Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Быковский, Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 69–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:07:33

Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна*

© 2006. В. А. Быковский

В конце девятнадцатого века были предложены два многомерных обобщения классического алгоритма цепных дробей: одно — Ф. Клейном [1], а второе — Г. Ф. Вороным [2] и независимо Г. Минковским [3]. В каждом из них среди узлов s -мерной решетки

$$\Gamma = \{m_1\gamma^{(1)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

с базисными узлами $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)}$ из $\mathbb{R}^s$ выделяется и изучается специальное подмножество узлов, $\mathfrak{N}(\Gamma)$ и $\mathfrak{M}(\Gamma)$ соответственно.

В конструкции Клейна $\mathfrak{N}(\Gamma)$ состоит из всех вершин многогранников Клейна $\mathcal{K}_\theta(\Gamma)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$. Напомним, что $\mathcal{K}_\theta(\Gamma)$ определяется как выпуклая оболочка ненулевых узлов решетки Γ , содержащихся в s -гранном угле

$$\{(\theta_1 t_1, \dots, \theta_s t_s) \in \mathbb{R}^s \mid t_i \in [0, \infty), i = 1, \dots, s\}. \quad (1)$$

Недавно выпущенная популярная брошюра В. И. Арнольда [4] содержит много интересных фактов по поводу этой конструкции.

В конструкции Вороного и Минковского $\mathfrak{M}(\Gamma)$ состоит из всех ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, для которых не существует ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ из Γ с $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при всех $i = 1, \dots, s$ и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ хотя бы при одном $i = j$. Следуя Вороному [2], мы будем называть элементы множества $\mathfrak{M}(\Gamma)$ *относительными минимумами* (см. также [5, гл. X, §8] по этому поводу).

Хорошо известно, что для двумерных решеток $\mathfrak{N}(\Gamma) = \mathfrak{M}(\Gamma)$, за исключением решеток

$$\Gamma(u, v) = \{(m_1 u + m_2 v, m_1 v - m_2 u) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

с положительными вещественными u и v , для которых

$$\mathfrak{N}(\Gamma(u, v)) = \{\pm(2u, 0), \pm(0, 2v)\},$$

$$\mathfrak{M}(\Gamma(u, v)) = \{\pm(2u, 0), \pm(u, v), \pm(u, -v), \pm(0, 2v)\}.$$

Кроме того, для решеток

$$\Gamma_\alpha = \{m_1(1, \alpha) + m_2(0, 1) \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

с $\alpha \in (0, 1/2)$

$$\mathfrak{N}(\Gamma_\alpha) = \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha) = \{\pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i) \mid i = 0, 1, \dots\},$$

где $Q_0 = 0$, $P_0 = 1$, а для $i \geq 1$

$$P_i/Q_i = [0; t_1, \dots, t_{i-1}]$$

есть i -я подходящая дробь к

$$\alpha = [0; t_1, \dots, t_i, \dots].$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №04-01-97000, и INTAS, грант №03-51-5070.

Последнее равенство представляет собой разложение числа α в цепную дробь с натуральными t_i (неполные частные).

Особо отметим, что конструкция Вороного и Минковского мотивирована классической теоремой Лагранжа о наилучших приближениях с помощью подходящих дробей (см. [6]).

Среди специалистов широко распространено мнение о том, что, начиная с размерности три, описанные выше конструкции приводят к разным множествам. На самом деле это не совсем так. Об этом свидетельствует

ТЕОРЕМА. *Для любой s -мерной решетки Γ имеет место включение $\mathfrak{N}(\Gamma) \subset \mathfrak{M}(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого набора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ из ± 1 определим решетку

$$\Gamma^{(\theta)} = \{(\theta_1\gamma_1, \dots, \theta_s\gamma_s) \mid \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \Gamma\}.$$

Из определений немедленно следует, что преобразование

$$x = (x_1, \dots, x_s) \mapsto (\theta_1x_1, \dots, \theta_sx_s) = x^{(\theta)}$$

переводит $\mathfrak{N}(\Gamma)$ в $\mathfrak{N}(\Gamma^{(\theta)})$ и $\mathfrak{M}(\Gamma)$ в $\mathfrak{M}(\Gamma^{(\theta)})$. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для вершин многогранника Клейна $\mathcal{K}_+(\Gamma) = \mathcal{K}_\theta(\Gamma)$ с $\theta_1 = \dots = \theta_i = \dots = \theta_s = 1$.

Пусть γ — произвольная вершина из $\mathcal{K}_+(\Gamma)$. Назовем плоскость

$$\pi(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^s \mid \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_sx_s = 1\}$$

допустимой для γ , если

- 1) $\alpha_i \geq 0$ при всех $i = 1, \dots, s$;
- 2) $\langle \alpha, \gamma \rangle = 1$ и для любого ненулевого узла γ' решетки Γ в угле (1) выполняется неравенство $\langle \alpha, \gamma' \rangle \geq 1$.

Равенство $\langle \alpha, \gamma \rangle = 1$ означает, что γ лежит на плоскости $\pi(\alpha)$. Так как γ — вершина многогранника Клейна $\mathcal{K}_+(\Gamma)$, то найдутся s допустимых для γ плоскостей

$$\pi(\alpha^{(1)}), \dots, \pi(\alpha^{(s)})$$

с линейно независимыми векторами $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}$.

Предположим, что γ не есть относительный минимум решетки Γ . Тогда найдется ненулевой узел η решетки Γ , для которого $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при всех i и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ при некотором $i = j$. Заметим, что оба узла $\gamma + \eta$ и $\gamma - \eta$ расположены в угле (1). По условию 2)

$$1 \leq \langle \alpha^{(k)}, \gamma \pm \eta \rangle = 1 \pm \langle \alpha^{(k)}, \eta \rangle.$$

Поэтому $\langle \alpha^{(k)}, \eta \rangle = 0$ при всех $k = 1, \dots, s$. Но векторы $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}$ линейно независимы. Следовательно, узел η нулевой и мы пришли к противоречию. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klein F.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, No. 3, 357–359 (1895). 2. *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 1. Изд-во АН УССР, Киев, 1952. 3. *Minkowski H.* Ann. Sci. École Norm. Sup., Ser. 3, **13**, No. 2, 41–60 (1896). 4. *Арнольд В. И.* Цепные дроби. МЦНМО, М., 2000. 5. *Касселс Дж.* Введение в геометрию чисел. Мир, М., 1965. 6. *Касселс Дж.* Введение в теорию диофантовых приближений. ИЛ, М., 1961.

Хабаровское отделение Института прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук
e-mail: vab@iam.khv.ru

Поступило в редакцию
21 апреля 2004 г.