Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Строение модулей над стереотипной алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 2, 1–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa2>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:23:01

Строение модулей над стереотипной алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$

© 2006. С. С. АКБАРОВ*

§1. Постановка задачи и главные результаты

Один из классических результатов теории ассоциативных алгебр (см., например, [1]) гласит, что всякий модуль M над алгеброй $\mathcal{L}(X)$ операторов на конечномерном векторном пространстве X (например, над $\mathbb{C}$) представим в виде прямой суммы $\bigoplus_{\mathfrak{m}} X$ ($\mathfrak{m}$ — кардинальное число, зависящее от M) некоторого семейства $\{X_i; i \in \mathfrak{m}\}$ экземпляров пространства X :

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{m}} X.$$

Этот факт не переносится на случай бесконечномерного пространства X , потому что в противном случае сама алгебра $\mathcal{L}(X)$, рассматриваемая как левый модуль над собой, имела бы такой же вид, $\mathcal{L}(X) = \bigoplus_{\mathfrak{m}} X$, откуда следовало бы, что $\mathcal{L}(X)$ состоит только из конечномерных операторов.

Действительно, предположим, что такой изоморфизм существует и обозначим его через $\iota: \bigoplus_{\mathfrak{m}} X \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Пусть $\{x_i; i \in \mathfrak{m}\} \in \bigoplus_{\mathfrak{m}} X$ — семейство, в котором члены со всеми индексами, кроме фиксированного индекса i_0 , равны нулю,

$$x_i = \begin{cases} a, & i = i_0 \quad (a \in X), \\ 0, & i \neq i_0. \end{cases}$$

Тогда одномерные операторы вида $g \otimes a$, где $g(a) = 1$, должны действовать на образ $\iota(\{x_i\})$ этого семейства тождественно:

$$\begin{aligned} (g \otimes a) \cdot \iota(\{x_i\}) &= \iota((g \otimes a) \cdot \{x_i\}) = \iota\left(\left\{\begin{array}{ll} (g \otimes a) \cdot a, & i = i_0 \\ (g \otimes a) \cdot 0, & i \neq i_0 \end{array}\right\}\right) \\ &= \iota\left(\left\{\begin{array}{ll} a, & i = i_0 \\ 0, & i \neq i_0 \end{array}\right\}\right) = \iota(\{x_i\}), \end{aligned}$$

и это означает, что $\iota(\{x_i\})$ — одномерный оператор в $\mathcal{L}(X)$. Поскольку любое семейство $\{x_i; i \in \mathfrak{m}\} \in \bigoplus_{\mathfrak{m}} X$ является конечной суммой семейств, в которых члены со всеми индексами, кроме одного, равны нулю, мы получаем, что образ $\iota(\{x_i\})$ произвольного семейства $\{x_i; i \in \mathfrak{m}\} \in \bigoplus_{\mathfrak{m}} X$ должен быть конечномерным оператором, т.е. любой оператор в $\mathcal{L}(X)$ конечномерен. Разумеется, это невозможно при бесконечномерном X , и мы получаем противоречие.

Если прямую сумму $\bigoplus_{\mathfrak{m}} X$ представлять себе как тензорное произведение пространства X на какое-то другое векторное пространство E (алгебраической

*Работа поддержана грантом РФФИ №05-01-00982.

размерности m), то сказанное можно будет сформулировать в виде следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если X — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, то для всякого левого модуля M над алгеброй $\mathcal{L}(X)$ линейных операторов на X существует единственное с точностью до изоморфизма векторное пространство E (над тем же полем $\mathbb{C}$), такое, что справедлив изоморфизм модулей

$$M \cong E \otimes X, \quad (1)$$

где умножение в $E \otimes X$ задается формулой

$$\varphi \cdot (e \otimes x) = e \otimes \varphi(x), \quad x \in X, e \in E, \varphi \in \mathcal{L}(X).$$

Если же X бесконечномерно, то не всякий $\mathcal{L}(X)$ -модуль представим в виде (1).

Итак, имеется качественная разница между конечномерным и бесконечномерным пространствами X , и, зная это, естественно поинтересоваться, справедливо ли представление, подобное (1), в ситуации, когда X наделено какой-нибудь дополнительной структурой, например, топологией? (При этом, разумеется, под $\mathcal{L}(X)$ должно пониматься пространство линейных непрерывных операторов на X , также наделенное подходящей топологией, а модули и тензорное произведение тоже считаются топологическими в каком-нибудь разумном смысле.)

Понятно, что если для какого-то (бесконечномерного) X такое представление справедливо, то автоматически мы получаем решение следующей проблемы:

ПРОБЛЕМА. Можно ли описать топологические модули над топологической алгеброй $\mathcal{L}(X)$ операторов на каком-нибудь (бесконечномерном) топологическом векторном пространстве X ?

В функциональном анализе эта проблема выглядит совершенно безнадежной: даже для самого популярного класса банаховых пространств (и модулей) не найдено никаких примеров, когда подобное описание было бы возможно.

Есть, правда, два близких к этой теме класса задач, изучаемых специалистами. Это, во-первых, описание модулей над (неунитальными) алгебрами $\mathcal{K}(X)$ и $\mathcal{N}(X)$ компактных и ядерных операторов на банаховом пространстве X . Успехи в этом направлении скромны и на сегодняшний день ограничиваются гильбертовым случаем: для алгебр $\mathcal{K}(H)$ и $\mathcal{N}(H)$ операторов на гильбертовом пространстве H описаны односторонние замкнутые идеалы и гильбертовы модули [2, гл. 3, теоремы 2.5 и 2.12].

И, во-вторых, это описание замкнутых двусторонних идеалов в банаховой алгебре $\mathcal{B}(X)$ ограниченных операторов на банаховом пространстве X . Эта деятельность, начавшись с работы Калкина [3] 1941 г., привела к настоящему времени к описанию решеток замкнутых двусторонних идеалов в $\mathcal{B}(X)$ для нескольких классических пространств ($X = c_0, \ell_p, 1 \leq p < \infty$) и одного специального ($X = (\bigoplus \ell_2^n)_{c_0}$) — см. обзор в [4].

В свете этого довольно неожиданно должно оказаться наблюдение, что формулу (1) удастся обобщить на случай, когда X принадлежит весьма широкому классу так называемых стереотипных пространств со свойством стереотипной аппроксимации. Это и составляет предмет исследования нашей работы.

Стереотипные пространства изучались автором в работах [5–7], и определяются они следующим образом. Пусть X — локально выпуклое пространство

над $\mathbb{C}$. Обозначим через X^* пространство линейных непрерывных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X . Пространство X называется *стереотипным*, если естественное отображение

$$i_X: X \rightarrow (X^*)^*, \quad i_X(x)(f) = f(x), \quad x \in X, f \in X^*,$$

является изоморфизмом локально выпуклых пространств. Оказывается, что стереотипные пространства образуют весьма широкий класс, включающий в себя, в частности, все пространства Фреше (а значит, и все банаховы пространства).

Отсылая читателя за подробностями к [6], мы в нескольких фразах упомянем здесь те конструкции теории стереотипных пространств, которые понадобятся нам для формулировки главного результата.

Прежде всего, всякое замкнутое подпространство Y в стереотипном пространстве X обладает естественной структурой стереотипного пространства; пространство Y с этой структурой называется *непосредственным подпространством* в X . Несколько огрубляя картину, можно сказать, что факторпространство X/Y стереотипного пространства X по любому замкнутому подпространству Y также обладает структурой стереотипного пространства. Вместе эти две конструкции превращают класс $\mathbf{Ste}$ стереотипных пространств в предабелеву категорию (с линейными непрерывными отображениями в качестве морфизмов).

Далее, категория $\mathbf{Ste}$ обладает двумя естественными тензорными произведениями $\otimes$ и $\odot$, переходящими друг в друга под действием операции $X \mapsto X^*$:

$$(X \otimes Y)^* = X^* \odot Y^*, \quad (X \odot Y)^* = X^* \otimes Y^*.$$

Первое из них, $\otimes$, совпадает с обычным проективным тензорным произведением на классе пространств Фреше и потому называется *проективным*, а второе, $\odot$, совпадает с инъективным тензорным произведением на классе пространств Фреше со свойством (классической) аппроксимации и потому называется *инъективным*. Эти два тензорных произведения связаны так называемым *преобразованием Гротендика*

$$@_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow X \odot Y,$$

которое является естественным преобразованием функтора $\otimes$ в функтор $\odot$.

Стереотипная алгебра A определяется как стереотипное пространство с (ассоциативной) операцией умножения $(a, b) \mapsto a \cdot b$, такой, что для всякого компакта $K \subset A$ и любой окрестности нуля $U \subset A$ найдется такая окрестность нуля $V \subset A$, что $K \cdot V \subseteq U$ и $V \cdot K \subseteq U$. *Стереотипный модуль* M над A есть стереотипное пространство с (ассоциативной) операцией умножения $(a, x) \mapsto a \cdot x$ на элементы из A , такой, что для любых компактов $K \subset A$ и $L \subset M$ и любой окрестности нуля $U \subset M$ найдутся такие окрестности нуля $V \subset M$ и $W \subset A$, что $K \cdot V \subseteq U$ и $W \cdot L \subseteq U$. Эти определения эквивалентны тому, что операции умножения продолжаются до непрерывных отображений $A \otimes A \rightarrow A$ и $A \otimes M \rightarrow M$.

Для всякого стереотипного пространства X алгебра $\mathcal{L}(X)$ линейных непрерывных операторов на X обладает естественной топологией, превращающей

$\mathcal{L}(X)$ в стереотипную алгебру. Эта топология представляет собой некое усиление топологии равномерной сходимости на компактах, а точнее — результат применения к этой топологии так называемой операции псевдонасыщения (см. [6]).

Говорят, что стереотипное пространство X обладает *свойством стереотипной аппроксимации*, если тождественный оператор в $\mathcal{L}(X)$ приближается конечномерными (в топологии пространства $\mathcal{L}(X)$). Это равносильно тому, что для любого стереотипного пространства Y преобразование Гротендика

$$@_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow X \odot Y$$

является биморфизмом стереотипных пространств (т.е. инъективным отображением с плотным образом). Пространств со свойством стереотипной аппроксимации довольно много, потому что это свойство лежит между классическим свойством аппроксимации и существованием базиса в X .

Если зафиксировать X , то для всякого другого стереотипного пространства E тензорные произведения $E \otimes X$ и $E \odot X$ будут стереотипными модулями над стереотипной алгеброй $\mathcal{L}(X)$. Эти два модуля связаны между собой преобразованием Гротендика

$$@_{E,X} : E \otimes X \rightarrow E \odot X.$$

Если пространство X обладает свойством стереотипной аппроксимации, то это отображение будет биморфизмом (т.е. плотным вложением). Поэтому связь между $E \otimes X$ и $E \odot X$ удобно представлять себе как вложение с плотным образом

$$E \otimes X \subseteq E \odot X,$$

в котором $E \otimes X$ и $E \odot X$ можно в первом приближении мыслить как специального рода пополнения алгебраического тензорного произведения $E \otimes X$ относительно двух разных топологий (одна из которых слабее другой).

Основной результат настоящей работы состоит в том, что любой стереотипный $\mathcal{L}(X)$ -модуль M лежит между $E \otimes X$ и $E \odot X$ для некоторого однозначно определенного стереотипного пространства E :

$$E \otimes X \subseteq M \subseteq E \odot X.$$

Его более точная формулировка выглядит так:

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X — стереотипное пространство со свойством стереотипной аппроксимации. Тогда для всякого левого стереотипного модуля M над $\mathcal{L}(X)$ найдутся единственное (с точностью до изоморфизма) стереотипное пространство $E(M)$ и два биморфизма левых стереотипных $\mathcal{L}(X)$ -модулей (т.е. два $\mathcal{L}(X)$ -линейных непрерывных отображения с нулевым ядром и плотным образом) $\rho_M : E(M) \otimes X \rightarrow M$ и $\sigma_M : M \rightarrow E(M) \odot X$, такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \rho_M \nearrow & & \searrow \sigma_M \\ E(M) \otimes X & \xrightarrow{\quad @_{E(M),X} \quad} & E(M) \odot X \end{array} \quad (2)$$

При этом

- (а) $E(M)$ является непосредственным подпространством в M ;

(b) если $\mu: M \rightarrow N$ — морфизм стереотипных модулей над $\mathcal{L}(X)$, то однозначно определен морфизм стереотипных пространств $E(\mu): E(M) \rightarrow E(N)$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \nearrow \rho_M & \downarrow & \searrow \sigma_M & \\
 E(M) \otimes X & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & E(M) \odot X \\
 \downarrow E(\mu) \otimes \text{id}_X & & \downarrow \mu & & \downarrow E(\mu) \odot \text{id}_X \\
 & \nearrow \rho_N & N & \searrow \sigma_N & \\
 E(N) \otimes X & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & E(N) \odot X
 \end{array}
 \quad \text{(3)}$$

(c) отображение $E(\cdot)$ является ковариантным функтором из категории $\mathcal{L}(X)\mathbf{Ste}$ левых стереотипных модулей над $\mathcal{L}(X)$ в категорию $\mathbf{Ste}$ стереотипных пространств над $\mathbb{C}$, а семейства морфизмов $\{\rho_M; M \in \mathcal{L}(X)\mathbf{Ste}\}$ и $\{\sigma_M; M \in \mathcal{L}(X)\mathbf{Ste}\}$ являются естественными преобразованиями функтора $E(\cdot) \otimes X$ в тождественный функтор на категории $\mathcal{L}(X)\mathbf{Ste}$ и тождественного функтора в функтор $E(\cdot) \odot X$ соответственно.

Доказательство этого факта мы приведем ниже, а сейчас отметим два важных следствия из него.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть X — ядерное пространство Фреше с базисом¹⁾. Тогда для всякого левого модуля Фреше M над стереотипной алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) пространство Фреше E , такое, что M изоморфен проективному тензорному произведению пространств Фреше E и X ,

$$M \cong E \hat{\otimes} X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $E = E(M)$. Пункт (a) теоремы 1.1 означает в случае метризуемого модуля M , что E есть замкнутое подпространство в M , а значит, должно быть пространством Фреше. Отсюда в силу [6, Theorem 7.17 and 7.21] получаем цепочку изоморфизмов

$$\begin{array}{c}
 X \text{ ядерное} \\
 \downarrow \\
 E \otimes X \cong E \hat{\otimes} X \cong E \check{\otimes} X \cong E \odot X,
 \end{array}$$

¹⁾Существование базиса в X здесь постулируется для того, чтобы X заведомо обладало свойством стереотипной аппроксимации (и, как следствие, чтобы к X можно было применять теорему 1.1). Дело в том, что к настоящему времени неизвестно, совпадает ли свойство стереотипной аппроксимации с обычным свойством классической аппроксимации. Ясно только что из существования базиса следует свойство стереотипной аппроксимации, а из него следует свойство классической аппроксимации. Поэтому, если мы хотим, чтобы к X применялась теорема 1.1, нам приходится требовать существования базиса, чтобы сформулировать результат в общепринятых терминах. Поскольку это единственная причина, почему нам здесь нужно это условие, очень возможно, что его можно отбросить (даже если обнаружится, что стереотипная аппроксимация в действительности не совпадает с классической). Но автору такая редукция неизвестна.

означающую, что преобразование Гротендика $@_{E(M), X}: E(M) \otimes X \rightarrow E(M) \odot X$ является изоморфизмом пространств Фреше. Теперь из равенства $\sigma_M \circ \rho_M = @_{E(M), X}$ и из того факта, что σ_M и ρ_M — биморфизмы, следует, что σ_M и ρ_M — изоморфизмы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2 (характеризация простых модулей над $\mathcal{L}(X)$). *Если X — стереотипное пространство со свойством стереотипной аппроксимации, то для стереотипного левого модуля $M \neq 0$ над $\mathcal{L}(X)$ следующие условия эквивалентны:*

- (i) *любой мономорфизм $\mu: N \rightarrow M$ стереотипных левых $\mathcal{L}(X)$ -модулей является либо нулевым, либо изоморфизмом;*
- (ii) *любой эпиморфизм $\mu: M \rightarrow N$ стереотипных левых $\mathcal{L}(X)$ -модулей является либо нулевым, либо изоморфизмом;*
- (iii) $M \cong X$.

Для доказательства нам понадобится следующая

ЛЕММА 1.1. *Если X — локально выпуклое пространство и $a, b \in X$ — два ненулевых вектора, то найдется автоморфизм (т. е. биективное линейное отображение, непрерывное в обе стороны) $\varphi: X \rightarrow X$, переводящий a в b :*

$$\varphi(a) = b$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b = \lambda a$, то можно положить $\varphi(x) = \lambda x$. Поэтому важно рассмотреть случай, когда a и b линейно независимы. Рассмотрим линейную оболочку $P = \text{span}\{a, b\}$. Пусть Q — замкнутое подпространство в X , дополняющее P , $X = P \oplus Q$. Тогда оператор φ можно определить правилами $\varphi|_Q = \text{id}_Q$, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. 1. Докажем сначала импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) и (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Начнем с (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\mu: N \rightarrow X$ — ненулевой мономорфизм. Зафиксируем $n \in N$, такое, что $\mu(n) = a \neq 0$. Тогда (по лемме 1.1) векторы

$$x = \varphi(a) = \mu(\varphi \cdot n), \quad \varphi \in \mathcal{L}(X),$$

пробегают все пространство X . Значит, $\mu: N \rightarrow X$ — сюръекция и, следовательно, биекция. Нам остается проверить, что обратное отображение $\mu^{-1}: X \rightarrow N$ непрерывно. Пусть x_i — направленность в X , стремящаяся к нулю,

$$x_i \xrightarrow{X} 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Покажем, что тогда направленность $\mu^{-1}(x_i)$ стремится к нулю в N . Зафиксируем для этого функционал $g \in X^*$, такой, что $g(a) = 1$, и заметим, что

$$g \odot x_i \cdot n = g \odot x_i \cdot \mu^{-1}(a) = \mu^{-1}(g \odot x_i \cdot a) = \mu^{-1}(g(a) \cdot x_i) = \mu^{-1}(x_i).$$

Теперь получаем

$$x_i \xrightarrow{X} 0 \implies g \odot x_i \xrightarrow{\mathcal{L}(X)} 0 \implies \mu^{-1}(x_i) = g \odot x_i \cdot n \xrightarrow{N} 0.$$

После того как импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) доказана, импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) получается переходом к сопряженным модулям. Чтобы это понять, нужно заметить, что алгеброй с противоположным умножением для $\mathcal{L}(X)$ будет алгебра $\mathcal{L}(X^*)$ операторов на сопряженном пространстве,

$$\mathcal{L}(X)^{\text{op}} \cong \mathcal{L}(X^*)$$

(изоморфизм определяется переходом к сопряженному отображению $\varphi \mapsto \varphi^*$). Поэтому если дан ненулевой эпиморфизм $\mu: X \rightarrow N$ левых $\mathcal{L}(X)$ -модулей, то сопряженное отображение $\mu^*: N^* \rightarrow X^*$ будет ненулевым мономорфизмом правых $\mathcal{L}(X)$ -модулей, или, что то же самое, ненулевым мономорфизмом левых модулей над $\mathcal{L}(X)^{\text{op}} = \mathcal{L}(X^*)$. Про такие мономорфизмы мы уже доказали, что они являются изоморфизмами. Значит, $\mu^*: N^* \rightarrow X^*$ — изоморфизм и, следовательно, $\mu: X \rightarrow N$ — тоже изоморфизм.

2. Теперь убедимся, что, обратно, справедливы импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) и (ii) $\Rightarrow$ (iii). Здесь нужно лишь проверить, что в случаях (i) и (ii) имеет место равенство $E(M) = \mathbb{C}$. Действительно, если это не так, т. е. $E(M) \neq \mathbb{C}$, то можно взять вложение $\eta: \mathbb{C} \rightarrow E(M)$, не являющееся изоморфизмом, и тогда композиция

$$X = \mathbb{C} \otimes X \xrightarrow{\eta \otimes \text{id}_X} E(M) \otimes X \xrightarrow{\rho_M} M,$$

не будучи нулевой, не является изоморфизмом. Значит, условие (i) не может выполняться.

Точно так же при $E(M) \neq \mathbb{C}$ можно взять ненулевую проекцию $\theta: E(M) \rightarrow \mathbb{C}$, не являющуюся изоморфизмом, и тогда композиция

$$M \xrightarrow{\sigma_M} E(M) \odot X \xrightarrow{\theta \odot \text{id}_X} \mathbb{C} \odot X = X$$

не будет нулевой (потому что σ_M — эпиморфизм, а значит, из равенства $\theta \odot \text{id}_X \circ \sigma_M = 0$ должно следовать $\theta \odot \text{id}_X = 0$, т. е. $\theta = 0$) и не является изоморфизмом (потому что для ненулевых $x \in X$ и $e \in \text{Ker}(\theta)$ мы получаем $e \otimes x \neq 0$ и, значит, $\rho_M(e \otimes x) \neq 0$, но, с другой стороны, $(\theta \odot \text{id}_X)[\sigma_M(\rho_M(e \otimes x))] = \theta(e) \odot x = 0$). Следовательно, условие (ii) не может выполняться. $\square$

§2. Доказательство теоремы 1.1

Мы всюду используем терминологию и обозначения работы [6].

ЛЕММА 2.1. Пусть X — стереотипное пространство и $M \in \mathcal{L}(X)\text{Ste}$. Тогда

$$\forall g \neq 0 \in X^* \quad \forall a \in X \quad \forall f \in X^* \quad \forall m \in M \quad \exists n \in M \quad f \odot a \cdot m = g \odot a \cdot n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f = 0$, то можно положить $n = 0$. Поэтому мы будем считать, что $f \neq 0$. Тогда по лемме 1.1 найдется автоморфизм $\varphi^*: X^* \rightarrow X^*$, такой, что

$$\varphi^*(f) = g.$$

Ему соответствует автоморфизм $\varphi: X \rightarrow X$. Положив $n = \varphi^{-1} \cdot m$, мы получим

$$f \odot a \cdot m = f \odot a \cdot \varphi \cdot \varphi^{-1} \cdot m = \underbrace{(f \circ \varphi)}_{\varphi^*(f)} \odot a \cdot \underbrace{\varphi^{-1} m}_n = g \odot a \cdot n. \quad \square$$

ЛЕММА 2.2. Пусть X и E — произвольные стереотипные пространства, и пусть $a \in X$ — фиксированный ненулевой вектор. Обозначим через $E \otimes a$ и $E \odot a$ непосредственные подпространства в $E \otimes X$ и $E \odot X$, образованные векторами вида $e \otimes a$ и $e \odot a$ ($e \in E$) соответственно. Рассмотрим отображения

$$\zeta: E \rightarrow E \otimes a = \{e \otimes a; e \in E\}, \quad \zeta(e) = e \otimes a,$$

u

$$\eta: E \rightarrow E \odot a = \{e \odot a; e \in E\}, \quad \eta(e) = e \odot a.$$

Пусть, кроме того, $\tilde{\mathbb{Q}}$ обозначает ограничение преобразования Гротендика $\mathbb{Q}: E \otimes X \rightarrow E \odot X$ на подпространство $E \otimes a$:

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}|_{E \otimes a}$$

Тогда в (коммутативной) диаграмме

$$\begin{array}{ccc} E \otimes a & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{Q}}} & E \odot a \\ & \searrow \zeta \quad \nearrow \eta & \\ & E & \end{array}$$

все отображения являются изоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать, что ζ и η являются изоморфизмами. Для этого нужно рассмотреть их как отображения со значениями в пространствах $E \otimes X$ и $E \odot X$, т.е. как отображения $\zeta: E \rightarrow E \otimes X$ и $\eta: E \rightarrow E \odot X$, и заметить, что тогда они будут коретракциями. Действительно, если зафиксировать функционал $g \in X^*$, такой, что $g(a) = 1$, то, положив

$$\pi: E \otimes X \rightarrow E, \quad \pi(e \otimes x) = g(x)e, \quad e \in E,$$

и

$$\tau: E \odot X = E \otimes X^* \rightarrow E, \quad \tau(\varphi) = \varphi(g), \quad \varphi \in E \otimes X^*,$$

мы получим, во-первых, что

$$\forall e \in E \quad \pi(\zeta(e)) = \pi(e \otimes a) = g(a) \cdot e = e,$$

т.е. $\pi \circ \zeta = \text{id}_E$, и, во-вторых, что

$$\forall e \in E \quad \tau(\eta(e)) = \tau(e \odot a) = (e \odot a)(g) = g(a) \cdot e = e,$$

т.е. $\tau \circ \eta = \text{id}_E$. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. 1. Зафиксируем с начала и до конца доказательства элемент $a \in X$ и функционал $g \in X^*$, такие, что

$$g(a) = 1.$$

2. Заметим, что оператор $g \odot a$ является проектором:

$$g \odot a \cdot g \odot a = \underbrace{g(a)}_1 \cdot g \odot a = g \odot a.$$

Поэтому отображение

$$\pi: M \rightarrow M, \quad \pi(n) = g \odot a \cdot n,$$

тоже является проектором: $\pi^2 = \pi$.

3. Положим

лемма 2.1

$$E(M) = \pi(M) = \{g \odot a \cdot n; n \in M\} \stackrel{\downarrow}{=} \{f \odot a \cdot m; f \in X^*, m \in M\}. \quad (4)$$

Поскольку π — проектор, $E(M)$ является замкнутым подпространством в M . Мы наделяем его топологией непосредственного подпространства в M . Заметим, кроме того, что, поскольку проектор $\pi: M \rightarrow E(M)$ оставляет на месте элементы своего образа $E(M)$, выполняется тождество

$$g \odot a \cdot e = \pi(e) = e, \quad e \in E(M). \quad (5)$$

4. В силу последнего равенства в цепочке (4) для любых $f \in X^*$ и $m \in M$ имеем $f \odot a \cdot m \in E(M)$. Поэтому определено отображение

$$\sigma_M: M \rightarrow E(M) \odot X = E(M) \otimes X^*, \quad \sigma_M(m)(f) = f \odot a \cdot m.$$

Заметим, что

1) σ_M является морфизмом $\mathcal{L}(X)$ -модулей, так как при $\alpha \in \mathcal{L}(X)$, $m \in M$, $f \in X^*$ получаем

$$\sigma_M(\alpha m)(f) = f \odot a \cdot \alpha m = (f \circ \alpha) \odot a \cdot m = \sigma_M(m)(f \circ \alpha) = \{\alpha[\sigma_M(m)]\}(f),$$

откуда следует, что $\sigma_M(\alpha m) = \alpha[\sigma_M(m)]$;

2) σ_M инъективно, поскольку равенство $\sigma_M(m) = 0$ рождает следующую цепочку импликаций: $f \odot a \cdot m = 0$ для любого $f \in X^* \implies f \odot \alpha(a) \cdot m = \alpha \cdot f \odot a \cdot m = 0$ для любых $f \in X^*$ и $\alpha \in \mathcal{L}(X) \implies f \odot x \cdot m = 0$ для любых $f \in X^*$ и $x \in X \implies \beta \cdot m = 0$ для произвольного конечномерного оператора $\beta \in \mathcal{L}(X) \implies 1 \cdot m = m = 0$ (поскольку конечномерные операторы аппроксимируют единичный в $\mathcal{L}(X)$).

5. Определим отображение ρ_M формулой

$$\rho_M: E(M) \otimes X \rightarrow M, \quad \rho_M(e \otimes x) = g \odot x \cdot e, \quad x \in X, e \in E(M). \quad (6)$$

Из непрерывности билинейных форм $(e, x) \mapsto e \otimes x$, $(f, x) \mapsto f \odot x$ и $(\alpha, m) \mapsto \alpha \cdot m$ следует, что билинейная форма $(e, x) \mapsto g \odot x \cdot e$ тоже непрерывна (в смысле определения [6]). Поэтому в силу универсальности тензорного произведения $\otimes$ (см. [6, Theorem 7.3]) формула (6) однозначно определяет непрерывное отображение $\rho_M: E(M) \otimes X \rightarrow M$.

Заметим, что

1) ρ_M является морфизмом $\mathcal{L}(X)$ -модулей; это следует из цепочки равенств $\rho_M(\alpha \cdot e \otimes x) = \rho_M(e \otimes \alpha(x)) = g \odot \alpha(x) \cdot e = \alpha \cdot g \odot x \cdot e = \alpha \cdot \rho_M(e \otimes x)$, $\alpha \in \mathcal{L}(X)$;

2) ρ_M — эпиморфизм; чтобы это понять, зафиксируем $m \in M$ и заметим, что, поскольку для всякого $f \in X^*$ вектор $e = f \odot a \cdot m$ лежит в $E(M)$, справедливо тождество

$$\rho_M(\underbrace{(f \odot a \cdot m)}_e \otimes x) = g \odot x \cdot \underbrace{f \odot a \cdot m}_e = f \odot x \cdot m,$$

из которого следует, что элементы вида $f \odot x \cdot m$ принадлежат образу отображения ρ_M ; это, в свою очередь, означает, что элементы вида $\beta \cdot m$, где β — конечномерный оператор, тоже лежат в $\text{Im } \rho_M$; поскольку конечномерные операторы аппроксимируют единичный в $\mathcal{L}(X)$, элемент $1 \cdot m = m$ тоже принадлежит $\text{Im } \rho_M$ (по определению считается, что образ $\text{Im } \mu$ морфизма $\mu: X \rightarrow Y$ есть замыкание элементов вида $\mu(x)$, $x \in X$); это верно для любого $m \in M$, а значит, ρ_M — действительно эпиморфизм.

6. Докажем теперь коммутативность диаграммы (2), т. е. справедливость равенства

$$\sigma_M \circ \rho_M = \textcircled{\text{O}}_{E(M), X}.$$

Для этого нужно зафиксировать $x \in X$ и $e \in E(M)$ и проверить, что

$$\sigma_M(\rho_M(e \odot x)) = e \odot x.$$

Действительно, для любого $f \in X^*$ получаем

$$\begin{aligned} \sigma_M(\underbrace{\rho_M(e \odot x)}_{\substack{\parallel \\ g \odot x \cdot e \\ \text{в силу (6)}}})(f) &= \sigma_M(g \odot x \cdot e)(f) = \underbrace{f \odot a \cdot g \odot x}_{\substack{\parallel \\ f(x) \cdot g \odot a \\ \text{в силу [6, (9.7)]}}}(f) \cdot e = f(x) \cdot \underbrace{g \odot a \cdot e}_{\substack{\parallel \\ e \\ \text{в силу (5)}}} \\ &= f(x) \cdot e = [e \odot x](f) \end{aligned}$$

7. Покажем, что ρ_M и σ_M — биморфизмы. Это следует из диаграммы (2): поскольку X обладает свойством стереотипной аппроксимации, преобразование Гротендика $@_{E(M), X}$ должно быть биморфизмом. Значит, во-первых,

$$E(M) \odot X = \text{Im } @_{E(M), X} \subseteq \text{Im } \sigma_M$$

и поэтому σ_M — эпиморфизм, а поскольку, как мы уже показали, σ_M — мономорфизм, мы получаем, что σ_M — биморфизм.

И, во-вторых,

$$\text{Ker } \rho_M \subseteq \text{Ker } @_{E(M), X} = 0,$$

а значит, ρ_M — мономорфизм; кроме того, как мы знаем, ρ_M — эпиморфизм. Поэтому ρ_M должен быть биморфизмом.

8. Покажем теперь, что если для модуля M имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \rho \nearrow & & \searrow \sigma \\ E \otimes X & \xrightarrow{\quad @_{E, X} \quad} & E \odot X \end{array} \quad (7)$$

где ρ и σ — биморфизмы, то пространство E автоматически изоморфно $E(M)$.

Это можно сделать, построив диаграмму (7) до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & & E(M) & \xleftarrow{\text{id}} & E(M) & \\ & & \swarrow \pi & & \searrow \varepsilon & \\ & & M & & & \\ \tilde{\rho} \nearrow & & \rho \nearrow & & \searrow \sigma & \\ E \otimes X & \xrightarrow{\quad @_{E, X} \quad} & E \odot X & & & \\ \varepsilon^{\odot} \nearrow & & & & \searrow \pi^{\odot} & \\ E \otimes a & \xrightarrow{\quad \tilde{@} \quad} & E \odot a & & & \end{array} \quad (8)$$

в которой ε и $\varepsilon^{\odot}$ — естественные вложения, π и $\pi^{\odot}$ — отображения умножения на одномерный оператор $g \odot a$, а $\tilde{\rho}$, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{@}$ определяются формулами

$$\tilde{\rho} = \pi \circ \rho \circ \varepsilon^{\odot}, \quad \tilde{\sigma} = \pi^{\odot} \circ \sigma \circ \varepsilon, \quad \tilde{@} = \pi^{\odot} \circ @_{E, X} \circ \varepsilon^{\odot}.$$

Отметим здесь два факта:

(i) $\tilde{\mathbb{Q}}$ есть ограничение отображения $\mathbb{Q}_{E,X}$ на подпространство $E \otimes a$,

$$\tilde{\mathbb{Q}}(e \otimes a) = e \odot a, \quad e \in E,$$

и поэтому по лемме 2.2 является изоморфизмом;

(ii) $\tilde{\sigma}$ есть мономорфизм.

Действительно, во-первых, для всякого $e \in E$ получаем

$$e \otimes a \xrightarrow{\varepsilon^{\odot}} e \otimes a \xrightarrow{\mathbb{Q}_{E,X}} e \odot a \xrightarrow{\pi^{\odot}} (g \odot a) \cdot (e \odot a) = g(a) \cdot (e \odot a) = e \odot a.$$

Во-вторых, если $\tilde{\sigma}(e) = 0$ для какого-нибудь элемента $e \in E(M)$, то

$$0 = \tilde{\sigma}(e) = \pi^{\odot}(\sigma(\varepsilon(e))) = g \odot a \cdot \sigma(e) = \sigma(\underbrace{g \odot a \cdot e}_e) = \sigma(e),$$

$\parallel$
 e
 в силу (5)

а поскольку σ — мономорфизм, получаем, что $e = 0$.

Выбросив теперь из диаграммы (8) внутренние стрелки, мы придем к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & E(M) & \\ \tilde{\rho} \nearrow & & \searrow \tilde{\sigma} \\ E \otimes a & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{Q}}} & E \odot a \end{array} \quad (9)$$

в которой $\tilde{\mathbb{Q}}$ — изоморфизм (в силу (i)). Значит, $\tilde{\sigma}$ — ретракция. В то же время (в силу (ii)) $\tilde{\sigma}$ является мономорфизмом. Следовательно, $\tilde{\sigma}$ — изоморфизм и вообще все стрелки в (9) являются изоморфизмами. Таким образом, снова применяя лемму 2.2, получаем цепочку изоморфизмов

$$E \cong E \otimes a \cong E \odot a \cong E(M).$$

9. Нам остается показать, что если $\mu: M \rightarrow N$ — морфизм стереотипных $\mathcal{L}(X)$ -модулей, то определен морфизм $E(\mu): E(M) \rightarrow E(N)$, такой, что коммутативна диаграмма (3). Для этого нужно заметить, что $E(M)$ и $E(N)$ определены формулой (4),

$$E(M) = \{g \odot a \cdot m; m \in M\}, \quad E(N) = \{g \odot a \cdot n; n \in N\},$$

и, поскольку отображение $\mu: M \rightarrow N$ коммутирует со всеми операторами $\alpha \in \mathcal{L}(X)$, в частности с $\alpha = g \odot a$, оно должно переводить $E(M)$ в $E(N)$. Поэтому мы можем положить $E(\mu) = \mu|_{E(M)}$.

Проверим коммутативность диаграммы (3). Коммутативность правого параллелограмма, т. е. равенство

$$(E(\mu) \odot \text{id}_X) \circ \sigma_M = \sigma_N \circ \mu,$$

проверяется прямым вычислением: для $m \in M$ и $f \in X^*$ имеем

$$\begin{aligned} [(E(\mu) \odot \text{id}_X) \circ \sigma_M](m)(f) &= (E(\mu) \odot \text{id}_X)[\sigma_M(m)](f) = (E(\mu) \odot \text{id}_X^*)[\sigma_M(m)](f) \\ &= (E(\mu) \circ \sigma_M(m) \circ \text{id}_X^*)(f) = E(\mu)[\sigma_M(m)(f)] = \mu[f \odot a \cdot m] \\ &= f \odot a \cdot \mu[m] = \sigma_N(\mu(m))(f) = [\sigma_N \circ \mu](m)(f). \end{aligned}$$

Затем таким же прямым вычислением проверяется коммутативность левого параллелограмма, т. е. равенство

$$\mu \circ \rho_M = \rho_N \circ (\mathbf{E}(\mu) \otimes \text{id}_X);$$

таким образом, при $e \in \mathbf{E}(M)$ и $x \in X$ получаем

$$\mu(\rho_M(e \otimes x)) = \mu(g \odot x \cdot e) = g \odot x \cdot \mu(e) = \rho_N(\mu(e) \otimes x) = \rho_N(\mathbf{E}(\mu)(e) \otimes x).$$

И наконец, коммутативность прямоугольника очевидна:

$$(\mathbf{E}(\mu) \odot \text{id}_X) \circ @_{\mathbf{E}(M), X} = @_{\mathbf{E}(N), X} \circ (\mathbf{E}(\mu) \otimes \text{id}_X). \quad \square$$

Автор выражает признательность рецензентам за ряд весьма полезных замечаний, способствовавших улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. Мир, М., 1986.
2. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. Наука, М., 1989.
3. *Calkin J. W.* Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. *Ann. of Math.*, **42**, 839–873 (1941).
4. *Laustsen N. J., Loy R. J., Read C. J.* The lattice of closed ideals in the Banach algebra of operators on certain Banach spaces. *J. Funct. Anal.*, **214**, 106–131 (2004).
5. *Akbarov S. S.* Stereotype spaces, algebras, homologies: An outline. In: *Topological Homology* (A. Ya. Helemskii, ed.), Nova Science Publishers, 2000, pp. 1–29.
6. *Akbarov S. S.* Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra. *J. Math. Sci.*, **113**, No. 2, 179–349 (2003).
7. *Akbarov S. S.* Pontryagin duality and topological algebras. In: *Topological Algebras, Their Applications, and Related Topics*, Banach Center Publications series, Vol. 67, 2005, pp. 55–71.

Отдел математики ВИНТИ
akbarov@viniti.ru

Поступило в редакцию
13 октября 2004 г.