Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Семенов, О неподвижных точках многозначных сжатий, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:38:39

83–106 (1948). **10.** Paulsen V. J. Funct. Anal., **109**, 113–129 (1992). **11.** Плеснер А. И. Спектральная теория операторов. Наука, М., 1965. **12.** Pisier G. Similarity Problems and Completely Bounded Maps. Springer-Verlag, 1996.

Донецкий национальный университет

e-mail: m3@rambler.ru

Eidgenossische Technosche Hochschule (ETH), Zurich

Поступило в редакцию

25 мая 2001 г.

УДК 517.988.52

О неподвижных точках многозначных сжатий*

© 2002. П. В. СЕМЕНОВ

1. Пусть $k: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$. Многозначное отображение F , ставящее в соответствие каждой точке x метрического пространства (X, d) непустое подмножество Fx этого пространства, называется k -сжатием, если $H(Fx, Fy) \leq k(d(x, y))d(x, y)$, $x \neq y$. Последнее неравенство означает, что для любого $\varepsilon > k(d(x, y))d(x, y)$ множества Fx и Fy лежат в ε -окрестностях друг друга. Рассмотрим следующие ограничения на коэффициент сжатия k :

(R) $\limsup_{s \rightarrow t+0} k(s) < 1$ для любого $t > 0$,

(R[#]) $\limsup_{s \rightarrow t+0} k(s) < 1$ для любого $t \geq 0$.

Рейх [3] показал, что условие (R) гарантирует наличие неподвижных точек компактнозначного k -сжатия F полного метрического пространства. Он же поставил (нерешенный до сих пор) вопрос о возможности отказа от компактности значений Fx [4, 5]. В [1, 2] положительный ответ на этот вопрос дан с заменой условия (R) условием (R[#]). В настоящей работе приведен метод, позволяющий положительно решать указанную проблему для широкого класса сжатий, для коэффициентов которых верно условие (R) и неверно (R[#]), т. е. $\lim_{s \rightarrow 0} k(s) = 1$.

2. Геометрическая прогрессия со знаменателем $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ определяется так: $\alpha_0(t) = t$, $\alpha_{n+1}(t) = \alpha(\alpha_n(t))\alpha_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия (R) для $\alpha(\cdot)$ нетрудно вывести, что члены геометрической прогрессии $\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^\infty$ поточечно монотонно сходятся к нулю, а из условия (R[#]) — что $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t) < \infty$, т. е. эта прогрессия поточечно сходится на $(0, \infty)$. В работе [6] функции $\alpha(\cdot)$, для которых ряд $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t)$ всюду поточечно сходится, названы *геометрически (G-)суммируемыми*, и для многозначных полунепрерывных снизу отображений, функции невыпуклости значений которых имеют общую G -суммируемую мажоранту, в [6, 7] доказаны селекционные теоремы.

ЛЕММА 1. Пусть функция $k(\cdot)$ удовлетворяет условию (R) и F — многозначное k -сжатие метрического пространства (X, d) . Тогда можно так выбрать последовательность точек $x_0 \in X$, $x_{n+1} \in Fx_n$, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольным образом выберем $x_0 \in X$ и $x_1 \in Fx_0$. Если они совпали, то можно все члены искомой последовательности приравнять x_0 . Пусть $d_0 = d(x_1, x_0) > 0$. Так как $H(Fx_1, Fx_0) \leq k(d_0)d_0 < \frac{1}{2}(1 + k(d_0))d_0 = d'_0 < d_0$, то можно выбрать $x_2 \in Fx_1$ так, чтобы $d_1 = d(x_2, x_1) < d'_0 < d_0$. Так как

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №99-01-00009.

$H(Fx_2, Fx_1) \leq k(d_1)d_1 < \frac{1}{2}(1 + k(d_1))d_1 = d'_1 < d_1$, то можно выбрать $x_3 \in Fx_2$ так, чтобы $d_2 = d(x_3, x_2) < d'_1 < d_1$. Продолжая по индукции, получим строго убывающую последовательность $\{d_n\}_{n=0}^\infty$, $d_n = d(x_{n+1}, x_n)$. Если ее предел l положителен, то, переходя к пределу справа в неравенстве $d_{n+1} < \frac{1}{2}(1 + k(d_n))d_n$, получим $2l \leq (1 + \limsup_{s \rightarrow l+0} k(s))l < 2l$. Противоречие. Значит, $l = 0$. $\square$

Лемма 2. Пусть функция $k(\cdot)$ удовлетворяет условию (R), функция $\alpha(\cdot)$ G -суммируема хотя бы в одной точке, и пусть в некоторой окрестности нуля U выполняется неравенство $k(t) < \alpha(t)$, а функция $\alpha_1(t) = \alpha(t)t$ монотонна. Тогда всякое замкнутозначное k -сжатие F полного метрического пространства (X, d) имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть для некоторой точки $t > 0$ сходится ряд $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(t)$. Фиксируем тот номер N , при котором $s = \alpha_N(t) \in U$. Тогда $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n(s) = \sum_{n=N}^\infty \alpha_n(t) < \infty$. По лемме 1 выберем последовательность точек $x_0 \in X$, $x_{n+1} \in Fx_n$. Если $d_0 = d(x_1, x_0) = 0$, то неподвижная точка найдена. В противном случае можно считать, что $0 < d_0 = d(x_1, x_0) < s \in U$. Тогда, перебирая точки $x_2, x_3, \dots$, получаем $H(Fx_1, Fx_0) \leq k(d_0)d_0 < \alpha(d_0)d_0 = \alpha_1(d_0) < \alpha_1(s)$, $d_1 = d(x_2, x_1) < \alpha_1(s) < s$. Аналогично, $H(Fx_2, Fx_1) \leq k(d_1)d_1 < \alpha_1(d_1) < \alpha_1(\alpha_1(s)) = \alpha_2(s)$, $d_2 = d(x_3, x_2) < \alpha_2(s)$ и т. д. Суммируемость прогрессии $\alpha_n(\cdot)$ в точке s дает фундаментальность последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, и окончание доказательства стандартно. $\square$

Условие (R[#]) на функцию $k(\cdot)$ гарантирует [8] наличие ее G -суммируемой мажоранты $\alpha(\cdot)$. Значит, следствием леммы 2 являются теоремы о неподвижных точках из [1, 2]. Хотя для наличия неподвижных точек хватает G -суммируемости знаменателя прогрессии в одной точке, в следующих случаях рассмотрена G -суммируемость в окрестности нуля. Монотонность функций $\alpha(\cdot)$ и $\alpha_1(\cdot)$ в этих случаях получается автоматически.

3. Вместо того чтобы оценивать скорость убывания последовательности $\{\alpha_n(t)\}$, мы будем оценивать скорость возрастания последовательности $\{1/\varphi(\alpha_n(t))\}$, где $\alpha(t) = 1 - \varphi(t)$ и $\varphi(\cdot)$ возрастает в некоторой окрестности нуля.

Лемма 3. Пусть $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, и пусть $\varphi' > 0$ в некотором интервале $(0, s) \subset (0, 1)$, в котором значения функции $\varphi(\cdot)$ меньше единицы. Тогда при всех $0 < t < s$

$$\Delta_t = \frac{1}{\varphi(t(1 - \varphi(t)))} - \frac{1}{\varphi(t)} > \lambda = \inf\{[-\ln(\varphi(e^{-\tau}))]' \mid \tau > -\ln s\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = e^{-h(-\ln t)}$, $t < s$, т.е. $h(\tau) = -\ln(\varphi(e^{-\tau}))$, $\tau = -\ln t > -\ln s$. Положим $t_\varphi = t(1 - \varphi(t))$. Тогда из неравенства $e^x > 1 + x$ при $x > 0$ и из теоремы Лагранжа получаем

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \frac{1}{\varphi(t)}(e^{h(-\ln t_\varphi) - h(-\ln t)} - 1) > \frac{1}{\varphi(t)}(h(-\ln t_\varphi) - h(-\ln t)) \\ &= \frac{1}{\varphi(t)}(t_\varphi - t)[h(-\ln)]'(c_t) = -th'(-\ln c_t) \frac{-1}{c_t} > h'(-\ln c_t) \geq \lambda. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, и пусть в некоторой окрестности нуля функция $\psi(\cdot)$, обратная к функции $1 - \alpha(\cdot)$, представима в виде $\psi(t) =$

$e^{-g(-\ln t)}$, где

$$0 < \liminf g'(\tau) \leq \limsup g'(\tau) < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{z-g(z)} dz < \infty, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Тогда функция $\alpha(\cdot)$ является G -суммируемой в некоторой окрестности нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h — функция, обратная к g в некоторой окрестности нуля. Тогда для функции φ , обратной к ψ , получаем $\varphi(t) = e^{-h(\tau)}$, $\tau = -\ln t$, и при этом $1 - \varphi = \alpha$. Из (1) следует конечность и положительность величины $\sup g'$ на некотором луче. Значит, положителен и инфимум $\lambda = \inf h'$ производной обратной к g функции h на некотором луче. По лемме 3 получаем, что при всех достаточно малых t верно неравенство $\Delta_t = 1/\varphi(t(1-\varphi(t))) - 1/\varphi(t) > \lambda$.

Фиксируем произвольное такое t и подставим в последнее неравенство поочередно $\alpha_0 = t$, $\alpha_1 = (1 - \varphi(\alpha_0))\alpha_0$, ..., $\alpha_n = (1 - \varphi(\alpha_{n-1}))\alpha_{n-1}$. Тогда

$$\frac{1}{\varphi(\alpha_n)} = \Delta_{\alpha_{n-1}} + \Delta_{\alpha_{n-2}} + \dots + \Delta_{\alpha_0} + \frac{1}{\varphi(\alpha_0)} > n\lambda + \mu.$$

Значит, $\varphi(\alpha_n) < 1/(n\lambda + \mu)$ и $\alpha_n < \psi(1/(n\lambda + \mu)) = e^{-g(\ln(n\lambda + \mu))}$. Сходимость ряда $\sum_n e^{-g(\ln(n\lambda + \mu))}$ следует из сходимости несобственного интеграла $\int e^{-g(\ln(x\lambda + \mu))} dx$. Заменой $z = \ln(x\lambda + \mu)$ он сводится к интегралу $\lambda^{-1} \int e^{z-g(z)} dz$, который конечен по условию (2). $\square$

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $k(\cdot)$ удовлетворяет условию (R) и имеет в окрестности нуля мажоранту $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2) теоремы 4. Тогда всякое замкнутозначное $k(\cdot)$ -сжатие полного метрического пространства имеет неподвижную точку.

4. Рассмотрим некоторые примеры.

а) Допустим, что коэффициент сжатия $k(\cdot)$ имеет около нуля степенную мажоранту $\alpha(t) = 1 - Ct^p$, $0 < p < 1$. Это в точности соответствует случаю линейной функции g в теореме 4: $g(\tau) = q\tau + \gamma \implies \psi(t) = e^{-(q(-\ln t) + \gamma)} = C_1 t^q \implies \alpha(t) = 1 - \psi^{-1}(t) = 1 - Ct^{1/q}$.

Для конкретной функции $\alpha(t) = 1 - Ct^{-p}$, $0 < p \leq 1$, нетрудно показать, что $\alpha_n(t) \sim O(n^{-p})$ для каждого t из некоторой окрестности нуля. В частности, при $p = 1$ получаем, что если производная функции $\alpha(\cdot)$ в нуле отлична от минус бесконечности, то эта функция не является G -суммируемой. Заметим, что если $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, ψ' положительна и ψ'' ограничена около нуля, то у функции $\alpha = 1 - \psi^{-1}$ есть мажоранта типа $1 - C\sqrt{t}$.

б) Если к условиям (1) и (2) добавить условие (3): $g(\tau) - \tau = o(\tau)$, $\tau \rightarrow \infty$, то будут получаться G -суммируемые функции α , не допускающие никаких степенных мажорант вида $1 - Ct^p$, $0 < p < 1$. Действительно, если бы $\alpha(t) = 1 - \psi^{-1}(t) < 1 - Ct^p$ в некоторой окрестности нуля, то $\psi(t) < C_1 t^{1/p}$, что противоречит равенству $\psi(t) = e^{-g(\tau)} = e^{-\tau(1+(g(\tau)-\tau)/\tau)} = t^{1+(g(\tau)-\tau)/\tau}$ и условию (3). Типичный пример выполнения условий (1)–(3) дают функции $g(\tau) = \tau + \tau^s$, $s \in (0, 1)$, $g(\tau) = \tau + \tau^s (\ln \tau)^r$, $s \in (0, 1)$, $r > 0$, $g(\tau) = \tau + C \ln \tau$, $C > 1$ и т. д. Кроме того, легко установить выпуклость множества функций g , удовлетворяющих этим условиям.

с) Из метода доказательства теоремы 4 ясна затруднительность получения явного вида для функции φ : нужно уметь разрешать уравнения типа $y = g(x) = x + f(x)$ в форме $x = x(y)$. Понятно, что реально это можно сделать только при $f(x) = 2C\sqrt{x}$. В таком случае, решая квадратное уравнение, получаем следующие явные ответы для G -суммируемых функций α , не имеющих степенных мажорант: $\psi(t) = t^{1+2C/\sqrt{-\ln t}} = e^{-(\tau+2C\sqrt{\tau})} \implies g(\tau) = \tau + 2C\sqrt{\tau} \implies h(\tau) = (\sqrt{C^2 + \tau} - C)^2 \implies \alpha(t) = 1 - e^{-(\sqrt{C^2 - \ln t} - C)^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daffer P. Z., Kaneko H. J. Math. Anal. Appl., **192**, 655–666 (1995).
2. Mizoguchi N., Takahashi W. J. Math. Anal. Appl., **141**, 177–188 (1989).
3. Reich S. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **5**, 26–42 (1972).
4. Reich S. Atti. Accad. Naz. Lincei, **57**, 194–198 (1974).
5. Reich S. Contemp. Math., **21**, 179–187 (1983).
6. Семенов П. В. Матем. сб., **189**, №3, 141–160 (1998).
7. Repovš D., Semenov P. V. J. Math. Anal. Appl., **196**, 1021–1029 (1995).
8. Chang T. H. Math. Japonica, **41**, 311–320 (1995).

Московский городской педагогический университет,
математический факультет
e-mail: pavels@orc.ru

Поступило в редакцию
30 ноября 2000 г.

УДК 515.172.4

Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций*

© 2002. С. В. ШАДРИН

1. Вещественной мероморфной функцией называется пара (f, τ) , где $f: S_g \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — разветвленное накрытие сферы Римана сферой с g ручками, а $\tau: S_g \rightarrow S_g$ — инволюция, антиголоморфная относительно комплексной структуры, поднятой с помощью накрытия f со сферы $\hat{\mathbb{C}}$. При этом должно выполняться условие $f \circ \tau = \eta \circ f$, где через $\eta: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ обозначено комплексное сопряжение ($\eta: z \mapsto \bar{z}$).

Функции (f_1, τ_1) и (f_2, τ_2) считаются совпадающими, если существует гомеоморфизм $\varphi: S_g \rightarrow S_g$, такой, что $f_1 = f_2 \varphi$ и $\varphi \tau_1 = \tau_2 \varphi$.

На множестве вещественных мероморфных функций существует естественная структура топологического пространства [2]. Обозначим это топологическое пространство через H . Пространство H состоит из счетного числа компонент связности. Каждая компонента связности — это незамкнутое конечномерное вещественное многообразие.

2. Для каждой компоненты связности H_0 пространства H мы построим компактификацию $N(H_0)$. Компактификация $N(H_0)$ — это пространство классов эквивалентности декорированных функций, которые мы сейчас определим.

Вещественной декорированной функцией называется четверка $(f, \tau, E, \{D_e\})$, где $(f, \tau) \in H_0$ — функция с простыми критическими значениями, E — конечное

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 00-01-00660, 02-01-06340 и 00-15-96084.