Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шадрин, Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 2, 92–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:57:20

с) Из метода доказательства теоремы 4 ясна затруднительность получения явного вида для функции φ : нужно уметь разрешать уравнения типа $y = g(x) = x + f(x)$ в форме $x = x(y)$. Понятно, что реально это можно сделать только при $f(x) = 2C\sqrt{x}$. В таком случае, решая квадратное уравнение, получаем следующие явные ответы для G -суммируемых функций α , не имеющих степенных мажорант: $\psi(t) = t^{1+2C/\sqrt{-\ln t}} = e^{-(\tau+2C\sqrt{\tau})} \implies g(\tau) = \tau + 2C\sqrt{\tau} \implies h(\tau) = (\sqrt{C^2 + \tau} - C)^2 \implies \alpha(t) = 1 - e^{-(\sqrt{C^2 - \ln t} - C)^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daffer P. Z., Kaneko H. J. Math. Anal. Appl., **192**, 655–666 (1995).
2. Mizoguchi N., Takahashi W. J. Math. Anal. Appl., **141**, 177–188 (1989).
3. Reich S. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **5**, 26–42 (1972).
4. Reich S. Atti. Accad. Naz. Lincei, **57**, 194–198 (1974).
5. Reich S. Contemp. Math., **21**, 179–187 (1983).
6. Семенов П. В. Матем. сб., **189**, №3, 141–160 (1998).
7. Repovš D., Semenov P. V. J. Math. Anal. Appl., **196**, 1021–1029 (1995).
8. Chang T. H. Math. Japonica, **41**, 311–320 (1995).

Московский городской педагогический университет,
математический факультет
e-mail: pavels@orc.ru

Поступило в редакцию
30 ноября 2000 г.

УДК 515.172.4

Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций*

© 2002. С. В. ШАДРИН

1. Вещественной мероморфной функцией называется пара (f, τ) , где $f: S_g \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — разветвленное накрытие сферы Римана сферой с g ручками, а $\tau: S_g \rightarrow S_g$ — инволюция, антиголоморфная относительно комплексной структуры, поднятой с помощью накрытия f со сферы $\hat{\mathbb{C}}$. При этом должно выполняться условие $f \circ \tau = \eta \circ f$, где через $\eta: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ обозначено комплексное сопряжение ($\eta: z \mapsto \bar{z}$).

Функции (f_1, τ_1) и (f_2, τ_2) считаются совпадающими, если существует гомеоморфизм $\varphi: S_g \rightarrow S_g$, такой, что $f_1 = f_2 \varphi$ и $\varphi \tau_1 = \tau_2 \varphi$.

На множестве вещественных мероморфных функций существует естественная структура топологического пространства [2]. Обозначим это топологическое пространство через H . Пространство H состоит из счетного числа компонент связности. Каждая компонента связности — это незамкнутое конечномерное вещественное многообразие.

2. Для каждой компоненты связности H_0 пространства H мы построим компактификацию $N(H_0)$. Компактификация $N(H_0)$ — это пространство классов эквивалентности декорированных функций, которые мы сейчас определим.

Вещественной декорированной функцией называется четверка $(f, \tau, E, \{D_e\})$, где $(f, \tau) \in H_0$ — функция с простыми критическими значениями, E — конечное

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 00-01-00660, 02-01-06340 и 00-15-96084.

подмножество сферы $\widehat{\mathbb{C}}$, инвариантное относительно комплексного сопряжения, и $\{D_e\}_{e \in E}$ — множество попарно непересекающихся замкнутых дисков, лежащих в $\widehat{\mathbb{C}}$. При этом должно выполняться следующее: $e \in \text{Int } D_e$, каждый из дисков D_e содержит не менее двух критических значений функции (f, τ) , границы дисков и множество E не содержат критических значений функции (f, τ) , и если $\eta(e) = e'$, то $\eta(D_e) = D_{e'}$, где $\eta: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ — комплексное сопряжение ($\eta: z \mapsto \bar{z}$).

Две декорированные функции считаются эквивалентными, если одна получается из другой композицией описанных ниже отображений A_α и B_β .

Отображение $A_\alpha: (f_0, \tau_0, E, \{D_e\}) \mapsto (f_1, \tau_1, E, \{D_e\})$ определяется путем $\alpha: [0, 1] \rightarrow H_0$, $\alpha: t \mapsto (f_t, \tau_t)$, таким, что на множестве $f_0^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e) \subset S_g$ инволюция τ_t и накрытие f_t не меняются.

Отображение $B_\beta: (f_0, \tau_0, E, \{D_e^0\}) \mapsto (f_1, \tau_1, E, \{D_e^1\})$ определяется изотопией $\{\beta_t: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{t \in [0, 1]}$ тождественного гомеоморфизма сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ ($\beta_0 = \text{id}$) в классе вещественных гомеоморфизмов ($\eta\beta_t = \beta_t\eta$), оставляющих неподвижными точки множества E и критические значения функции (f_0, τ_0) , лежащие в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e^0$. При этом $D_e^t = \beta_t(D_e^0)$ для каждого $e \in E$, накрытие $f_t: S_g \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ совпадает с $f_0\beta_t$, а инволюция $\tau_t: S_g \rightarrow S_g$ совпадает с τ_0 .

3. Наша конструкция пространства $N(H_0)$ представляет собой вещественный аналог компактификации Натансона–Тураева [3]. Соответственно топология пространства $N(H_0)$ определяется так же, как и в невещественном случае в [3].

ТЕОРЕМА 1. *Пространство N_0 хаусдорфово и компактно.*

Определим вложение компоненты связности H_0 в пространство $N(H_0)$. Пусть $H_0^* \subset H_0$ — подмногообразие функций с простыми критическими значениями. Отображение $C^*: H_0^* \rightarrow N(H_0)$ переводит функцию (f, τ) в класс эквивалентности декорированной функции $(f, \tau, \emptyset, \emptyset)$.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение C^* продолжается до непрерывного вложения $C: H_0 \rightarrow N(H_0)$. При этом образ $C(H_0)$ открыт и всюду плотен в пространстве $N(H_0)$.*

Приведем конструкцию отображения $C: H_0 \rightarrow N_0$. Пусть $(f_0, \tau_0) \in H_0$ — функция с непустыми критическими значениями. Обозначим множество ее непустых критических значений через E . Выберем замкнутые попарно непересекающиеся диски $\{D_e\}_{e \in E}$, такие, что $e \in D_e$, D_e не содержит других критических значений функции (f_0, τ_0) и, если $\eta(e) = e'$, то $\eta(D_e) = D_{e'}$. По определению $C: (f_0, \tau_0) \mapsto (f_1, \tau_1, E, \{D_e\})$, где $(f_t, \tau_t)_{t \in [0, 1]}$ — произвольный путь в пространстве H_0 , такой, что на множестве $f^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e) \subset S_g$ комплексная структура, инволюция и накрытие не меняются и у функции (f_1, τ_1) все критические значения простые.

4. Каждая компонента связности H_0 пространства H выделяется заданием некоторого стандартного набора топологических инвариантов вещественных мероморфных функций [2]. Простейшими такими инвариантами являются род g и число листов n накрытия f .

Рассмотрим компоненту связности H_0 и ее компактификацию $N(H_0)$. Нам кажется интересным выразить какие-нибудь топологические характеристики многообразия H_0 и клеточного пространства $N(H_0)$ через топологические инварианты функций $(f, \tau) \in H_0$. Например, $\dim H_0 = \dim N(H_0) = 2g + 2n - 2$.

Сейчас мы объясним, как выразить эйлеровы характеристики $\chi(H_0)$ и $\chi(N(H_0))$. При этом под эйлеровой характеристикой некомпактного многообразия H_0 мы понимаем разность $\chi(N(H_0)) - \chi(N(H_0) \setminus H_0)$ (дополнение $N(H_0) \setminus H_0$ имеет структуру клеточного пространства).

5. Множеством критических значений декорированной функции $(f, \tau, E, \{D_e\})$ называется набор точек из $\widehat{\mathbb{C}}$, состоящий из критических значений функции (f, τ) , лежащих в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{e \in E} D_e$, и из точек $e \in E$, взятых с кратностями, равными количеству критических значений функции (f, τ) , лежащих в D_e .

ТЕОРЕМА 3. *Эйлерова характеристика пространства H_0 (пространства $N(H_0)$) равна числу вещественных мероморфных функций, принадлежащих H_0 (числу классов эквивалентности декорированных функций, принадлежащих $N(H_0)$), множество критических значений которых состоит ровно из двух элементов, i и $-i$ (взятых с кратностью $g + n - 1$ каждый).*

Приведем схему доказательства теоремы 3. Рассмотрим действие S^1 на $\widehat{\mathbb{C}}$, заданное формулой $\theta: z \mapsto A^{-1}(e^{2\pi i \theta} A(z))$, где $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ и $A: z \mapsto (z - i)/(z + i)$. Это действие в образе функций порождает действие S^1 на пространствах H_0 и $N(H_0)$. Соответственно эйлерова характеристика каждого из этих пространств равна числу неподвижных точек. А неподвижные точки — это функции, описанные в формулировке теоремы.

6. Приведем несколько следствий теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Эйлеровы характеристики пространств H_0 и $N(H_0)$ неотрицательны.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Эйлерова характеристика пространства H_0 может равняться только 0 и 1, причем, если $\chi(H_0) = 1$, то пространство H_0 содержит функции рода 0 (обратное неверно).*

Пользуясь теоремами [1, 2] о топологической классификации мероморфных функций с одним непростым критическим значением, можно выразить эйлерову характеристику пространства $N(H_0)$ как число специального вида двудольных графов, структура которых зависит от топологических инвариантов функций $(f, \tau) \in H_0$.

7. Автор выражает благодарность С. М. Натанзону за многочисленные полезные советы и обсуждения. Полную версию этой работы см. в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Khovanskii A. G., Zdravkovska S. J. Knot Theory Ramific., **5**, No. 1, 55–75 (1996).
2. Натанзон С. М. Труды семин. вekt. тенз. анал., №23, 79–103 (1988), №24, 104–132 (1990); англ. перевод: Selecta Math. Soviet., **12**, No. 3, 251–291 (1993).
3. Natanzon S., Turaev V. Topology, **38**, No. 4, 889–914 (1999).
4. Shadrin S. V. arXiv: math.CV/0202060.

Независимый московский университет
e-mail: shadrin@mccme.ru

Поступило в редакцию
13 июля 2000 г.
В переработанном виде
24 октября 2001 г.