Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, С. М. Маламуд, О спектральной теории операторных мер, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 83–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:06:16

При этом все нормальное уравнение полностью определяется тройкой многочленов $\{\langle z, z \rangle, h_{220}, h_{330}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае 1) мы получаем при $\varepsilon = 0$ однородную поверхность Винкельманна (3) с трехмерной группой изотропии, а при $\varepsilon = \pm 1$ однородные поверхности (8). Для них $\dim \text{Aut}_0(M) = 2$ так же, как и для остальных случаев 3), 4), 5).

Завершается доказательство теорем 1 и 2 построением нормальных уравнений для однородных поверхностей (4)–(7) и (8)–(13).

Сама процедура нормализации также является весьма громоздкой и потому здесь не описывается. Укажем лишь, что для уравнений (4)–(7) она приводит к случаю 5) предложения 1. При этом, например, для поверхностей (4) $h_{220} = -(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4)$, а коэффициент t многочлена h_{330} равен $3(1-b)/(1+b)$ и накрывает полуинтервал $[0, 3)$.

Обе поверхности (7) имеют после нормализации один и тот же коэффициент $t = 3$, но отличающиеся знаками многочлены h_{220} . Оставшиеся возможные пары h_{220}, h_{330} соответствуют в этом строго псевдовыпуклом случае поверхностям (5) и (6).

Ситуация законечноопределенной формы Леви разбирается аналогично. Здесь поверхностям (9) соответствует случай 3), а нормализация уравнений (10)–(13) приводит к случаю 4). Конкретные значения коэффициента t вычисляются подобно тому, как это делается в псевдовыпуклом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. Ann. Math. Pura Appl., (4) **11**, 17–90 (1931).
2. Chern S. S., Moser J. K. Acta Math., **133**, No. 3, 219–271 (1974).
3. Burns D., Shneider S., Wells R. O. Invent. Math., **46**, No. 3, 237–253 (1978).
4. Webster S. M. Math. Ann., **233**, 97–102 (1978).
5. Лобода А. В. Изв. АН СССР, Сер. матем., **45**, №3, 620–645 (1981).
6. Ежов В. В. УМН, **41**, вып. 3, 181–182 (1986).
7. Winkelmann J. The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds. Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., Vol. 1602, 1995.
8. Белошанка В. К. Матем. заметки, **60**, №5, 760–764 (1996).
9. Ежов В. В., Лобода А. В., Шмальц Г. Матем. заметки, **66**, №4, 624–626 (1999).
10. Лобода А. В. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 1, 68–71 (1999).
11. Лобода А. В. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 2, 33–42 (2000).

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступило в редакцию
16 января 2001 г.

УДК 517.984.46

О спектральной теории операторных мер

© 2002. М. М. Маламуд, С. М. Маламуд

1. Введение. Операторные меры естественно возникают в различных вопросах спектральной теории самосопряженных операторов (с конечнократным и бесконечнократным спектром), в интегральных представлениях операторных функций классов Херглота и Неванлинны, в теории моделей симметрических операторов и др.

Всюду в заметке H — сепарабельное гильбертово пространство, а $\Sigma(t) = \Sigma^*(t)$ — неубывающая сильно непрерывная слева ($\Sigma(t-0) = \Sigma(t)$) оператор-функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $B(H)$. Обычным образом (см. [3, 4]) по $\Sigma(t)$ строится операторная мера Σ , определенная на алгебре $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ ограниченных борелевских подмножеств из $\mathbb{R}$.

Теория ортогональных операторных мер (разложений единицы) построена с исчерпывающей полнотой. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы теории неортогональных операторных мер. При этом принципиальную роль в наших построениях играет теорема Березанского–Гельфанда–Костюченко (БГК) о дифференцировании операторной меры [2, 3, 6].

В заметке получено внутреннее описание пространства $L_2(\Sigma, H)$. Эта задача была поставлена М. Г. Крейном [9] и при $\dim H < \infty$ решена И. С. Кацем [1, 7, 8].

Далее, мы строим теорию спектральных типов Хеллингера для неортогональной операторной меры. В частности, доказано существование векторов максимального типа, а также существование подпространств, реализующих типы Хеллингера.

Некоторые факты являются новыми и для ортогональных мер, и для конечномерного пространства H . Так, показывается, как по произвольному циклическому подпространству L оператора $A = A^*$ находить его типы Хеллингера, и выясняется, что множество векторов максимального типа образует в L всюду плотное множество второй категории и типа G_δ .

Кроме того, получен аналог теоремы Жордана для операторных мер-зарядов. Для краткости мы формулируем все результаты для мер на прямой, хотя они верны для мер на подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Пространство $L_2(\Sigma, H)$. Напомним, следуя [3], определение пространства $L_2(\Sigma, H)$. Пусть $C_{00}(H)$ — множество финитных сильно непрерывных вектор-функций f , принимающих значения в конечномерных подпространствах (зависящих от f) пространства H . Далее, для $f, g \in C_{00}(H)$ вводится полускалярное произведение $(f, g)_{L_2(\Sigma, H)} = \int_{\mathbb{R}} (d\Sigma(t)f(t), g(t))_H$ (интеграл понимается в смысле предела римановских сумм). После факторизации $C_{00}(H)$ по линейалу $L_0 = \{f : (f, f)_{L_2(\Sigma, H)} = 0\}$ и пополнения получается гильбертово пространство $L_2(\Sigma, H)$.

Пусть $\mathfrak{S}_2(H)$ — множество операторов Гильберта–Шмидта в H , $T \in \mathfrak{S}_2(H)$, $\ker T = \ker T^* = \{0\}$, $\mathcal{D}(T^{-1})$ — область определения оператора T^{-1} , а ρ — произвольная скалярная мера, эквивалентная мере Σ ($\Sigma \sim \rho$).

По теореме БГК операторная мера $\Sigma_T(\Delta) := T^*\Sigma(\Delta)T$ дифференцируема в слабом смысле по мере ρ и ее плотность $\Psi(t) := d\Sigma_T/d\rho (\geq 0)$ существует ρ -п.в. и принимает значения в $\mathfrak{S}_1(H)$, множестве ядерных операторов в H . Следуя [5], можно показать, что производная Ψ существует ρ -п.в. по норме $\mathfrak{S}_1(H)$ (в [5] это показано для ортогональной меры $\Sigma = E$).

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}_t$ — пополнение $\mathcal{D}(T^{-1})$ по полунорме $\|h\|_{\tilde{\mathfrak{H}}_t} = \|\Psi(t)^{1/2}T^{-1}h\|$. Обозначим через $\mathfrak{H}_t$ соответствующее гильбертово факторпространство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \in \mathfrak{S}_2(H)$ и $\ker T = \ker T^* = \{0\}$, а ρ — скалярная мера, $\rho \sim \Sigma$. Тогда пространство $L_2(\Sigma, H)$ изометрически совпадает с прямым интегралом гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_t$ по мере $\rho(t)$, т. е.

$$L_2(\Sigma, H) = \int_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{H}_t d\rho(t) =: \mathfrak{H},$$

и для плотного в $L_2(\Sigma, H)$ множества вектор-функций f со значениями в $H_+ := \mathcal{D}(T^{-1})$

$$\|f(t)\|_{L_2(\Sigma, H)}^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\Psi(t)^{1/2} T^{-1} f(t)\|^2 d\rho(t). \quad (1)$$

В частности, пространство $\mathfrak{H}$ не зависит от выбора оператора T .

Если $\Sigma(t) = E(t)$ — разложение единицы в H , а $f(t) = E(\Delta)h$, где $h \in H_+$ и $\Delta \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, то равенство (1) принимает вид

$$(E(\Delta)h, h) (= \|f(t)\|_{L_2(E, H)}^2) = \int_{\Delta} \|\Psi(t)^{1/2} T^{-1} h\|_H^2 d\rho(t).$$

Это равенство эквивалентно теореме БГК для ортогональной меры E в форме прямого интеграла.

В случае $\dim H < \infty$ теорема 1 эквивалентна теореме Каца [8], хотя наше доказательство значительно проще известных. Отметим еще, что случаи $\dim H < \infty$ и $\dim H = \infty$ принципиально различны. В то время как при $\dim H < \infty$ пространство $L_2(\Sigma, H)$ отождествляется с некоторым пространством ρ -измеримых вектор-функций со значениями в H , при $\dim H = \infty$ это не так даже в простейших случаях.

Пусть, например, $\Sigma_0 \geq 0$ — компактный оператор в H и $\Sigma(t) = 0$ при $t \leq t_0$ и $\Sigma(t) = \Sigma_0$ при $t > t_0$. Тогда $L_2(\Sigma, H) = H_-$, где H_- — пополнение H по негативной норме $\|f\|_- = \|\Sigma_0^{1/2} f\|$.

Кроме того, не все непрерывные финитные функции принадлежат пространству $L_2(\Sigma, H)$, если вариация меры Σ не ограничена.

3. Функция кратности меры Σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\rho \sim \Sigma$ и $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H . Пусть, далее, $\sigma_{ij}(t) := (\Sigma(t)e_i, e_j)$, $\psi_{ij}(t) := d\sigma_{ij}(t)/d\rho$ и $\Psi_n(t) := (\psi_{ij}(t))_{i,j=1}^n$. Определим *функцию кратности* N_Σ и *общую кратность* $m(\Sigma)$ операторной меры Σ , полагая

$$N_\Sigma(t) := \sup_{n \geq 1} \text{rank } \Psi_n(t), \quad m(\Sigma) := \text{vraisup } N_\Sigma(t) \pmod{\rho}. \quad (2)$$

Функция кратности N_Σ определена ρ -п.в., и можно показать, что она не зависит от выбора базиса $\{e_i\}_1^\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (а) Пусть Σ_1 и Σ_2 — операторные меры на $\mathbb{R}$. Говорят, что Σ_1 *подчинена* Σ_2 ($\Sigma_1 \prec \Sigma_2$), если Σ_1 абсолютно непрерывна относительно Σ_2 , т.е. $\Sigma_1(\delta) = 0$, как только $\Sigma_2(\delta) = 0$.

(б) Будем говорить, что мера Σ_1 *спектрально подчинена* мере Σ_2 ($\Sigma_1 \prec\prec \Sigma_2$), если $\Sigma_1 \prec \Sigma_2$ и $N_{\Sigma_1}(t) \leq N_{\Sigma_2}(t) \pmod{\Sigma_2}$.

Меры Σ_1 и Σ_2 *спектрально эквивалентны*, если $\Sigma_1 \prec\prec \Sigma_2$ и $\Sigma_2 \prec\prec \Sigma_1$.

Пусть A — самосопряженный оператор в H , $E(t) := E_A(t)$ — его спектральная мера и L — подпространство в H . Обозначим через H_L минимальное A -инвариантное подпространство, содержащее L , $H_L = \text{span}\{E(\delta)L : \delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Подпространство L *циклическое* ($L \in \text{Cyc } A$), если $H_L = H$. Если $L = \{\lambda g : \lambda \in \mathbb{C}\}$, то полагаем $H_g := H_L$.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Σ — обобщенное разложение единицы в $\mathcal{H}$, т.е. $\Sigma(-\infty) = 0$, $\Sigma(+\infty) = I_{\mathcal{H}}$. Пусть, далее, A — самосопряженный оператор в H и $E(t)$ — его разложение единицы. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) $N_E(t)$ из определения 1 совпадает с классической функцией кратности меры E в смысле [4, 10].

(б) $\Sigma \prec\prec E$ в том и только том случае, когда найдутся гильбертово пространство $\tilde{H} \supset \mathcal{H}$ и унитарный оператор $U: H \rightarrow \tilde{H}$, такие, что $\Sigma(t) = P_{\mathcal{H}} U E(t) U^*|_{\mathcal{H}}$ (здесь $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор в $\tilde{H}$ на $\mathcal{H}$, а $U^*|_{\mathcal{H}}$ — сужение U^* на $\mathcal{H}$).

(с) Если $U^* \mathcal{H} \in \text{Cus } A$, то Σ спектрально эквивалентна E . Обратно, если Σ спектрально эквивалентна E и $N_E(t)$ конечна E -п.в. (например, если $m(E) < \infty$), то $U^* \mathcal{H} \in \text{Cus } A$.

В частности (при $H = \tilde{H}$ и $U = I$) мера Σ и ее минимальная (ортогональная) дилатация E спектрально эквивалентны.

(д) Разложение единицы E_Q оператора $Q: f \rightarrow xf$ в $L_2(\Sigma, H)$ является минимальной ортогональной дилатацией меры Σ .

Теорема 2 дополняет известную теорему Наймарка [1], отвечая на вопрос, ретракцией какого разложения единицы может быть Σ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Операторы умножения $Q_i: f \rightarrow xf$ в пространствах $L_2(\Sigma_i, H_i)$ ($i = 1, 2$) унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда меры Σ_1 и Σ_2 спектрально эквивалентны.

4. Элементы максимального типа. Каждая операторная мера Σ в H порождает семейство σ -конечных скалярных мер μ_f ($\mu_f(\delta) := (\Sigma(\delta)f, f)$), определенных на $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Ясно, что $\mu_f \prec \Sigma$ для всех $f \in H$. Известно [1, 4], что для ортогональной меры E в H существуют элементы f максимального типа, т.е. такие f , что $\mu_f \sim E$.

Оказывается, то же верно и для неортогональных мер. При этом справедлив более сильный факт, новый и для ортогональных мер, и для случая $\dim H < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Omega_{\Sigma} := \{f \in H : \Sigma \sim \mu_f\}$ — множество векторов максимального типа операторной меры Σ в H . Тогда

(а) $H \setminus \Omega_{\Sigma}$ является в H множеством первой категории и типа F_{σ} ;

(б) $\omega(\Omega_{\Sigma}) = 1$ для произвольной гауссовой меры ω в H .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A — самосопряженный оператор в H , $E(t)$ — его разложение единицы и $L \in \text{Cus } A$. Тогда

(а) $L \setminus \Omega_E$ является в L множеством первой категории и типа F_{σ} ;

(б) $\omega(\Omega_E \cap L) = 1$ для произвольной гауссовой меры ω в L .

5. Типы Хеллингера. Типом $[\mu]$ скалярной меры μ называют (см. [4]) класс эквивалентных ей мер. Пусть $A = A^*$, $E := E_A$, $g \in H$ и $\mu_g: \delta \rightarrow \mu_g(\delta) := (E(\delta)g, g)$, $\delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Типом $[g]$ элемента g (относительно E) называют тип меры μ_g , $[g] = [\mu_g]$.

Если в ортогональном разложении $H = \bigoplus_{i=1}^m H_{g_i}$ ($m \leq \infty$) пространства H типы элементов g_i убывают (не обязательно строго), $[g_{i+1}] \prec [g_i]$, то их число m ($\leq \infty$) и типы определены однозначно и называются типами Хеллингера меры E . Они образуют (см. [4, 11]) полную систему унитарных инвариантов оператора A .

Пусть $g_1 \in \Omega_E := \{g \in H : \mu_g \sim E\}$. Тогда $\mu_g \prec \mu_{g_1} := \mu$ для всех $g \in H$ и тип $[g]$ однозначно определяется носителем $\Gamma(g) := \{t \in \mathbb{R} : d\mu_g/d\mu > 0\}$ меры μ_g

относительно μ . Поэтому типы Хеллингера однозначно (mod E) определяются своими носителями $\Gamma_i(E) := \Gamma(g_i)$, $i \leq m$. В свою очередь, $\Gamma_i(E)$ определяются (см. [4]) функцией кратности (и мерой μ): $\Gamma_i(E) = \{t \in \mathbb{R} : N_E(t) \geq i\}$.

Наличие функции кратности N_Σ вида (2) позволяет ввести i -й тип Хеллингера для неортогональной меры Σ как тип скалярной меры $d\mu_i := \chi_i d\rho$, где $\rho \sim \Sigma$ и χ_i — индикатор множества

$$\Gamma_i(\Sigma) = \{t \in \mathbb{R} : N_\Sigma(t) \geq i\}, \quad i \in \{1, \dots, m(\Sigma)\}. \quad (3)$$

Назовем $\Gamma_i(\Sigma)$ носителем i -го типа Хеллингера меры Σ . Ясно, что $\Gamma_i(\Sigma) \supset \Gamma_{i+1}(\Sigma)$. Пусть i_0 — число множеств $\Gamma_i(\Sigma)$, эквивалентных $\Gamma_1(\Sigma)$ по mod ρ , т. е. таких, что $\rho(\Gamma_1(\Sigma) \setminus \Gamma_i(\Sigma)) = 0$.

Если $g_1 \in \Omega_\Sigma$ (по теореме 3 $\Omega_\Sigma \neq \emptyset$), то $\mu_g \prec \mu_{g_1} =: \mu \sim \Sigma$, где $\mu_g(\delta) := (\Sigma(\delta)g, g)$. Поэтому множество $\Gamma(g) := \{t : d\mu_g/d\mu > 0\}$ является (не топологическим) носителем меры μ_g (т. е. $\mu_g(\mathbb{R} \setminus \Gamma(g)) = 0$).

Оказывается, однако, что хотя $\Omega_\Sigma \neq \emptyset$, элементы «младших» типов Хеллингера (т. е. векторы $g \in H \setminus \Omega_\Sigma$, для которых $\Gamma(g) = \Gamma_i(\Sigma)$ при некотором $i > i_0$) могут отсутствовать.

Например, пусть $\Sigma(t) = \sum_{i \leq t} P_i$ — дискретная 2×2 -мера со скачками $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в точках 1, 2, 3. Легко видеть, что $N_\Sigma(1) = N_\Sigma(2) = 1$ и $N_\Sigma(3) = 2$. Поэтому $\Gamma_1(\Sigma) = \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_2(\Sigma) = \{3\}$. Если $h = (h_1, h_2)$, то $\Gamma(h) = \{1, 2, 3\} = \Gamma_1(\Sigma)$ при $h_1 h_2 \neq 0$. Далее, $\Gamma(h) = \{2, 3\}$, если $h_1 = 0$, и $\Gamma(h) = \{1, 3\}$, если $h_2 = 0$. Поэтому $\Gamma(h) \neq \{3\} = \Gamma_2(\Sigma)$ при всех h .

Желание реализовать младшие типы Хеллингера при помощи некоторых подпространств побудило нас ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем подпространство $L = L_k$ ($\dim L_k = k$) k -м подпространством Хеллингера операторной меры Σ в H , если $\Gamma_i(P_L \Sigma \upharpoonright L) = \Gamma_i(\Sigma)$ для всех $i \leq k$ (P_L — ортопроектор на L).

В частности, вектор максимального типа порождает одномерное (первое) подпространство Хеллингера.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 для каждого $h \in \Omega_\Sigma$ существует цепь хеллингеровых подпространств (хеллингера цепь)

$$\{\lambda h\} =: H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_k \subset \dots \subset H_m, \quad \dim H_k = k. \quad (4)$$

Пусть $H_1 \subset \dots \subset H_m$ — цепь подпространств вида (4) и $\{e_i\}_1^m$ — ортонормированный базис в H_m , такой, что $H_k = \text{span}\{e_i\}_1^k$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Положим $\sigma_{ij}(t) := (\Sigma(t)e_i, e_j)$, $\psi_{ij}(t) := d\sigma_{ij}(t)/d\rho$ и $\Psi_k(t) := (\psi_{ij}(t))_{i,j=1}^k$, где $\rho \sim \Sigma$. Тогда цепь $H_1 \subset \dots \subset H_m$ хеллингера, если и только если

$$\Gamma_k(\Sigma) = \{t \in \mathbb{R} : \det \Psi_k(t) \neq 0\} \pmod{\Sigma}, \quad k \in \{1, \dots, m\}. \quad (5)$$

Таким образом, теорема 4 означает, что найдется такая ортонормированная система $\{e_i\}_1^m$ в H , что k -й тип Хеллингера реализуется мерой $(\wedge^k \Psi(t) \varphi_k, \varphi_k) d\mu$, где $\wedge^k \Psi(t)$ обозначает k -ю внешнюю степень оператора $\Psi(t) := d\Sigma_T/d\mu$, а $\varphi_k := e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ есть k -вектор, $\varphi_k \in \wedge^k(H)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A самосопряжен в H , $E(t)$ — его разложение единицы, $L \in \text{Сус } A$ и $h \in \Omega_E \cap L$. Тогда в L существует хеллингера цепь подпространств вида (4), $H_k \in L$, $k \in \{1, \dots, m\}$.

Если кратность $m = m(E)$ меры E конечна, то $H_m \in \text{Сус } A$.

Если векторы $\{e_i\}_{i=1}^m$ попарно спектрально ортогональны относительно ортогональной меры E и $H_k := \text{span}\{e_i\}_1^k$, то цепь подпространств $H_1 \subset \dots \subset H_m$ является хеллинговой тогда и только тогда, когда e_i реализует i -й тип Хеллингера, $\Gamma(e_i) = \Gamma_i(E)$, $i \leq m$.

В подпространстве $L \in \text{Сус } A$, вообще говоря, отсутствует спектрально ортогональная система векторов, реализующих типы Хеллингера, хотя в силу следствия 3 эти типы реализуются подпространствами $H_k \subset L$ или k -векторами $\varphi_k = e_1 \wedge \dots \wedge e_k \in \wedge^k(L)$.

6. Аналог теоремы Жордана. Результаты этого раздела принадлежат второму из авторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Говорят, что оператор-функция $\Sigma = \Sigma^*: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow B(H)$ (операторная мера-заряд) имеет слабо ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, если заряд $\mu_{f,g}: \delta \rightarrow (\Sigma(\delta)f, g)$ является конечным на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ подмножеств прямой для всех $f, g \in H$.

ТЕОРЕМА 5. Операторная мера-заряд Σ слабо ограниченной вариации представима в виде разности двух конечных неотрицательных операторных мер $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2$ тогда и только тогда, когда

$$\text{Var}_{\mathbb{R}} \|T^* \Sigma(\Delta) T\|_1 := \sup_{\pi} \sum_i \|T^* \Sigma(\Delta_i) T\|_1 =: c(T) < \infty$$

для каждого $T \in \mathfrak{S}_2(H)$, где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма, а супремум берется по всем разбиениям $\pi = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ прямой $\mathbb{R}$, $\Delta_i = [t_i, t_{i+1})$.

В доказательстве используются некоторые факты теории C^* -алгебр и вполне ограниченных отображений [12].

Пусть $x_i^{(n)} = (x_i^{(n)})^*$ суть $2^n \times 2^n$ -матрицы Клиффорда, $x_i^{(n)} x_j^{(n)} + x_j^{(n)} x_i^{(n)} = 2\delta_{ij} I$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Определим операторную меру-заряд

$$\Sigma(\Delta) = \bigoplus_1^{\infty} \Sigma_n(\Delta), \quad \Sigma_n(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{1/k \in \Delta, k \leq n} x_k^{(n)}.$$

Ясно, что $\Sigma(\Delta)$ — дискретная мера с носителем $\{0\} \cup \{1/k\}_{k=1}^{\infty}$. Она имеет слабо ограниченную вариацию, но не является разностью двух положительных мер. Идея использования матриц Клиффорда для конструкции меры Σ заимствована из [10], где она использовалась по другому поводу.

Мы признательны Ю. М. Березанскому и М. Ш. Бирману за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Наука, М., 1966.
2. Березанский Ю. М. ДАН СССР, **108**, №3, 379–382 (1956).
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ленингр. ун-т, 1980.
5. Бирман М. Ш., Энтина С. Б. Изв. АН СССР, **31**, 401–430 (1967).
6. Гельфанд И. М., Костюченко А. Г. ДАН СССР, **103**, №3, 349–352 (1955).
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2, Наука, М., 1966.
8. Кац И. С. Зап. Харьковского матем. об-ва (4), **22**, 95–113 (1950).
9. Крейн М. Г. Труды ин-та математики АН УССР, **10**,

83–106 (1948). **10.** Paulsen V. J. Funct. Anal., **109**, 113–129 (1992). **11.** Плеснер А. И. Спектральная теория операторов. Наука, М., 1965. **12.** Pisier G. Similarity Problems and Completely Bounded Maps. Springer-Verlag, 1996.

Донецкий национальный университет
e-mail: m3@rambler.ru

Поступило в редакцию
25 мая 2001 г.

Eidgenossische Technosche Hochschule (ETH), Zurich

УДК 517.988.52

О неподвижных точках многозначных сжатий*

© 2002. П. В. СЕМЕНОВ

1. Пусть $k: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$. Многозначное отображение F , ставящее в соответствие каждой точке x метрического пространства (X, d) непустое подмножество Fx этого пространства, называется k -сжатием, если $H(Fx, Fy) \leq k(d(x, y))d(x, y)$, $x \neq y$. Последнее неравенство означает, что для любого $\varepsilon > k(d(x, y))d(x, y)$ множества Fx и Fy лежат в ε -окрестностях друг друга. Рассмотрим следующие ограничения на коэффициент сжатия k :

(R) $\limsup_{s \rightarrow t+0} k(s) < 1$ для любого $t > 0$,

(R[#]) $\limsup_{s \rightarrow t+0} k(s) < 1$ для любого $t \geq 0$.

Рейх [3] показал, что условие (R) гарантирует наличие неподвижных точек компактнозначного k -сжатия F полного метрического пространства. Он же поставил (нерешенный до сих пор) вопрос о возможности отказа от компактности значений Fx [4, 5]. В [1, 2] положительный ответ на этот вопрос дан с заменой условия (R) условием (R[#]). В настоящей работе приведен метод, позволяющий положительно решать указанную проблему для широкого класса сжатий, для коэффициентов которых верно условие (R) и неверно (R[#]), т. е. $\lim_{s \rightarrow 0} k(s) = 1$.

2. Геометрическая прогрессия со знаменателем $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ определяется так: $\alpha_0(t) = t$, $\alpha_{n+1}(t) = \alpha(\alpha_n(t))\alpha_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия (R) для $\alpha(\cdot)$ нетрудно вывести, что члены геометрической прогрессии $\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^\infty$ поточечно монотонно сходятся к нулю, а из условия (R[#]) — что $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t) < \infty$, т. е. эта прогрессия поточечно сходится на $(0, \infty)$. В работе [6] функции $\alpha(\cdot)$, для которых ряд $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t)$ всюду поточечно сходится, названы *геометрически (G-)суммируемыми*, и для многозначных полунепрерывных снизу отображений, функции невыпуклости значений которых имеют общую G -суммируемую мажоранту, в [6, 7] доказаны селекционные теоремы.

ЛЕММА 1. Пусть функция $k(\cdot)$ удовлетворяет условию (R) и F — многозначное k -сжатие метрического пространства (X, d) . Тогда можно так выбрать последовательность точек $x_0 \in X$, $x_{n+1} \in Fx_n$, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольным образом выберем $x_0 \in X$ и $x_1 \in Fx_0$. Если они совпали, то можно все члены искомой последовательности приравнять x_0 . Пусть $d_0 = d(x_1, x_0) > 0$. Так как $H(Fx_1, Fx_0) \leq k(d_0)d_0 < \frac{1}{2}(1 + k(d_0))d_0 = d'_0 < d_0$, то можно выбрать $x_2 \in Fx_1$ так, чтобы $d_1 = d(x_2, x_1) < d'_0 < d_0$. Так как

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №99-01-00009.