Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Самые длинные кривые данной степени и квазикристаллическая теорема Харнака в псевдопериодической топологии, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 1–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 07:31:03

Самые длинные кривые данной степени и квазикристаллическая теорема Харнака в псевдопериодической топологии*

© 2002. В. И. Арнольд

§1. Максимальные длины тригонометрических и сферических кривых

Тригонометрическая кривая «степени n »

$$\{f(x, y) = 0\}, \quad \text{где } f = \sum [a_{p,q} \cos(px + qy) + b_{p,q} \sin(px + qy)], \quad (1)$$

задается вещественным тригонометрическим многочленом f степени n по каждой переменной ($|p| \leq n$, $|q| \leq n$) на торе $\{(x \bmod (2\pi), y \bmod (2\pi))\}$. Снабдим тор стандартной метрикой $(dx)^2 + (dy)^2$.

Оказывается, длина кривой (1) ограничена сверху постоянной, не зависящей от коэффициентов тригонометрического многочлена f :

ТЕОРЕМА 1. *Длина всякой кривой (1) степени n не превосходит числа Cn , где $C = 8\pi$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение 8π достигается для набора $4n$ окружностей,

$$f = \sin(nx) \sin(ny).$$

Теорема 1 утверждает, что *это — самая длинная среди тригонометрических кривых степени n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пересечение кривой (1) с почти каждой из окружностей $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$ состоит из $2n$ точек. Поэтому длина проекции кривой на окружность $\{x = 0\}$ вдоль оси y (или на окружность $\{y = 0\}$ вдоль оси x) не превосходит $2\pi \cdot 2n$ (считая длину проекции любого элемента кривой положительной, независимо от ориентации).

Поскольку длина гипотенузы не превосходит суммы длин катетов, длина всей кривой (1) не превосходит числа $2(2\pi \cdot 2n) = Cn$, что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так же доказывается ограниченность сверху k -мерного объема k -мерного тригонометрического многообразия степени n в торе размерности m (объем ограничен величиной Cn , где постоянная C зависит только от размерностей k и m , но не зависит от степеней n и от коэффициентов тригонометрических многочленов f , задающих изучаемое многообразие $\{f = 0\}$).

Рассмотрим теперь единичную сферу в трехмерном евклидовом пространстве с координатами (x, y, z) . На сфере рассмотрим алгебраическую кривую $\{f(x, y, z) = 0\}$, где f — однородный многочлен степени d . Степень n этой сферической кривой равна $2d$.

Оказывается, длина такой сферической алгебраической кривой степени n ограничена сверху постоянной, не зависящей от коэффициентов многочлена f .

*Частично поддержано РФФИ, грант 02-01-00655.

ТЕОРЕМА 2. *Длина всякой сферической алгебраической кривой степени n не превосходит числа Cn , где $C = \pi$ (для сферы радиуса единица).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число точек пересечения нашей кривой с окружностью большого круга сферы не превосходит n (по теореме Безу).

Среднее число точек пересечения со всеми окружностями больших кругов, вычисленное для любого бесконечно малого отрезка кривой, пропорционально длине этого отрезка, с не зависящим от отрезка коэффициентом пропорциональности (принцип «задачи Бюффона об иголке» из теории вероятностей, см., например, [7]).

Поэтому среднее число точек пересечения со всеми окружностями больших кругов, вычисленное для любой гладкой сферической кривой, пропорционально длине кривой, с тем же, что для бесконечно малого отрезка, коэффициентом пропорциональности.

Этот коэффициент равен $1/\pi$, так как для окружности одного из больших кругов число точек ее пересечения с почти любой окружностью большого круга равно 2, а длина равна 2π .

Выше доказано уже, что для кривой степени n среднее число точек ее пересечения с окружностями больших кругов не превосходит n . Значит, длина этой кривой не превосходит πn .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Кривая степени $n = 2m$, состоящая из m окружностей больших кругов, имеет длину $2\pi m = \pi n$. Теорема 2 утверждает, что *это — самая длинная среди всех сферических кривых такой же степени.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Величина k -мерного объема k -мерного подмногообразия степени n в сфере размерности t оценивается сверху* (совершенно по тем же соображениям, что для кривых) *величиной Cn , где постоянная C зависит только от размерностей k и t (но не зависит ни от степеней, ни от коэффициентов многочленов f , задающих изучаемое многообразие $\{f = 0\}$).*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Равенство в теореме 2 для алгебраических кривых достигается только в случае, когда кривая — объединение окружностей больших кругов.*

Ибо будь на кривой точка ненулевой геодезической кривизны, кривая пересекала бы некоторые окружности больших кругов в меньшем, чем n , числе точек, так что среднее число точек пересечения было бы строго меньше n , а длина кривой — строго меньше, чем πn .

Но неалгебраические сферические кривые «топологической степени n » (пересекающие окружность каждого большого круга не более, чем n , раз) могут иметь указанную максимальную длину, не будучи объединением окружностей больших кругов. Пример — четыре не продолжающих друг друга меридиана сферы.

Я не знаю структуры ни множества всех кривых топологической степени n , ни его подмножества кривых экстремальной длины.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теоремы 1 и 2 можно сравнивать, вложив тор в трехмерную сферу пространства $\mathbb{C}^2$:

$$(x, y) \mapsto (z = \exp(ix), w = \exp(iy)).$$

Но нужно учитывать, что степень n вещественного многообразия $\{f = 0\}$ не совпадает со степенью N алгебраического многообразия, заданного обращением в нуль вещественной и мнимой частей комплексной функции f (а именно, $N = n^2$).

§2. Оценки средних топологических и геометрических характеристик псевдопериодических многообразий и функций через их многогранники Ньютона

Псевдопериодическое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^m$ определяется как пересечение m -периодического подмногообразия с аффинным подпространством (какой-либо размерности k) в $\mathbb{R}^m$. Здесь m -периодичность — это инвариантность относительно сдвигов на все целочисленные векторы (т.е. на векторы из подрешетки $\mathbb{Z}^m$ в $\mathbb{R}^m$). Указанное аффинное пространство, вообще говоря, иррационально, т.е. несоизмеримо с этой подрешеткой (ненулевые разности его векторов решетке не принадлежат).

Пример псевдопериодического многообразия — множество нулей функции $\cos t + \cos(\sqrt{2}t)$. Периодическое подмногообразие¹⁾ здесь — это плоская кривая, заданная уравнением $\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) = 0$ в $\mathbb{R}^2$ ($m = 2$). Аффинное одномерное подмногообразие — это прямая $\{2\pi x = t, 2\pi y = \sqrt{2}t\}$.

Псевдопериодические функции — это суммы линейных функций и периодических функций.

Эргодические средние (на единицу k -мерного объема) определяются для таких геометрических и топологических характеристик псевдопериодических объектов, как интегралы, объемы, длины, числа Бетти, эйлеровы характеристики, сигнатуры и иные характеристические числа, числа Морса критических точек разных индексов и т.п.

Для определения среднего выбирается точка (например, O) и затем изучаемый объект (например, функция, или ее множество уровня, или ее многообразие меньших значений, или ее множество критических точек, или иное псевдопериодическое многообразие) рассматривается внутри шара большого радиуса R в $\mathbb{R}^m$ с центром в точке O .

Топологические или геометрические характеристики изучаемого объекта (числа Бетти, числа Морса, интегралы, длины, объемы и т.п.) вычисляются для получившегося в пересечении с шаром ограниченного объекта.

Полученная при вычислении величина делится на объем шара (иногда в $\mathbb{R}^m$, а иногда и в k -мерном изучаемом аффинном подпространстве), а затем радиус шара, R , устремляется к бесконечности.

Предел отношения при стремящемся к бесконечности радиусе R называется *эргодическим средним изучаемой характеристики (на единицу объема)*.

Этот предел существует почти всегда (при почти всех центрах O в смысле меры Лебега), а иногда даже и всегда (как я сформулировал в [1] и как С. М. Гусейн-Заде доказал в [2, 3]).

Ниже обсуждается поставленный в [1] и в [6] вопрос об оценке сверху эргодических средних на единицу объема от характеристик псевдопериодических объектов, полученных из периодического его сечением k -мерным аффинным подпространством. Оценку сверху доставляет степень (или многогранник Ньютона) указанного периодического объекта. Константы в оценках зависят от того, рассматривается ли 2π -периодичность, как в §1, или 1-периодичность, как в §2.

¹⁾Переход от решетки $(2\pi\mathbb{Z})^m$ из §1 к употребляемой здесь решетке $\mathbb{Z}^m$ меняет лишь постоянные C в оценках и масштаб длин.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых случаях (например, при изучении длины линии уровня псевдопериодической функции f от двух переменных x и y) включение вопроса в приведенную выше схему требует дополнительных усилий (в указанном примере нужно перейти от функции f , не являющейся ограничением на иррациональную плоскость периодической функции большего числа переменных, к функции

$$\frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}},$$

уже являющейся таким ограничением (как является и $\partial f / \partial x$)).

Рассмотрим (тригонометрическую) кривую длины L на стандартном двумерном торе $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Соответствующую периодическую кривую на плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначим через M .

ТЕОРЕМА 3. *Эргодическое среднее (на единицу длины секущей прямой) от числа точек пересечения кривой M с иррациональной аффинной прямой ограничено сверху величиной CL (где постоянная C не зависит от выбора прямой).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ориентировав прямую, сопоставим каждой точке кривой M отрезок длины 1, начинающийся в этой точке и направленный в определенную ориентацией сторону, параллельно прямой.

Сложим характеристические функции всех построенных параллельных отрезков (характеристическая функция равна 1 в точках отрезка и 0 вне его). Сумма, f , — периодическая функция на плоскости, определенная всюду или по меньшей мере почти всюду и уж заведомо интегрируемая по мере Лебега (так как число точек пересечения любого отрезка прямой с кривой M ограничено сверху величиной лишь от длины отрезка постоянной в силу полуалгебраичности исходной тригонометрической кривой на торе).

Мы будем считать периодическую функцию f результатом поднятия на накрывающую тор плоскость неотрицательной функции g , заданной на торе.

Интеграл от функции g (как от плотности распределения $g dS$) по всему тору ограничен сверху постоянной, не зависящей от направления секущей прямой и пропорциональной длине L исходной тригонометрической кривой на торе.

Действительно, распределение $g dS$ можно получить, интегрируя, как по параметру, по точке исходной кривой распределение наших параллельных отрезков, перенесенное с плоскости на тор проектированием.

А именно, фиксированной точке исходной кривой отвечает на плоскости равномерное распределение единичной массы вдоль выходящего из этой точки по направлению секущей прямой отрезка.

При проектировании плоскости на тор это распределение переходит в свой прямой образ, т. е. если в точку на торе проектируется несколько отрезков плоскости, порожденных разными точками исходной периодической кривой, то принесенные ими распределения суммируются.

Число точек пересечения интервала длины T секущей прямой с периодической кривой M на плоскости не сильно отличается от интеграла от построенной нами на плоскости функции f вдоль этого интервала, даже когда он очень длинен.

Действительно, каждый из наших параллельных отрезков длины 1, который целиком уместается в рассматриваемый интервал длины T , дает одинаковые вклады 1 и в интеграл от f , и в число точек пересечения.

Число же отрезков, участвующих в построении функции f , которые пересекаются с концами нашего интервала длины T , ограничено сверху постоянной (которая даже не зависит от направления прямой и вычисляется по степени тригонометрического многочлена, задающего исходную кривую на торе).

Это же число оценивает и число тех точек пересечения, которые не сопровождаются отрезком, целиком попадающим в наш интервал (начинающимся в точке пересечения).

Поэтому эргодические средние (на единицу длины секущей прямой) от числа точек пересечения с M и от ограничения на прямую функции f , в пределе $T \rightarrow \infty$, одинаковы. Значит (по эргодической теореме для иррациональной секущей прямой) временное среднее числа точек пересечения ограничено той же постоянной, что и пространственное среднее от функции g по всему тору.

Последнее, в свою очередь, ограничено сверху, как мы доказали выше, величиной CL . Это доказывает теорему 3.

СЛЕДСТВИЕ. *Среднее (на единицу длины секущей прямой) от числа нулей псевдопериодической функции, являющейся ограничением на иррациональную прямую тригонометрического многочлена степени n , ограничено сверху величиной Cn (где постоянная C не зависит от коэффициентов многочлена).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Длина L линии нулей тригонометрического многочлена степени n ограничена сверху величиной, пропорциональной n (по теореме 1), а среднее число нулей K псевдопериодического ограничения — величиной, пропорциональной длине L (по теореме 3). Итак,

$$K \leq C_1 L \leq C_1 C_2 n,$$

что и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сечение периодического подмногообразия размерности d в пространстве размерности m аффинным подпространством размерности k имеет размерность $s = k + d - m$. Если $s \geq 0$, то эргодическое среднее (на единицу k -мерного объема) от величины s -мерного (неориентированного) объема псевдопериодического сечения оценивается сверху величиной Cn , где n — степень периодического многообразия.

Доказывается это так же, как теорема 3 и ее следствие, только вместо отдельных *точек* (пересечения секущей прямой с заданной периодической кривой) нужно рассматривать *подмногообразия* (размерности $s = k + d - r$) пересечения k -мерного секущего пространства с d -мерным периодическим подмногообразием в $\mathbb{R}^m$.

Место *числа* этих точек пересечения занимает *s -мерный объем* многообразия-пересечения. *Отрезки* длины 1 (в определении функций f и g) нужно заменить *шарами* (или кубами) радиуса единица.

Теорема о совпадении временного среднего с пространственным вдоль иррациональной обмотки тора (относящаяся к эргодической теории динамических систем) заменяется аналогичной (и доказываемой таким же анализом ряда Фурье) теоремой об усреднении вдоль иррационального k -мерного слоения на m -мерном торе.

Трюк с построением функции f (из характеристических функций отрезков) был придуман Г. Вейлем для задачи о среднем движении перигелия Земли [5, 4], где этот прием позволил ему регуляризовать расходящийся интеграл.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы об оценках сверху эргодических средних от других топологических и геометрических характеристик псевдопериодических и квазикристаллических объектов доказываются аналогичными теореме 3 приемами.

Рассмотрим, например, критические точки той псевдопериодической функции, в которую превращается тригонометрический многочлен $f(x, y, z)$ (степени n по каждой переменной) при его ограничении на иррациональную плоскость, $ax + by + z = 0$.

В критической точке ограничения градиент периодической функции f пропорционален вектору (a, b, c) , так что критические точки удовлетворяют обоим тригонометрическим уравнениям

$$b \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial f}{\partial y}, \quad c \frac{\partial f}{\partial y} = b \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Каждое из этих уравнений имеет степень n , так что заданная этими уравнениями кривая в трехмерном торе — тригонометрическая, степени порядка n^2 .

Длина такой кривой ограничена сверху величиной Cn^2 , не зависящей от коэффициентов тригонометрического многочлена f . Рассуждая, как в теореме 3 и в доказанном следствии, мы получим для эргодического среднего (на единицу площади плоскости аргументов) от числа критических точек изучаемой псевдопериодической функции оценку сверху величиной порядка n^2 (для функций от k переменных и среднего на единицу k -мерного объема получилась бы оценка сверху среднего числа критических точек величиной порядка n^k).

Примеры, показывающие неулучшаемость этих оценок, очевидны (например, $f = \cos(nx) + \cos(ny) + \cos(nz)$).

§ 3. Псевдопериодическая теорема типа Харнака

Рассмотрим псевдопериодическую кривую степени n , $\{f(x, y, z) = 0\}$, на иррациональной плоскости $\{ax + by + cz = 0\}$. Исследуем число компонент связности пересечения этой кривой с шаром большого радиуса R .

ТЕОРЕМА 4. *Число таких компонент не превосходит величины $Cn^2 R^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть компонента не пересекает границу рассматриваемого круга радиуса R на плоскости. В области, ограниченной этой компонентой, не доходя до лежащих в этой области других компонент кривой, если таковые имеются, псевдопериодическая функция f имеет критическую точку. Эти точки у разных компонент разные, поэтому число таких компонент не превосходит числа $C_1 n^2 R^2$, оценивающего сверху число критических точек в круге по теореме 3 и ее следствию.

Чтобы оценить сверху число компонент, пересекающих граничную окружность круга радиуса R , аппроксимируем эту окружность ломаной из отрезков постоянства координат x и y . Число точек пересечения кривой $\{f = 0\}$ с такой ломаной оценивается сверху величиной произведения степени n на длину ломаной.

Те же компоненты связности кривой $\{f = 0\}$, которые пересекают граничную окружность, но не пересекают аппроксимирующую ломаную, содержат точки обращения вспять, где $f = 0$ и либо $\partial f / \partial x = 0$, либо $\partial f / \partial y = 0$. Число этих компонент тоже оценивается величиной порядка $n^2 R^2$ по теореме 3 и ее следствию.

Складывая оценки чисел компонент связности всех трех типов, мы получим оценку сверху для их общего числа вида $C_1 n^2 R^2 + C_2 n R + C_3 n^2 R^2$, что и доказывает теорему 4.

§4. Псевдопериодическая теорема типа Штурма–Гурвица

Теорема Штурма–Гурвица (см., например, [6]) оценивает топологическую сложность тригонометрического многочлена не сверху, как теоремы Безу и Харнака, а снизу, в предположении отсутствия в многочлене не членов высокой, а, наоборот, членов низкой степени.

Я укажу здесь простейшие оценки длины тригонометрических кривых снизу. Вернемся к обозначениям формулы (1).

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что степень каждого члена тригонометрического многочлена (или ряда Фурье) f по x не меньше n (т. е. что в представлении (1) всюду $|p| \geq n$).*

Тогда длина кривой $\{f(x, y) = 0\}$ не меньше, чем $4\pi n$ (каковая длина достигается для $f = \cos(nx)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном значении y многочлен $f(\cdot, y)$ имеет не менее $2n$ корней x (по теореме Штурма–Гурвица). Поэтому кривая $\{f = 0\}$ при проектировании вдоль оси x на ось y покрывает эту окружность длины 2π не менее $2n$ раз, что и доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для вещественного тригонометрического многочлена f от m переменных такое же рассуждение дало бы оценку $(m - 1)$ -мерного объема гиперповерхности $\{f = 0\}$ снизу величиной $(2\pi)^{m-1} 2n$ (в теореме 5 и здесь, как и в (1), метрика тора определяется суммой квадратов дифференциалов угловых координат).

Обобщение на случай подмногообразий, коразмерность которых больше единицы (например, на случай системы двух уравнений на двумерном торе), к сожалению, неизвестно.

Штурм связывал одно из доказательств своей теоремы с выражением индекса комплексного векторного поля на окружности $|z| = 1$ через число нулей на этой окружности вещественной части поля. Эта связь в многомерном случае также не исследована. В n -мерном случае окружность заменяется сферой S^{2n-1} в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а вещественная часть комплексного векторного поля — лагранжевой проекцией ограничения голоморфного на сфере симплектического пространства векторного поля на лежащий на сфере лагранжев тор $|z_k| = r_k$.

СЛЕДСТВИЕ. *Эргодическое среднее (на единицу длины секущей прямой) от числа нулей псевдопериодического ограничения многочлена теоремы 5 на иррациональную прямую оценивается снизу величиной Cn .*

Так же оценивается снизу и среднее от объема в ситуации предыдущего замечания. Все это выводится из теоремы 5 так же, как выведено выше следствие теоремы 3 из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тем же методом оценивается снизу и длина псевдопериодической кривой $\{f(x, y, z) = 0\}$ на иррациональной плоскости $\{ax + by + cz = 0\}$, если степень $|p|$ каждого члена многочлена f не меньше n . Длина той части кривой, которая заключена в шаре радиуса R , растет с R в этом случае не медленнее, чем CRn . Здесь также кривую на плоскости можно заменить гиперповерхностью в пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Классическая теорема Харнака* оценивает сверху число компонент алгебраической вещественной кривой через род ее римановой поверхности. В многомерном случае *теорема Смита* оценивает сверху сумму чисел Бетти вещественного алгебраического многообразия суммой чисел Бетти множества его комплексных точек.

Подобная связь между вещественными псевдопериодическими кривыми (или многообразиями) и поверхностями (множествами) их комплексных точек тоже должна иметь место, но отсутствует в известной мне литературе.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Длина L кривой на торе (соответственно объем подмногообразия) доставляет оценку снизу для величины *усредненного по секущим прямым (подпространствам) всех направлений* эргодического среднего от числа (объема) псевдопериодических пересечений аффинного подпространства покрывающего пространства с периодической покрывающей исходной кривой (исходного подмногообразия).

Отсюда вытекает *существование* таких длинных сечений (сечений большого эргодического среднего объема) при надлежащем выборе аффинного подпространства. Интересно узнать, насколько редки более короткие сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V. I.* Remarks on quasicrystallic symmetries. Phys. D, **33**, 21–25 (1988).
2. *Gusein-Zade S. M.* On the topology of quasiperiodic functions. In: Pseudoperiodic Topology (V. Arnold, M. Kontsevich, and A. Zorich, eds.). Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 197, 1999, pp. 1–7.
3. *Гусейн-Заде С. М.* Число критических точек квазипериодического потенциала. Функц. анализ и его прил., **23**, вып. 2, 55–56 (1989).
4. *Weyl H.* Mean Motion I. Amer. J. Math., **60**, 889–896 (1938).
5. *Weyl H.* Mean Motion II. Amer. J. Math., **61**, 143–148 (1939).
6. *Арнольд В. И. и др.* Задачи Арнольда. Фазис, М., 2000.
7. *Арнольд В. И.* Вариация кривой. Матем. просвещение, вып. 2, М., 1957, с. 241–245.

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
7 мая 2002 г.