat{\mu}_p}{\prod_{p=1}^M \hat{\mu}_p},$$

$$\gamma = \zeta_i, n_i = k, n_j \in \Gamma_\varepsilon^M, \hat{\mu}_r = \mu_r^{1-2\varepsilon_{j_r}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $L \in U_R^\gamma[k] \cap W_R^\gamma[k] \cap U_{ir}^\gamma[k] \cap U_{sm}^\gamma[k] \cap U_{tr}^\gamma[k]$ выполняется равенство

$$(\Omega_{\varepsilon; n; \zeta}^\gamma[k]) = \mathcal{E}_\varepsilon^\gamma[k] + \mathcal{D}_{n_j + \zeta_j}^\gamma[k] + \sigma(\mathcal{D}_{n_j}^{-\gamma}[k + \gamma]) - \sum_{r=1}^M X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma, \zeta_{j_r}}[k, n_{j_r}],$$

$$\text{где } \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарным манипулированием с разложениями в ряды Лорана в окрестности $X_\varepsilon^{\infty, \gamma}[k]$ (аналогичным проведенному в предложении 1) получаем

$$(\Omega_{\varepsilon; n; \zeta}^\gamma[k]) \sim - \sum_{r=1}^M X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma, \zeta_{j_r}}[k, n_{j_r}] + \tilde{\mathcal{D}},$$

где $\tilde{\mathcal{D}} > 0$ — эффективный конечный дивизор.

Вычислим $\text{ord}_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{D}} - \mathcal{D}_{n_j + \zeta_j}^\gamma[k] - \sigma(\mathcal{D}_{n_j}^{-\gamma}[k + \gamma]))$, где $\mathcal{C} \subset X_\varepsilon^\gamma[k]$ — конечный дивизор. Проведем рассуждения для $\varepsilon = 0$, $\zeta = 1$ (в оставшихся случаях рассуждения аналогичны). В силу T_j -периодичности можно без ограничения общности считать, что $0 \leq n_j < 2T'_j$. Из структуры матрицы $M_\varepsilon^\gamma[k]$ следует равенство $\partial R_\varepsilon^\gamma[k] / \partial a(\zeta; n) = \mu^\kappa \Delta(n_j/2, n_j/2)$, где $\kappa \in \mathbb{Z}^M$. Таким образом, в силу голоморфности дифференциала $(\partial R_\varepsilon^\gamma[k] / \partial \hat{\mu})^{-1} \prod_{p \neq r} d\hat{\mu}_p$ на $X_\varepsilon^{\text{aff}, \gamma}[k]$ и формулы (5) имеем

$$\begin{aligned} \text{ord}_{\mathcal{C}} \tilde{\mathcal{D}} &= \min_{m'', m'} \text{ord}_{\mathcal{C}} \left(\frac{\psi^\gamma[k](2m' + 1)}{\psi^\gamma[k](2m + 1)} \frac{\psi^\gamma[k](2m'' + 1)}{\psi^\gamma[k](2m + 1)} \Delta_\varepsilon^\gamma[k](m, m) \right) \\ &= \min_{m'', m'} \text{ord}_{\mathcal{C}} \left(\frac{\Delta_\varepsilon^\gamma[k](m'', m')}{\Delta_\varepsilon^\gamma[k](m'', m)} \frac{\Delta_\varepsilon^\gamma[k](m'', m)}{\Delta_\varepsilon^\gamma[k](m, m)} \Delta_\varepsilon^\gamma[k](m, m) \right) = \text{ord}_{\mathcal{C}} \mathcal{E}_\varepsilon^\gamma[k], \end{aligned}$$

где $2m = n_j$. □

Символом $U_E^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$ мы будем обозначать открытое по Зарисскому множество операторов $L \in U_{sm}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \cap U_{ir}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] \cap W_R^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right]$, для которых выполнено условие $\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ для всех ε .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для введенных дифференциалов имеет место формула, аналогичная формуле (14):

$$P.R._{X_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma, \zeta_{j_r}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_r \\ k, n_{j_r} \end{smallmatrix} \right]} \Omega_{\varepsilon; n; \zeta}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] = \Omega_{\tilde{\varepsilon}; n; \zeta}^{\gamma, \zeta_{j_r}} \left[\begin{smallmatrix} i, j_r \\ k, n_{j_r} \end{smallmatrix} \right],$$

где $P.R.$ — обозначение для вычета Пуанкаре (см. [19]). Эта формула отражает наличие индуктивной структуры изучаемой спектральной задачи. $\square$

Введем определение данных, совместимых с набором периодов T . Пусть $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N\}$ — набор многообразий, совместимых с набором периодов T , и на этом наборе многообразий имеется набор дивизоров $\mathcal{D}_n$, $n \in \mathbb{Z}^N$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n+T_r e_r}, \quad (17)$$

$$\mathcal{K}_{X_\varepsilon} \sim \mathcal{D}_{n+\zeta} + \sigma(\mathcal{D}_n) - \sum_{r=1}^N X_{\tilde{\varepsilon}}^{\zeta_r} \left[\begin{smallmatrix} r \\ n_r \end{smallmatrix} \right], \quad (18)$$

$$\mathcal{D}_{n^1} - \mathcal{D}_{n^0} - Q \left[\begin{smallmatrix} n^1 \\ n^0 \end{smallmatrix} \right] + Q \left[\begin{smallmatrix} n^0 \\ n^1 \end{smallmatrix} \right] \sim 0, \quad (19)$$

где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_N)$, при всех $n^0, n^1 \in \Gamma_\varepsilon^N$, $n, \zeta, \varepsilon \in \mathbb{Z}^N$, $r = 1, \dots, N$ (здесь использована формула (12) при $j = (1, \dots, N)$). Такой набор $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N, \mathcal{D}_n\}$ мы будем называть *набором данных, совместимых с набором периодов T* . Множество наборов данных, совместимых с набором периодов T , будем обозначать через $\mathfrak{M}_T$.

Если рассматривать систему соотношений (17)–(19) как соотношения между дивизорами, то очевидно, что эта система избыточна, из нее может быть исключено соотношение (19) и все дивизоры $\mathcal{D}_n$ будут выражаться через дивизоры $\mathcal{D}_\varepsilon$, $\varepsilon_h = 0$, которые, в свою очередь, удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{K}_{X_\varepsilon} \sim \mathcal{D}_{\varepsilon'} + \sigma(\mathcal{D}_\varepsilon) - \sum_{r=1}^N X_{\tilde{\varepsilon}}^1 \left[\begin{smallmatrix} r \\ \varepsilon_r \end{smallmatrix} \right] + \sum_{r=1}^{N-S} \sum_{p=0}^{(T_{h_r}-1)/2} (X_{\tilde{\varepsilon}'}^1 \left[\begin{smallmatrix} h_r \\ 2p+1 \end{smallmatrix} \right] - X_{\tilde{\varepsilon}'}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} h_r \\ 2p+1 \end{smallmatrix} \right]), \quad (20)$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon - Q \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon+2n \end{smallmatrix} \right] + Q \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon+2n \\ \varepsilon \end{smallmatrix} \right] > 0, \quad 0 \leq n < T', \quad (21)$$

где $\varepsilon_l + \varepsilon'_l = 1$, $\varepsilon_h = \varepsilon'_h = 0$, $\varepsilon' = 1 - \tilde{\varepsilon}$ и предполагается, что $j = (1, \dots, N)$. Следовательно, если мы хотим рассматривать $\mathfrak{M}_T$ как *пространство спектральных данных прямой спектральной задачи*, то элементы $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_T$ следует интерпретировать как наборы $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N, \mathcal{D}_\varepsilon\}$, $\varepsilon_h = 0$, где $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N\}$ совместим с набором периодов T , а для $\mathcal{D}_\varepsilon$ верны соотношения (20), (21). Отметим, что пространство спектральных данных для многомерной задачи имеет описание, сходное с описанием спектральных данных для двумерных задач [6, 8]; единственным отличием является условие (21), которое в двумерном случае выполнено автоматически в силу теоремы Римана–Роха, но в многомерном случае это условие является сильным ограничением на $\mathcal{D}_\varepsilon$ и на X_ε .

Следующее предложение формализует утверждение о наличии индуктивной структуры на спектральных данных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\{X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^N, \mathcal{D}_\varepsilon\} \in \mathfrak{M}_T$, то $\{X_\varepsilon^\gamma[k] \subset (\mathbb{CP}^1)_{\mu_j}^M, \mathcal{D}_{\varepsilon_j}^\gamma[k]\} \in \mathfrak{M}_{T_j}$ (т.е. $\{X_\varepsilon^\gamma[k] \subset (\mathbb{CP}^1)_{\mu_j}^M, \mathcal{D}_{\varepsilon_j}^\gamma[k]\}$ являются спектральными данными T_j -периодической спектральной задачи), где $\mathcal{D}_{n_j}^\gamma[k]$ определено формулой (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $\{X_\varepsilon^\gamma[p] \subset (\mathbb{CP}^1)_\mu^{N-1}, \mathcal{D}_{\varepsilon,m}^\gamma[p]\} \in \mathfrak{M}_{\bar{T}}$, $\bar{T} = (T_1, \dots, T_{r-1}, T_{r+1}, \dots, T_N)$. Для доказательства этого факта заметим, что по формуле присоединения (см. [19]) $\mathcal{K}_{X_\varepsilon^\gamma[p]} \sim (\mathcal{K}_{X_\varepsilon} + X_\varepsilon^\gamma[p])X_\varepsilon^\gamma[p]$; при $n_r = p + \bar{\gamma}$, $\zeta_r = -\bar{\gamma}$, подставляя (18) для T -периодической задачи в эту формулу и используя (16), (9), получаем выполнение условия (18) для T' -периодической задачи. Выполнение условия (19) тривиально следует из (15), (9). $\square$

На пространстве операторов L действует калибровочная группа. Для любой T -периодической функции $g \in V(1)$, $g(n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}^N$, определено отображение $F_g: F_g(L) = L'$, $a'(n, \zeta) = g(n)g(n + \zeta)a(n, \zeta)$. Фактор пространства операторов L по действию калибровочной группы будем обозначать через $\mathfrak{L}_T$; образы открытых множеств U_{sm} , U_{ir} , W_R , U_R , U_E , U_{tr} при такой факторизации будем обозначать теми же символами. Пусть $\mathfrak{U} = \bigcap_{i,k,\gamma} (U_{sm}^\gamma[k] \cap U_{ir}^\gamma[k] \cap W_R^\gamma[k] \cap U_R^\gamma[k] \cap U_E^\gamma[k] \cap U_{tr}^\gamma[k])$; тогда, как следует из доказанной последовательности лемм, на множестве $\mathfrak{U}$ определено отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_T \rightarrow \mathfrak{M}_T$, являющееся прямой задачей рассеяния. В следующем параграфе будет доказана плотность множества $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{L}_T$ и найдено обратное к $\mathfrak{D}$ отображение $\mathfrak{I}$.

§3. Обратная задача

В двумерном случае метод решения обратной задачи рассеяния (в нашем случае решение обратной задачи рассеяния эквивалентно построению отображения $\mathfrak{I}$) был предложен Кричевером в работе [6]. Мы используем результаты работы [6] для доказательства плотности множества $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{L}_T$, а также для доказательства обратимости отображения $\mathfrak{D}$.

ЛЕММА 2. Пусть $N = 2$ и $h_\varepsilon[n'] = H^0(X_\varepsilon, \mathcal{O}(Q[n'] + \mathcal{D}_{n'}))$; тогда $\mathfrak{M}_T \neq \emptyset$ и для общего представителя $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_T$

$$\dim h_\varepsilon[n'] = 1. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберем случай, когда T_1, T_2 четны. В этом случае спектральные данные состоят из кривых $X_{0,0}$, $X_{0,1}$, $\sigma(X_{0,0})$, $\sigma(X_{0,1})$ и дивизоров $\mathcal{D}_\varepsilon$. При этом $X_{0,0}$, $X_{0,1}$ являются кривыми степени (T'_1, T'_2) , определяемыми уравнениями с общими коэффициентами, а следовательно, $X_{0,0}$, $X_{0,1}$ — гладкие кривые рода $(T'_1 - 1)(T'_2 - 1)$. Из (18) следует, что $|\mathcal{D}_n| = (T'_1 - 1)(T'_2 - 1)$. Выберем $m_e \in \Gamma_{1,1-e}^2$, $e = 0, 1$; тогда соотношения (18), (19) позволяют выразить все $\mathcal{D}_n$ через $\mathcal{D}_{m_e}$. Более того, если мы выберем два общих положительных дивизора $\mathcal{D}_{m_e}$ степени $(T'_1 - 1)(T'_2 - 1)$, то в силу равенства $|Q_\varepsilon[n_0^1]| = |Q_\varepsilon[n_0^1]| = 0$ и теоремы Римана–Роха имеем $\dim h_{0,e}[n_e] = 1$, и по теореме Якоби (см. [19]) для $\mathcal{D}_{m_e}$ существуют и единственны такие положительные дивизоры $\mathcal{D}_n$, для которых выполнены условия (18), (19). Так как $\mathcal{D}_{m_e}$ выбраны общими, то по теореме Римана–Роха выполняется равенство (22). Оставшиеся случаи разбираются аналогично. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N = 2$; тогда множество $\mathfrak{U}$ плотно в $\mathfrak{L}_T$ и отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_T \rightarrow \mathfrak{M}_T$ обратимо на некотором всюду плотном множестве. Отображение $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^{-1}$ может быть описано с помощью θ -функций кривых X_ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберемся сначала со случаем, когда T_1, T_2 четны. Выберем $m_e \in \Gamma_{1,1-e}$, $e = 0, 1$. Выберем T -блоховские функции $\psi(n)$ так, чтобы выполнялось (11). По набору функций $\varphi_{0,e} = \psi_{0,e}(n)/\psi_{0,e}(m_e) \in h_{0,e}[\frac{n}{m_e}]$ способом, изложенным в [6], строим оператор $\tilde{L}_{0,e}$, действующий на $V_{1,1-e}$, $\tilde{L}_{0,e}\varphi_{0,e} = \sum_{(\zeta_1, \zeta_2)} \tilde{a}(n, \zeta)\varphi_{0,e}(n + \zeta)$, такой, что $\tilde{L}_{0,e}\varphi_{0,e} = 0$. Оператор $\tilde{L}_{0,e}$ определяется функциями $\varphi_{0,e}$ неоднозначно. Действительно, оператор $\tilde{L}'_{0,e}$ с коэффициентами $\tilde{a}'(n, \zeta) = \tilde{a}(n, \zeta)C(n)$, где $C(n)$ — произвольные константы, также удовлетворяет уравнению $\tilde{L}'_{0,e}\varphi_{0,e} = 0$. Теперь если мы положим $\tilde{a}(n, \zeta) = \tilde{a}(n + \zeta, -\zeta)$ для $n \in \Gamma_{1,1-e}^2$, $e = 0, 1$, то получим оператор $\tilde{L}$, действующий на V . Фиксируем $n_e \in \Gamma_{0,e}^2$, $e = 0, 1$. В силу предложения 1 и леммы 2 для собственной функции $\varphi_{1,1-e}$, $e = 0, 1$, $\tilde{L}\varphi_{1,1-e} = 0$, выполняется равенство

$$\frac{\varphi_{1,1-e}(n)}{\varphi_{1,1-e}(n_e)} = \hat{C}(n) \frac{\psi_{1,1-e}(n)}{\psi_{1,1-e}(n_e)},$$

где $\hat{C}(n)$ — некоторые константы. Положив $a(n, \zeta) = \tilde{a}(n, \zeta)\hat{C}(n)$, $n \in \Gamma_{0,e}^2$, получим оператор L , такой, что $L\psi = 0$. Произвол в выборе функций $\psi(n)$ при построении оператора L со свойством $L\psi = 0$ отвечает действию калибровочной группы. Таким образом, мы получили корректно определенное отображение $\mathfrak{I}: \mathfrak{M}_T \rightarrow L_T$. При этом из предыдущих рассуждений следует, что существует единственный оператор L , нормированный условием $a(m_0; 1, 1) = a(m_1; 1, 1) = 1$ и удовлетворяющий условию $L\psi = 0$. Таким образом, $\mathfrak{I}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{I} = \text{id}$. Так как для общего $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_T$ имеет место включение $\mathfrak{I}(\mathfrak{m}) \in \mathfrak{U}$, то $\mathfrak{U} \neq \emptyset$.

Построение $\mathfrak{I}$ в оставшихся случаях проводится аналогично. Единственное отличие от уже разобранных случаев заключается в том, что если T_1 нечетен, а T_2 четен, то ψ удовлетворяет соотношению (11) и $\psi_{0,\varepsilon}(n) = \psi_{1,\varepsilon}(n + T_1 e_1)$, $\varepsilon = 0, 1$, а если T_1 и T_2 нечетны, то ψ удовлетворяет соотношению (11) и $\psi_{0,0}(n) = \psi_{0,1}(n + T_2 e_2) = \psi_{1,0}(n + T_1 e_1) = \psi_{1,1}(n + T_1 e_1 + T_2 e_2)$. $\square$

Теперь докажем плотность множества $\mathfrak{U}$ в случае произвольной размерности N . Мы будем доказывать это индукцией по N . Можно считать, что спектральные многообразия всех операторов L лежат в одном $(\mathbb{CP}^1)^N$. Тогда, если мы обозначим символом $X_\varepsilon(L)$ спектральное многообразие оператора L , то верен следующий факт:

ЛЕММА 3. Для произвольного $\varepsilon \in \mathbb{Z}^N$ справедливо соотношение $\bigcap_L X_\varepsilon(L) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить индукцией по N .

Фиксируем произвольные числа $1 \leq r \leq N$, $k \in \mathbb{Z}$, $\kappa \in \mathbb{C}^*$ и заметим, что если нам даны два оператора L и L' , такие, что $a(n; \zeta) = a'(n; \zeta)$ при $n_r \neq k \pmod{T_r}$ и $a(n; \zeta) = \kappa a'(n; \zeta)$ при $n_r = k \pmod{T_r}$, то

$$(\mu_1, \dots, \mu_r, \dots, \mu_N) \in X_\varepsilon^{\text{aff}}(L') \iff (\mu_1, \dots, \kappa\mu_r, \dots, \mu_N) \in X_\varepsilon^{\text{aff}}(L).$$

Значит, если $\mu \in \bigcap_L X_\varepsilon(L)$, то $\tilde{\mu} = (\mu_1, \dots, \kappa\mu_r, \dots, \mu_N) \in \bigcap_L X_\varepsilon^{\text{aff}}(L)$ для произвольных r, κ . Таким образом, получаем, что если $\mu \in \bigcap_L X_\varepsilon(L)$, то $\mu \in \bigcap_L X_\varepsilon^\infty(L)$.

Далее мы можем применить предположение индукции, так как $X_\varepsilon^\infty(L)$ является объединением спектральных многообразий операторов $L_\varepsilon^\gamma[r]$. $\square$

ЛЕММА 4. *При любом N множество $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{L}_T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как рассматриваемое множество является пересечением открытых по Зарисскому множеств, то достаточно доказать непустоту множеств $U_{sm}, U_{ir}, W_R, U_E, U_{tr}$.

Тот факт, что $U_{tr} \neq \emptyset$, немедленно следует из леммы 3.

Докажем, что $U_R \neq \emptyset$. Будем доказывать это индукцией по N . Пусть это не так, т.е. существуют $r, \bar{\gamma} \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^N$, ζ , такие, что

$$F = \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial a(n; \zeta)} \mu_r^{\bar{\gamma} + \delta_{1-2\varepsilon_{j_r}} Q_{j_r}}, \quad F|_{X_\varepsilon^\gamma[r]} \equiv 0, \quad (23)$$

где $Q_{j_r} = (T'_{j_r})^{-1} \prod_{a=1}^N T'_a$. Пусть $s \neq r$; тогда

$$F|_{X_\varepsilon^{\gamma'}[n_s]} = \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[n_s]}{\partial a(n; \zeta)} \mu_r^{\bar{\gamma} + v} = \frac{\partial R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[n_s]}{\partial a(n; \zeta)} \mu_r^{v' + \bar{\gamma}} \prod_{p \neq n_s} (R_{\tilde{\varepsilon}}^{\gamma'}[p] \mu_r^{v'}), \quad (24)$$

где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N)$, $\gamma' = \zeta_s$, $v = \delta_{1-2\varepsilon_{j_r}} Q_{j_r}$, $v' = \delta_{1-2\varepsilon_{j_r}} Q_{j_r, j_s}$, $Q_{j_r, j_s} = Q_{j_r} / T'_{j_s}$. Так как для общего L справедливо включение $L \in U_{tr}$, то из (23) и (24) следует, что

$$\frac{\partial R_{\varepsilon'}^{\gamma'}[n_s]}{\partial a(n; \zeta)} \mu_r^{v' + \bar{\gamma}}|_{X_{\varepsilon'}^{\gamma', \bar{\gamma}}[n_s, r]} \equiv 0,$$

где $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_{s-1}, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_N)$, а это противоречит предположению индукции. Тот факт, что $W_R \neq \emptyset$, доказывается аналогично.

Докажем, что $U_{sm} \neq \emptyset$. Действительно, полиномы R_ε линейно зависят от коэффициентов $a(n, \zeta)$, т.е. X_ε образуют линейную систему дивизоров на $(\mathbb{CP}^1)^N$. Теорема Бертини о линейных системах дивизоров утверждает, что общий член линейной системы не имеет особых точек вне базисного множества, т.е. если $z \in \text{Sing } X_\varepsilon$ для общего L , то $z \in X_\varepsilon(L)$ для всех L . Таким образом, лемма 3 завершает доказательство того, что $U_{sm} \neq \emptyset$.

Докажем, что $U_E \neq \emptyset$, индукцией по N . Если $U_E = \emptyset$ (т.е. $\mathcal{E}_\varepsilon \neq 0$ для общего оператора L_ε), то из элементарной теории пересечения следует, что существуют $\gamma, t, u \in \mathbb{Z}$, такие, что $\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma[t] = \mathcal{E} \cap X_\varepsilon^\gamma[t] \neq 0$; следовательно, $U_E^\gamma[u] = \emptyset$, а это противоречит предположению индукции.

Если многообразие $X_\varepsilon \subset (\mathbb{CP}^1)^N$ приводимо и неособо, то $X_\varepsilon = X'_\varepsilon \cup X''_\varepsilon$, $X'_\varepsilon \cap X''_\varepsilon = \emptyset$, а следовательно, X'_ε и X''_ε должны иметь степени $(a'_1, \dots, a'_N)$, $(a''_1, \dots, a''_N)$, такие, что $a'_r a''_r = 0$, $r = 1, \dots, N$. Точно так же, как и раньше, индукцией по размерности доказывается невозможность такого распада для компонент модифицированного спектрального многообразия общего оператора L . $\square$

Таким образом, мы показали, что $\mathfrak{D}$ определено на плотном открытом подмножестве пространства $\mathfrak{L}_T$. Введем обозначение $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_T) = \mathfrak{M}'_T \subset \mathfrak{M}_T$.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\mathfrak{D}: \mathfrak{L}_T \rightarrow \mathfrak{M}'_T$ обратимо на некотором всюду плотном множестве. Отображение $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^{-1}$ может быть описано с помощью θ -функций кривых $X_\varepsilon[i]$, $i, k \in \mathbb{Z}^{N-2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3 мы можем проводить построение отображения $\mathfrak{J}$ по индукции. Таким образом, предположим, что для размерностей меньше N отображение $\mathfrak{J}$ уже построено, и, исходя из этого, построим отображение $\mathfrak{J}$ в размерности N .

Заметим, что для собственной функции ψ , $L\psi = 0$, имеет место равенство

$$a(n; -1, \gamma) \psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, 3, \dots, N \\ k_1, k_2, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 - 1) + a(n; 1, \gamma) \psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, 3, \dots, N \\ k_1, k_2, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 1) = 0.$$

Выполнение этих равенств при всех $n \in \mathbb{Z}^N$ эквивалентно выполнению следующих равенств:

$$\frac{a(n; 1, \gamma)}{a(n_1 + 2, \tilde{n}; 1, \gamma)} = \frac{\psi^{-\gamma} \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 2)}{\psi^{-\gamma} \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1)} \frac{\psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 3)}{\psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 1)}, \quad (25)$$

$$\frac{a(n; -1, \gamma)}{a(n_1 + 2, \tilde{n}; -1, \gamma)} = \frac{\psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 1)}{\psi^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 - 1)} \frac{\psi^{-\gamma} \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1 + 2)}{\psi^{-\gamma} \left[\begin{smallmatrix} 2, \dots, N \\ k_1, \dots, k_{N-1} \end{smallmatrix} \right] (n_1)} \quad (26)$$

при всех $n \in \mathbb{Z}^N$; в этих формулах $\tilde{n} = (n_2, \dots, n_N)$.

Теперь выберем мероморфные на X_ε функции $\psi_\varepsilon(n)$ так, чтобы выполнялись равенства (11) и $\psi_\varepsilon(n) = \psi_{\varepsilon+e_{h_r}}(n + T'_{h_r} e_r)$, где $\varepsilon_h = 0$, $r = 1, \dots, N - S$, $n \in \Gamma_{1-\varepsilon}^N$, а $\psi(n)$ суть T' -блоховские функции с множителями Флоке μ . С помощью функций $\psi^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$, $\psi^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$, определяемых формулой (14), по предположению индукции мы можем построить операторы $M_0 \psi^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0$, $M_1 \psi^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = 0$. Пусть коэффициенты оператора M_e , $e = 0, 1$, равны $a_e(k, \zeta)$, $\zeta, k \in \mathbb{Z}^{N-1}$, $\zeta_r = \pm 1$, $r = 1, \dots, N - 1$. Формулы (25), (26) позволяют выразить коэффициенты $a(2s + 1, \tilde{n}; \gamma)$ через коэффициенты $a(1, \tilde{n}; \gamma)$. Таким образом, (25), (26) вместе с равенством $a(1, k; 1 - 2e, \tilde{\gamma}) = a_e(k; \tilde{\gamma})$, $e = 0, 1$, дают нам отображение $\mathfrak{J}$, причем произвол в выборе ψ отвечает действию калибровочной группы. Следовательно, $\mathfrak{J}$ является корректно определенным отображением из $\mathfrak{M}_T$ в $\mathfrak{L}_T$ и по построению $\mathfrak{J}\mathfrak{D} = \text{id}$.

Заметим, что дроби, присутствующие в формулах (25), (26), могут быть выражены в терминах θ -функций кривых $X_\varepsilon \left[\begin{smallmatrix} 3, 4, \dots, N \\ k_1, k_2, \dots, k_{N-2} \end{smallmatrix} \right]$ (см. [6]). $\square$

Отметим, что доказательство теоремы 2 дает нам индуктивный способ построения $\mathfrak{J}$. В частности, при $N = 3$ и $h = \emptyset$ (т.е. $S = 3$) процедура решения обратной спектральной задачи выглядит так. Сначала необходимо пересечь $\mathscr{D}_\varepsilon$, $\varepsilon_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$, с кривыми $X_{\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right]$, $1 \leq t \leq T_i/2$. В результате получим дивизоры $\mathscr{F}_{\tilde{\varepsilon}}(t) = X_{\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right] \cap \mathscr{D}_\varepsilon$. Пересекая левую часть формулы (19) с $X_{\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right]$ при $n^0 = 1 - \varepsilon + 2te_3$, $n^1 = 1 - \varepsilon$ и учитывая (16) и (15), получаем связь между $\mathscr{F}_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma(t)$ и $\mathscr{D}_{1-\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right]$, которая имеет вид $\mathscr{D}_{1-\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right] \sim \mathscr{F}_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma(t) - t(T_1 \sum_{i=1}^{T_2} X_{\varepsilon_1}^{-1,1} \left[\begin{smallmatrix} 3, 2 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t, \varepsilon_2 + 2i \end{smallmatrix} \right] + T_2 \sum_{i=1}^{T_1} X_{\varepsilon_2}^{-1,1} \left[\begin{smallmatrix} 3, 1 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t, \varepsilon_1 + 2i \end{smallmatrix} \right])$. С помощью формулы (16) по дивизорам $\mathscr{D}_{1-\tilde{\varepsilon}}^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right]$ строим дивизоры $\mathscr{D}_{\tilde{\varepsilon}}^1 \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 - \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right]$.

Согласно лемме 2, $\dim H^0(X_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right], \mathscr{O}(\mathscr{D}_{1-\varepsilon}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} m^1 \\ m^0 \end{smallmatrix} \right])) = 1$, $m^0, m^1 \in \Gamma_{1-\varepsilon}^2$; выберем функции $\psi_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right] \in H^0(X_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right], \mathscr{O}(\mathscr{D}_{1-\varepsilon}^\gamma \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ \varepsilon_3 + 2t \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} m^1 \\ m^0 \end{smallmatrix} \right]))$. Произвол в выборе этих функций отвечает действию калибровочной группы. По

определению оператор $L_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$ действует из пространства $V_{1-\varepsilon}^2$ в V_{ε}^2 , а оператор $L_{1-\varepsilon}^{-\gamma}[\varepsilon_3+\gamma+2t]$ — из V_{ε}^2 в $V_{1-\varepsilon}^2$, и, согласно формуле (5), эти операторы сопряжены друг другу. Эти два оператора следует рассматривать как две части одного самосопряженного оператора $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$, действующего на пространстве $V_{\varepsilon}^2 \oplus V_{1-\varepsilon}^2$ по формуле $(\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]\psi)(m) = (L_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]\psi)(m)$, если $m \in \Gamma_{1-\varepsilon}$, и по формуле $(\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]\psi)(m) = (L_{1-\varepsilon}^{-\gamma}[\varepsilon_3+2t+\gamma]\psi)(m)$, если $m \in \Gamma_{\varepsilon}$. Заметим также, что $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t] = \widehat{L}_{1-\varepsilon}^{-\gamma}[\varepsilon_3+2t+\gamma]$ и инволюция σ отождествляет кривые $X_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$ и $X_{1-\varepsilon}^{-\gamma}[\varepsilon_3+2t+\gamma]$. Из результатов работы [6] следует, что существует единственный оператор $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$, такой, что $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]\hat{\psi}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t] = 0$, где $\hat{\psi}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t](m) = \psi_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t](m)$, если $m \in \Gamma_{1-\varepsilon}^2$, и $\hat{\psi}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t](m) = \psi_{1-\varepsilon}^{-\gamma}[\varepsilon_3+2t+\gamma](m)$, если $m \in \Gamma_{\varepsilon}^2$. Коэффициенты оператора $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$ выписываются в терминах θ -функций кривой $X_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$. Теперь нам осталось устранить произвол в выборе константы, с точностью до умножения на которую определен $\widehat{L}_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$. Это можно сделать, потребовав выполнения равенств (25), (26) (для $N = 3$). После этого оператор L определен функциями $\psi_{\varepsilon}^{\gamma}[\varepsilon_3+2t]$ однозначно с точностью до умножения на константу. Следовательно, мы восстановили оператор L из спектральных данных $\{X_{\varepsilon}, \mathcal{D}_{\varepsilon}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. Мир, М., 1980.
2. Дубровин А. Б., Кричевер И. М., Новиков С. П. Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности. ДАН СССР, **229**, №1, 15–18 (1976).
3. Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера: явные формулы и эволюционные уравнения. ДАН СССР, **279**, №1, 20–24 (1984).
4. Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы, ДАН СССР, **279**, №4, 784–788 (1984).
5. Novikov S. P., Veselov A. P. Two-dimensional Schrodinger operator: inverse scattering problem and evolutionary equations. Phys. D, **18**, 267–273 (1986).
6. Кричевер И. М. Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия. ДАН СССР, **285**, №1, 31–36 (1985).
7. Veselov A. P., Krichever I. M., Novikov S. P. Two-dimensional periodic Schrodinger operators and Prym's θ -functions. Progress in math, Vol. 60, Geometry today, 1985, pp. 283–301.
8. Обломков А. А. О разностных операторах на двумерных правильных решетках. Теор. матем. физика, **127**, №1, 34–46 (2001).
9. Oblomkov A. A., Penskoi A. V. Two-dimensional algebro-geometric operators. J. Phys. A: Math. Gen., **33**, 9255–9264 (2000).
10. Kappeler T. On isospectral potentials on discrete lattice II. Adv. Appl. Math., **9**, No. 4, 428–438 (1988).
11. Bättig D. A. A toroidal compactification of the complex Fermi surface. Comment. Math. Helv., **65**, No. 1, 144–149 (1990).
12. Knörrer H., Trubowitz E. A directional compactification of the complex Boch variety. Comment. Math. Helv., **69**, No. 1, 144–149 (1990).
13. Bättig D., Knörrer H., Trubowitz E. A directional compactification of the complex Fermi surface. Compositio Math., **79**, No. 2, 205–229 (1991).

14. Новиков С. П., Дынников И. А. Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностные операторы на правильных решетках и двумерных многообразиях. УМН, **52**, вып. 5, 175–234 (1997).
15. Новиков С. П., Дынников И. А. Преобразования Лапласа и симплициальные связности. УМН, **52**, вып. 6, 157–158 (1997).
16. Обломков А. А. О спектральных свойствах двух классов разностных периодических операторов. Матем. сб., **193**, №4, 87–112 (2002).
17. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. УМН, **31**, вып. 1, 55–136 (1976).
18. Веселов А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы. Функц. анализ и его прил., **22**, вып. 2, 1–13 (1988).
19. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. В 2-х томах. Мир, М., 1982.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый московский университет
e-mail: oblomkov@math.mit.edu

Поступило в редакцию
27 ноября 2000 г.