Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Т. Батикян, О точках ветвления спектра алгебраического расширения равномерной алгебры, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 09:07:51

$V_3 \cong M_2(\mathbb{R})_s$, $V_4 \cong M_2(\mathbb{C})_s$ либо $V_6 \cong M_2(\mathbb{Q})_s$. Известно [9, Theorem 3], что любой вещественный фактор M , кроме $\mathbb{Q}$, обладает свойством $M_k = [M_s, M_s]$, т.е. любой косоэрмитов элемент есть конечная сумма коммутаторов эрмитовых элементов. В частности, косоэрмитовы матрицы из $M_2(\mathbb{F})$ алгебраически порождаются $M_2(\mathbb{F})_s$ (где $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$). Поэтому, если обратимая JW -алгебра R_s содержит прямые слагаемые вида $L^\infty(\Omega, \mu, M_2(\mathbb{F})_s)$, то R содержит слагаемое вида $L^\infty(\Omega, \mu, M_2(\mathbb{F}))$. Но в случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}$ алгебра $M_2(\mathbb{F})$ содержит косоэрмитовы матрицы, которые не коммутируют, что противоречит условию теоремы. Поэтому $R_s = L^\infty(\Omega, \mu, M_2(\mathbb{R})_s)$.

Как мы отметили выше, R тогда содержит алгебру $R^0 = L^\infty(\Omega, \mu, M_2(\mathbb{R}))$. Покажем, что на самом деле $R = R^0$. Итак, имеем $R_s = R_s^0$. Пусть $x \in R_k$. Рассмотрим произвольный обратимый косоэрмитов элемент u из R_k^0 , например, функцию на Ω , тождественно равную матрице $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ из $M_2(\mathbb{R})$. Тогда xu является эрмитовым элементом в $R_s = R_s^0$, т.е. $x = (xu)u^{-1} \in R_s^0 R_k^0 \subset R^0$. Таким образом, $R_k = R_k^0$, т.е. $R = R_s + R_k = R^0$. Итак, мы доказали, что если R_s имеет тип I_2 , то $R = L^\infty(\Omega, \mu, M_2(\mathbb{R}))$, т.е. имеет место случай (iii). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
2. Stormer E. Pacific J. Math., **21**, No. 2, 349–370 (1967).
3. Topping D. Mem. Amer. Math. Soc., **53** (1965).
4. Li Minli, Li-Bingren. Acta Math. Sinica, **14**, No. 1, 85–90 (1998).
5. Аюпов Ш. А., Рахимов А. А., Абдуваитов А. Х. Докл. АН РУз, №5 (2001).
6. Putnam C. R. Amer. J. Math. **73**, 357–362 (1950).
7. Stacey P. J. Quart J. Math. Oxford, **33**, No. 129, 115–127 (1982).
8. Robertson A. G. Quart. J. Math. Oxford, **34**, No. 133, 87–96 (1983).
9. Ayupov Sh. A., Azamov N. A. Comm. Algebra, **24**, No. 4, 1501–1520 (1996).

Институт математики АН Республики Узбекистан
e-mails: e_ayupov@hotmail.com, ayupov@im.tashkent.su

Поступило в редакцию
7 мая 2001 г.

УДК 517.986

О точках ветвления спектра алгебраического расширения равномерной алгебры

© 2002. Б. Т. БАТИКЯН

Пусть $A[t]$ — алгебра всех полиномов над полупростой коммутативной банаховой алгеброй A с единицей над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Совокупность унитарных полиномов обозначается через $A_U[t]$. Пусть $f \in A_U[t]$,

$$f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n, \quad \deg f = n > 1.$$

Обозначим через B алгебраическое расширение алгебры A , порожденное полиномом f . Иначе говоря, $B = A[t]/(f)$, где (f) — главный идеал в $A[t]$, порожденный f .

Хорошо известно, что B является свободным A -модулем ранга n и что B естественно наделяется структурой банаховой алгебры, причем естественный гомоморфизм $\rho: A \rightarrow B$ — изометрически изоморфное вложение A в B (детали см., например, в [1, 2]). Если X есть спектр (пространство максимальных идеалов) алгебры A , то спектр алгебры B реализуется в виде

$$Y = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{C} \mid \lambda^n + a_1(x)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0\}.$$

При этом отображение $\pi: Y \rightarrow X$, двойственное к вложению $A \subset B$, является (вообще говоря, разветвленным) накрытием. Напомним, что точка $y \in Y$ — точка ветвления, если нет такой окрестности V этой точки, для которой $\pi|_V$ инъективно.

В заметке приводится алгебраическое описание точек ветвления, определяется и изучается A -индекс ветвления накрытия π . В случае равномерных алгебр дается описание характера ветвления в терминах точечных дифференцирований, причем важным оказывается, локально дифференцирование или нет (равномерная банахова алгебра, вообще говоря, обладает нелокальными непрерывными дифференцированиями: у функции, равной 0 в окрестности данной точки, «производная» может оказаться ненулевой). Нелокальное точечное дифференцирование впервые встречается в статье [3] (см. также [4, с. 74, 310]). В работе [5] предложен простой способ конструирования равномерных алгебр с нелокальными дифференцированиями.

Хотя вопросы, рассматриваемые в заметке, представляются естественными, автору не известны другие публикации на эту тему, посвященные именно *банаховым* алгебрам.

Обозначим через $\hat{B} = B/\text{Rad}(B)$ гельфандовское представление алгебры B . Заметим, что алгебра B не обязательно полупроста, но ее радикал $\text{Rad}(B)$ нильпотентен и поэтому совпадает с образом $\rho(\text{Rad}(f))$ радикала идеала (f) . В частности, гельфандовское представление элемента $\rho(t)$ является корнем каждого полинома из $\rho(\text{Rad}(f))$.

По аналогии с простыми алгебраическими расширениями полей целое число

$$m = \min\{\deg g \mid g \in \text{Rad}(f) \cap A_U[t]\}$$

будем называть *степенью* алгебраического расширения B , а каждый полином g , на котором достигается минимум, — *минимальным полиномом*.

Очевидно, что $m \leq n$. Если дискриминант полинома f — ненулевой элемент алгебры A , то $m = n$. Однако неравенство $m < n$ может иметь место и тогда, когда f неприводим над A , так что минимальный полином g , вообще говоря, не делит f . Напомним, что корангом конечного модуля называется (минимальное) число образующих этого модуля.

ТЕОРЕМА 1. *Степень алгебраического расширения B полупростой коммутативной банаховой алгебры A равна корангу A -модуля $\hat{B}$.*

В доказательстве используется известная алгебраическая процедура, позволяющая по заданной совокупности k образующих модуля $\hat{B}$ указывать в $\text{Rad}(f)$ унитарный полином степени k .

По теореме 1 A -изоморфные алгебраические расширения имеют одинаковую степень. Заметим также, что равенство $m = 1$ эквивалентно гомеоморфности отображения π .

Пусть теперь A — равномерная алгебра, и пусть $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ — произвольная точка из Y . Рассмотрим базу $(\overline{U}_i)$ замкнутых A -выпуклых окрестностей точки x_0 , и сопоставим каждому i равномерную алгебру $A_i = \overline{A|U_i}$ и ее алгебраическое расширение B_i , порожденное полиномом f . Спектр $\pi^{-1}(\overline{U}_i)$ алгебры B_i распадается в объединение не более чем n непересекающихся замкнутых подмножеств, проектирующихся на $\overline{U}_i$. Пусть $\overline{V}_i$ — то из этих подмножеств, которое содержит y_0 , B_i — соответствующее прямое слагаемое в B_i (теорема Шилова об идемпотентах) и m_i — степень расширения B_i . Поскольку включение $\overline{U}_j \subset \overline{U}_i$ влечет за собой неравенство $m_j \leq m_i$, то (m_i) — стабилизирующаяся последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $m_0 = \min\{m_i\}$ называется A -индексом ветвления накрытия π в точке y_0 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть B — алгебраическое расширение равномерной алгебры A . Тогда $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ есть точка ветвления для π в том и только в том случае, когда $m_0 > 1$. Кроме того, $s_0 \leq m_0 \leq \mu_0$, где

$$s_0 = \min_i \{\max \text{card}(\pi^{-1}(x) \cap \overline{V}_i) \mid x \in \overline{U}_i\}$$

— топологический индекс ветвления накрытия π в точке y_0 [6], а μ_0 — кратность корня λ_0 числового уравнения

$$\lambda^n + a_1(x_0)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(x_0) = 0,$$

и индекс m_0 инвариантен относительно A -автоморфизмов алгебры B .

Доказательство основано на приводимости полинома f (в случае $\mu_0 < n$) над одной из алгебр A_i и теореме 1.

ПРИМЕР. Пусть $A(\Delta)$ — стандартная алгебра непрерывных функций на единичном круге Δ , которые голоморфны внутри Δ . Рассмотрим равномерную алгебру $A = \{a(z) \in A(\Delta) \mid a'(0) = 0\}$ и ее алгебраическое расширение B , порожденное неприводимым над A полиномом

$$f = t^4 - 6z^2t^2 + 8z^3t - 3z^4 = (t - z)^3(t + 3z).$$

Точка $y_0 = (0, 0)$ — единственная точка ветвления спектра алгебры B . Ясно, что $s_0 = 2$, а $\mu_0 = 4$. Полином $g = t^3 - 7z^2t + 6z^3$ (или $g_1 = g + z^3t^2 + 2z^4t - 3z^5$) минимален. Поскольку g является минимальным полиномом и для каждой из алгебр B_i , то A -индекс точки y_0 равен 3. Вместе с тем $A(\Delta)$ -индекс той же точки равен 2.

Если $\overline{U}_j \subset \overline{U}_i$, то гомоморфизм сужения $\sigma_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ естественно индуцирует гомоморфизмы $\tau_{ij}: B_i \rightarrow B_j$ и $\hat{\tau}_{ij}: \hat{B}_i \rightarrow \hat{B}_j$.

Пусть A_0 , B_0 и $\hat{B}_0$ — прямые пределы систем (A_i, σ_{ij}) , (B_i, τ_{ij}) и $(\hat{B}_i, \hat{\tau}_{ij})$ соответственно. Ясно, что A_0 , $\hat{B}_0$ — локальные алгебры и $\hat{B}_0$ является конечным A_0 -модулем. По теореме 1 индекс m_0 равен корангу модуля $\hat{B}_0$. Поэтому, согласно лемме Накаямы, $m_0 = \dim \hat{B}_0 / M_0 \hat{B}_0$, где M_0 — максимальный идеал алгебры A_0 .

A -индекс точки ветвления характеризуется также точечными дифференцированиями специального вида. Определим на $A_i[t]$ функционал D_i^k , полагая $D_i^k(R)$ равным значению в (x_0, λ_0) формальной k -й производной по t полинома $R \in A_i[t]$.

Можно показать, что при $k \leq \mu_0 - 1$ функционал D_i^k является точечным дифференцированием порядка k на B_i , ядро которого содержит A_i . Так как функционалы D_i^k согласованы с гомоморфизмами τ_{ij} , то на B_0 определяются дифференцирования $D^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim D_i^k$.

Обозначим через N_0 прообраз в B_0 нулевого ростка алгебры $\hat{B}_0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B — алгебраическое расширение равномерной алгебры A , и пусть $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ — такая точка спектра алгебры B , что $\mu_0 > 1$. Тогда $m_0 = 1$, если $\ker D^1$ не содержит N_0 , и

$$m_0 = 1 + \max\{l \mid N_0 \subset \ker D^k, 1 \leq k \leq l\},$$

если $N_0 \subset \ker D^1$.

Основной момент доказательства: если $b \in N_0$, то найдется такая алгебра $\hat{B}_i$, в которой $\hat{b} = \sum_{k=0}^{m_0-1} a_k \hat{t}^k$, причем $a_k(x_0) = 0$ для всех k .

Функционал D^k определяет непрерывное точечное дифференцирование порядка k на алгебре B_i в точке y_0 . При этом, если дифференцирование D^1 нелокально на какой-то из этих алгебр, то y_0 — простая точка; если существует такое натуральное m_0 , не превосходящее $\mu_0 - 1$, что дифференцирования $D^1, \dots, D^{m_0-1}$ локальны на каждой из алгебр B_i , а дифференцирование D^{m_0} нелокально на некоторой алгебре B_j , то y_0 есть точка ветвления A -индекса m_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindberg J. A. Trans. Amer. Math. Soc., **112**, 356–368 (1964).
2. Lindberg J. A. Pacif. J. Math., **14**, 559–583 (1964).
3. Гамелин Т. Равномерные алгебры. Мир, М., 1973.
4. Kallin E. Proc. Nat. Acad. Sci., **49**, 821–824 (1963).
5. Батикян Б. Т., Горин Е. А. Труды научн. сем. ЛОМИ, **7**, 172–177 (1976).
6. Verdera J. Pacif. J. Math., **100**, 203–215 (1982).

Институт математики НАН Армении
e-mail: bag@instmath.sci.am

Поступило в редакцию
27 декабря 1999 г.

УДК 517.55

Однородные невырожденные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии*

© 2002. А. В. ЛОБОДА

Известно, что невырожденные квадрики

$$\operatorname{Im} z_3 = |z_1|^2 \pm |z_2|^2 \quad (1)$$

однородны относительно голоморфных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$ (z_1, z_2, z_3 — координаты в этом пространстве) и имеют 10-мерные группы изотропии (см., например, [2]).

*Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 99-01-00969) и программы «Университеты России—Фундаментальные исследования (2000)» (проект 04.01.41).