Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, Однородные невырожденные гипер-
поверхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотро-
пии, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, вы-
пуск 2, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa195>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским
соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:32:28

Можно показать, что при $k \leq \mu_0 - 1$ функционал D_i^k является точечным дифференцированием порядка k на B_i , ядро которого содержит A_i . Так как функционалы D_i^k согласованы с гомоморфизмами τ_{ij} , то на B_0 определяются дифференцирования $D^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim D_i^k$.

Обозначим через N_0 прообраз в B_0 нулевого ростка алгебры $\hat{B}_0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B — алгебраическое расширение равномерной алгебры A , и пусть $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ — такая точка спектра алгебры B , что $\mu_0 > 1$. Тогда $m_0 = 1$, если $\ker D^1$ не содержит N_0 , и

$$m_0 = 1 + \max\{l \mid N_0 \subset \ker D^k, 1 \leq k \leq l\},$$

если $N_0 \subset \ker D^1$.

Основной момент доказательства: если $b \in N_0$, то найдется такая алгебра $\hat{B}_i$, в которой $\hat{b} = \sum_{k=0}^{m_0-1} a_k \hat{t}^k$, причем $a_k(x_0) = 0$ для всех k .

Функционал D^k определяет непрерывное точечное дифференцирование порядка k на алгебре B_i в точке y_0 . При этом, если дифференцирование D^1 нелокально на какой-то из этих алгебр, то y_0 — простая точка; если существует такое натуральное m_0 , не превосходящее $\mu_0 - 1$, что дифференцирования $D^1, \dots, D^{m_0-1}$ локальны на каждой из алгебр B_i , а дифференцирование D^{m_0} нелокально на некоторой алгебре B_j , то y_0 есть точка ветвления A -индекса m_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindberg J. A. Trans. Amer. Math. Soc., **112**, 356–368 (1964).
2. Lindberg J. A. Pacif. J. Math., **14**, 559–583 (1964).
3. Гамелин Т. Равномерные алгебры. Мир, М., 1973.
4. Kallin E. Proc. Nat. Acad. Sci., **49**, 821–824 (1963).
5. Батикян Б. Т., Горин Е. А. Труды научн. сем. ЛОМИ, **7**, 172–177 (1976).
6. Verdera J. Pacif. J. Math., **100**, 203–215 (1982).

Институт математики НАН Армении
e-mail: bag@instmath.sci.am

Поступило в редакцию
27 декабря 1999 г.

УДК 517.55

Однородные невырожденные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии*

© 2002. А. В. ЛОБОДА

Известно, что невырожденные квадрики

$$\operatorname{Im} z_3 = |z_1|^2 \pm |z_2|^2 \quad (1)$$

однородны относительно голоморфных преобразований пространства $\mathbb{C}^3$ (z_1, z_2, z_3 — координаты в этом пространстве) и имеют 10-мерные группы изотропии (см., например, [2]).

*Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 99-01-00969) и программы «Университеты России—Фундаментальные исследования (2000)» (проект 04.01.41).

При этом для группы изотропии $\text{Aut}_0(M)$ однородной несферической, т.е. несводимой к квадракам (1), гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^3$ с невырожденной формой Леви выполняется, согласно [10], неравенство

$$0 \leq \dim \text{Aut}_0(M) \leq 3. \quad (2)$$

В той же работе [10] показано, что $\dim \text{Aut}_0(M) = 3$ только у однородной поверхности Винкельманна (здесь и далее $u = \text{Re } z_3$, $v = \text{Im } z_3$)

$$v = (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + |z_1|^4. \quad (3)$$

Ниже приводится полный список однородных невырожденных по Леви гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$, имеющих в точности двумерную группу изотропии и, следовательно, 7-мерную группу голоморфных преобразований.

ТЕОРЕМА 1. *Однородные несферические гиперповерхности M в $\mathbb{C}^3$ с двумерной группой $\text{Aut}_0(M)$ и положительно определенной формой Леви задаются с точностью до локальной голоморфной эквивалентности следующим списком попарно неэквивалентных многообразий:*

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) + b \ln(1 + |z_2|^2), \quad b \in (0, 1], \quad (4)$$

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) - b \ln(1 - |z_2|^2), \quad b \in (0, 1) \cup (1, \infty), \quad (5)$$

$$v = \ln(1 - |z_1|^2) + b \ln(1 - |z_2|^2), \quad b \in (0, 1], \quad (6)$$

$$v = |z_2|^2 + \varepsilon \ln(1 + \varepsilon |z_1|^2), \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. *Однородные несферические гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерной группой изотропии и невырожденной знаконеопределенной формой Леви задаются с точностью до локальной голоморфной эквивалентности следующим списком попарно неэквивалентных многообразий:*

$$v = (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + (1 + \varepsilon |z_1|^2) \ln(1 + \varepsilon |z_1|^2), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (8)$$

$$v = e^{i\theta} \ln(1 + z_1 \bar{z}_2) + e^{-i\theta} \ln(1 + z_2 \bar{z}_1), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (9)$$

$$v = \ln(1 - |z_1|^2) - b \ln(1 - |z_2|^2), \quad 0 < b < 1, \quad (10)$$

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) + b \ln(1 - |z_2|^2), \quad 0 < b < \infty, \quad (11)$$

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) - b \ln(1 + |z_2|^2), \quad 0 < b < 1, \quad (12)$$

$$v = |z_2|^2 + \varepsilon \ln(1 - \varepsilon |z_1|^2), \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (13)$$

Опишем общую схему доказательства этих теорем, основанную на использовании локальных нормальных форм для уравнений изучаемых однородных многообразий.

Зададим вещественно-аналитическую (не обязательно однородную) гиперповерхность M в пространстве $\mathbb{C}^3$, содержащую начало координат и невырожденную по Леви в этой точке, уравнением вида

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{k+l+2m=s, \min(k,l) \geq 2} h_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \quad (14)$$

Здесь $\langle z, z \rangle$ — невырожденная эрмитова форма от двух комплексных переменных, называемая формой Леви поверхности M , $h_{klm}(z, \bar{z})$ — однородный многочлен бистепени $(k, \bar{l})$ по $z = (z_1, z_2)$ и $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

Возможность такого представления гиперповерхности M обеспечивается результатами работы [2], содержащей также описание дополнительных условий на младшие коэффициенты нормального уравнения (14). К еще более специальному виду ненулевой многочлен h_{220} из такого нормального уравнения приводится в статье [9].

После этого приведения существенно легче рассматривается вопрос о группе матриц $G_1 \subset GL(2, \mathbb{C})$, сохраняющих с точностью до константы пару многочленов $\{\langle z, z \rangle, h_{220}\}$. Так как группа изотропии $\text{Aut}_0(M)$ вкладывается в G_1 (см. [3–6]), мы приходим к следующему обобщению полученной в [10] оценки (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если группа изотропии невырожденной по Леви однородной вещественной гиперповерхности M является не менее, чем двумерной, то пару $\{\langle z, z \rangle, h_{220}\}$ из нормального уравнения (14) можно привести к одному из следующих видов:*

- 1) $\{(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1), |z_1|^4\}$,
- 2) $\{(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1), i(z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 - z_1 z_2 \bar{z}_1^2)\}$,
- 3) $\{(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1), (-z_1^2 \bar{z}_2^2 + 4|z_1|^2 |z_2|^2 - z_2^2 \bar{z}_1^2)\}$,
- 4) $\{(|z_1|^2 - |z_2|^2), (|z_1|^4 + 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4)\}$,
- 5) $\{(|z_1|^2 + |z_2|^2), \pm(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4)\}$.

Для дальнейшего изучения однородности мы привлекаем векторные поля на обсуждаемых многообразиях.

Вкратце схема действий здесь такова (см., кроме того, [11]). На однородной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ имеется алгебра голоморфных векторных полей вида $Z = \sum_{k=1}^3 f_k(z_1, z_2, z_3) \partial / \partial z_k$.

Факт касания таким полем вещественной гиперповерхности $M = \{\Phi(z, \bar{z}, u, v) = 0\}$ означает выполнение тождества

$$\text{Re}\{Z(\Phi)\}|_M \equiv 0. \quad (15)$$

Для поверхностей вида (14) левая часть этого тождества является аналитической функцией от переменных $z, \bar{z}, u$. Приравнявая нулю все компоненты этого тождества степеней $k, \bar{l}, m$ по переменным $z, \bar{z}, u$ соответственно, получим бесконечную совокупность отдельных $(k, \bar{l}, m)$ -уравнений. Так как рассматриваемая алгебра векторных полей зависит от семи вещественных параметров, то каждое из таких уравнений распадается еще на семь частей.

Остается выбрать из такой бесконечной системы необходимых условий однородности некоторую подсистему, более удобную для построения нашей классификации. Использование при этом нормальных, а не произвольных уравнений, описывающих M , значительно облегчает технические детали.

Эта схема реализована в зависимости от случаев, перечисленных в предложении 1, при доказательстве двух следующих фактов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Однородных вещественных гиперповерхностей, соответствующих случаю 2) из предложения 1, не существует.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *В остальных случаях из предложения 1 многочлен h_{330} из нормального уравнения (14) можно привести к такому виду:*

- случай 1): $h_{330} = \varepsilon |z_1|^6, \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$,
- случай 3): $h_{330} = it(z_1^3 \bar{z}_2^3 - 3z_1^2 z_2 \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 - 3z_1 z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + z_2^3 \bar{z}_1^3), t \in \mathbb{R}$,
- случай 4): $h_{330} = t(|z_1|^6 - 3|z_1|^4 |z_2|^2 - 3|z_1|^2 |z_2|^4 + |z_2|^6), t \in \mathbb{R}$,
- случай 5): $h_{330} = t(|z_1|^6 + 3|z_1|^4 |z_2|^2 - 3|z_1|^2 |z_2|^4 - |z_2|^6), t \geq 0$.

При этом все нормальное уравнение полностью определяется тройкой многочленов $\{\langle z, z \rangle, h_{220}, h_{330}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае 1) мы получаем при $\varepsilon = 0$ однородную поверхность Винкельманна (3) с трехмерной группой изотропии, а при $\varepsilon = \pm 1$ однородные поверхности (8). Для них $\dim \text{Aut}_0(M) = 2$ так же, как и для остальных случаев 3), 4), 5).

Завершается доказательство теорем 1 и 2 построением нормальных уравнений для однородных поверхностей (4)–(7) и (8)–(13).

Сама процедура нормализации также является весьма громоздкой и потому здесь не описывается. Укажем лишь, что для уравнений (4)–(7) она приводит к случаю 5) предложения 1. При этом, например, для поверхностей (4) $h_{220} = -(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4)$, а коэффициент t многочлена h_{330} равен $3(1-b)/(1+b)$ и накрывает полуинтервал $[0, 3)$.

Обе поверхности (7) имеют после нормализации один и тот же коэффициент $t = 3$, но отличающиеся знаками многочлены h_{220} . Оставшиеся возможные пары h_{220}, h_{330} соответствуют в этом строго псевдовыпуклом случае поверхностям (5) и (6).

Ситуация законечноопределенной формы Леви разбирается аналогично. Здесь поверхностям (9) соответствует случай 3), а нормализация уравнений (10)–(13) приводит к случаю 4). Конкретные значения коэффициента t вычисляются подобно тому, как это делается в псевдовыпуклом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. Ann. Math. Pura Appl., (4) **11**, 17–90 (1931).
2. Chern S. S., Moser J. K. Acta Math., **133**, No. 3, 219–271 (1974).
3. Burns D., Shneider S., Wells R. O. Invent. Math., **46**, No. 3, 237–253 (1978).
4. Webster S. M. Math. Ann., **233**, 97–102 (1978).
5. Лобода А. В. Изв. АН СССР, Сер. матем., **45**, №3, 620–645 (1981).
6. Ежов В. В. УМН, **41**, вып. 3, 181–182 (1986).
7. Winkelmann J. The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds. Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., Vol. 1602, 1995.
8. Белошанка В. К. Матем. заметки, **60**, №5, 760–764 (1996).
9. Ежов В. В., Лобода А. В., Шмальц Г. Матем. заметки, **66**, №4, 624–626 (1999).
10. Лобода А. В. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 1, 68–71 (1999).
11. Лобода А. В. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 2, 33–42 (2000).

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступило в редакцию
16 января 2001 г.

УДК 517.984.46

О спектральной теории операторных мер

© 2002. М. М. Маламуд, С. М. Маламуд

1. Введение. Операторные меры естественно возникают в различных вопросах спектральной теории самосопряженных операторов (с конечнократным и бесконечнократным спектром), в интегральных представлениях операторных функций классов Херглота и Неванлинны, в теории моделей симметрических операторов и др.