Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко,
О суммах проекторов, *Функци. анализ и его прил.*,
2002, том 36, выпуск 3, 20–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:21:31

УДК 517.98

О суммах проекторов*

© 2002. С. А. КРУГЛЯК, В. И. РАБАНОВИЧ, Ю. С. САМОЙЛЕНКО

Введение

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство (конечномерное или счетно-мерное). Ортопроектор (или просто проектор) — это самосопряженный идемпотентный оператор $P = P^2 = P^*$.

Известна нерешенная задача теории операторов: какие самосопряженные операторы A являются суммами n ортопроекторов (см. [1] и приведенную там библиографию) ($n \in \mathbb{N}$ фиксированно)? В настоящей статье мы изучаем эту задачу для операторов αI ($\alpha \in \mathbb{R}$), кратных единичному оператору I . В §1 приведено описание множеств $\dots \subset \Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \text{существуют проекторы } P_1, \dots, P_n \in L(H), \text{ такие, что } \sum_{k=1}^n P_k = \alpha I\} \subset \Sigma_{n+1} \subset \dots$. В §2 мы изучаем задачу описания с точностью до унитарной эквивалентности наборов проекторов $P_1, \dots, P_n$, таких, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I$, $\alpha \in \Sigma_n$.

Вопрос о структуре множества Σ_n можно сформулировать и на языке теории представлений $*$ -алгебр. Введем $*$ -алгебру $\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k, \sum_{k=1}^n p_k = \alpha e \rangle$, порожденную n самосопряженными идемпотентами, подчиняющимися соотношению $\sum_{k=1}^n p_k = \alpha e$, где e — единица алгебры. Тогда Σ_n есть множество тех $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых у $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ существует хотя бы одно $*$ -представление в $L(H)$. Отметим, что с решения подобного вопроса (при каких значениях параметра $\tau \in \mathbb{R}$ существует хотя бы одно представление $*$ -алгебры $\mathcal{I}\mathcal{L}_{\infty,\tau} = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n, \dots \mid p_k^2 = p_k = p_k^* (k \in \mathbb{N}), p_k p_j = p_j p_k, |k - j| \geq 2, p_k p_{k\pm 1} p_k = \tau p_k \rangle$) берет начало известный цикл работ В. Джонса (см. [2]). Задача же описания наборов проекторов $P_1, \dots, P_n$, таких, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha \cdot I$, $\alpha \in \Sigma_n$, есть задача описания $*$ -представлений $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in \Sigma_n$.

При $n \leq 4$ множество Σ_n дискретно и описание этого множества и соответствующих представлений относится к математическому фольклору (обзор литературы и результатов см. в п. 1.1.2). Однако при $n \geq 5$ множество Σ_n содержит уже целые отрезки. В статьях [3, 4] было доказано, что при $n \geq 4$ справедливы следующие включения:

$$\begin{aligned} & \left\{ 0, 1, 1 + \frac{1}{n-1}, \left[1 + \frac{1}{n-2}, n-1 - \frac{1}{n-2} \right], n-1 - \frac{1}{n-1}, n-1, n \right\} \supset \Sigma_n \\ & \supset \left\{ 0, 1, 1 + \frac{k}{k(n-3)+2} (k \in \mathbb{N}), \right. \\ & \quad \left. \left[1 + \frac{1}{n-3}, n-1 - \frac{1}{n-3} \right], n-1 - \frac{k}{k(n-3)+2} (k \in \mathbb{N}), n-1, n \right\}. \end{aligned}$$

*Работа частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант № 01.07/071.

Введем при $n \geq 4$ дискретные множества

$$\Lambda_n^1 = \left\{ 0, 1 + \frac{1}{n-1}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-1}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{(n-1)}}}} \right\},$$

$$\Lambda_n^2 = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{n-2}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-2}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{(n-2)}}}} \right\}.$$

В разд. 1.3 доказано, что $\Sigma_n = \{\Lambda_n^1, \Lambda_n^2, [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}], n - \Lambda_n^1, n - \Lambda_n^2\}$. В дальнейшем точки из множеств Λ_n^1 , Λ_n^2 и $n - \Lambda_n^1$, $n - \Lambda_n^2$ мы будем называть точками дискретного спектра задачи, а точки из $[\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}]$ — точками непрерывного спектра.

Найти все точки из Σ_n позволил новый подход к описанию множества Σ_n , существенным в котором является введение двух функторов Φ^+ и Φ^- на категориях $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$ *-представлений алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ (см. [5]), которые мы будем называть функторами Кокстера, так как их строение и роль при описании представлений алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ во многом аналогичны строению и роли функторов Кокстера в [6].

Более того, функторы Кокстера Φ^+ и Φ^- позволили (в разд. 2.1) полностью описать все неприводимые *-представления алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ с точностью до унитарной эквивалентности в точках $\alpha \in \Lambda_n^1 \cup \Lambda_n^2 \cup n - \Lambda_n^1 \cup n - \Lambda_n^2$ дискретного спектра и многое сказать (в разд. 2.2 и разд. 2.3) о *-представлениях алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\alpha \in [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}]$.

§1. Описание множества Σ_n

1.1. Предварительные сведения.

1.1.1. Элементарные свойства множества Σ_n .

Предложение 1. (a) $\Sigma_n \subset [0, n]$;

(b) $\{0, 1, \dots, n\} \subset \Sigma_n$;

(c) $(0, 1) \cap \Sigma_n = \emptyset$;

(d) $(1, 1 + \frac{1}{n-1}) \cap \Sigma_n = \emptyset$;

(e) $\alpha \in \Sigma_n \iff n - \alpha \in \Sigma_n$.

Доказательство. (a) $0 \leq \alpha \leq n$, так как в эквивалентных равенствах $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I$, $\sum_{k=1}^n (I - P_k) = (n - \alpha)I$ слева стоят положительные операторы.

(b) Если P_k — проекторы в одномерном пространстве, причем m из них тождественные, а остальные нулевые, то $\sum_{k=1}^n P_k = mI$.

(c) $\Sigma_n \cap (0, 1) = \emptyset$, так как если $0 < \alpha < 1$ и $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I$, то хотя бы один проектор P_j отличен от 0. Тогда $\sum_{k \neq j}^n P_k = \alpha I - P_j$. Но в левой части приведенного равенства стоит неотрицательный оператор, а в правой — оператор, не являющийся таковым. Противоречие.

(d) Приведем сначала простое доказательство, предполагая, что $\dim H = m < \infty$. Пусть P_i , $i = 1, \dots, n$, — проекторы в пространстве H , $0 < \varepsilon$ и сумма проекторов равна $(1 + \varepsilon)I$. Тогда для любого k , $k = 1, \dots, n$, имеем $\sum_{i \neq k}^n P_i = (1 + \varepsilon)I - P_k$ и $\sum_{i \neq k}^n \text{tr}(P_i) = (1 + \varepsilon)m - \text{tr}(P_k)$ (m — размерность пространства H). Так как $\sum_{i \neq k}^n \text{tr}(P_i) \geq \text{rang}(\sum_{i \neq k}^n P_i) = m$, то $\text{tr}(P_k) \leq \varepsilon m$. В силу

произвольности выбора k имеем $(1 + \varepsilon)m = \sum_{i=1}^n \text{tr}(P_i) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon m = mn\varepsilon$, откуда $\varepsilon \geq 1/(n-1)$.

В случае сепарабельного гильбертова пространства H для доказательства свойства (d) нам понадобятся следующие леммы о спектре суммы проекторов:

ЛЕММА 1. Пусть дано число τ , $1 \geq \tau > 0$, и проекторы P_1, P_2 . Тогда если $\lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2)$, $\lambda \neq 0, \tau, 1, 1 + \tau$, то $1 + \tau - \lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы достаточно проверить для неприводимых пар проекторов. Неприводимые пары проекторов бывают лишь одномерные и двумерные. Для одномерных пар проекторов $\lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2) \subset \{0, \tau, 1, 1 + \tau\}$. Любая двумерная неприводимая пара проекторов унитарно эквивалентна паре $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi \end{pmatrix}$ для некоторого ϕ , $0 < \phi < \pi/2$, а для этой пары утверждение леммы проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $0 < \varepsilon < \tau \leq 1$ и $\tau P_1 + P_2 \leq (1 + \varepsilon)I$, то $\tau P_1 + P_2 \geq (\tau - \varepsilon)P_{\text{Im } P_1 + \text{Im } P_2}$, где $P_{\text{Im } P_1 + \text{Im } P_2}$ — проектор на замыкание подпространства $\text{Im } P_1 + \text{Im } P_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует число $\lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2)$, такое, что $0 < \lambda < \tau - \varepsilon$. Тогда $1 + \tau - \lambda > 1 + \varepsilon$. Но $1 + \tau - \lambda \in \sigma(\tau P_1 + P_2)$ по лемме 1, что противоречит условию следствия.

В следующей лемме рассматривается случай большего числа проекторов. Пусть $P_1, \dots, P_k$ — проекторы в гильбертовом пространстве. Введем в H подпространства $\mathfrak{H}_k$ как замыкания подпространств $\text{Im } P_1 + \dots + \text{Im } P_k$.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\sum_{k=1}^n P_k \leq (1 + \varepsilon)I$. Тогда $\sum_{k=1}^m P_k \geq (1 - (m-1)\varepsilon)P_{\mathfrak{H}_m}$ для всех $m = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по m . Для $m = 2$ утверждение леммы непосредственно выводится из следствия 1, поскольку $P_1 + P_2 \leq (1 + \varepsilon)I$. Пусть теперь $m > 2$ фиксировано и $\sum_{k=1}^{m-1} P_k \geq (1 - (m-2)\varepsilon)P_{\mathfrak{H}_{m-1}}$. Тогда $\sum_{k=1}^m P_k \leq (1 + \varepsilon)I$ и, согласно следствию 1, $\sum_{k=1}^m P_k = \sum_{k=1}^{m-1} P_k + P_m \geq (1 - (m-2)\varepsilon)P_{\mathfrak{H}_{m-1}} + P_m \geq (1 - (m-1)\varepsilon)P_{\mathfrak{H}_m}$. Лемма 2 доказана.

Продолжим теперь доказательство свойства (d). Если P_k — проекторы в H , $\varepsilon > 0$ и $\sum_{k=1}^n P_k = (1 + \varepsilon)I$, то оператор $\sum_{k=1}^{n-1} P_k = (1 + \varepsilon)I - P_n$ в некотором базисе имеет диагональный вид $\text{diag}(1 + \varepsilon, \dots, 1 + \varepsilon, \dots, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \dots)$. Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{H}_{n-1}$ совпадает со всем H и $\varepsilon \in \sigma(P_1 + \dots + P_{n-1})$. Применяя лемму 2 при $m = n-1$, получаем $\varepsilon \geq 1 - (n-2)\varepsilon$, т.е. $\varepsilon \geq 1/(n-1)$.

(е) Если $P_1, \dots, P_n$ — ортопроекторы в H , такие, что $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I$, то $P_k^\perp$ — ортопроекторы в H , такие, что $\sum_{k=1}^n P_k^\perp = \sum_{k=1}^n (I - P_k) = nI - \sum_{k=1}^n P_k = (n - \alpha)I$. Таким образом, $(n - \alpha) \in \Sigma_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,n-\alpha}$ изоморфны, и, следовательно, категории их $*$ -представлений $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,n-\alpha}$ совпадают. Действительно, пусть $\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C}\langle p_1, \dots, p_n \mid p_k^2 = p_k^* = p_k, \sum_{k=1}^n p_k = \alpha e \rangle$, а $\mathcal{P}_{n,n-\alpha} = \mathbb{C}\langle \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n \mid \tilde{p}_k^2 = \tilde{p}_k^* = \tilde{p}_k, \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k = (n - \alpha)e \rangle$. Тогда отображение $p_k \rightarrow e - \tilde{p}_k$ задает $*$ -изоморфизм $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,n-\alpha}$.

1.1.2. Описание множества Σ_n и $*$ -представлений $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_n$, при $n \leq 4$. Этому вопросу посвящен целый ряд работ (см. [7–11] и др.). Имеет место следующее простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (а) $\Sigma_3 = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$.

(б) $\mathcal{P}_{3,\alpha} = 0$, если $\alpha \notin \Sigma_3$.

(с) $\mathcal{P}_{3,0} = \mathcal{P}_{3,3} = \mathbb{C}^1$, $\mathcal{P}_{3,1} = \mathcal{P}_{3,2} = \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$, $\mathcal{P}_{3,3/2} = M_2(\mathbb{C}^1)$.

(д) Существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое представление алгебры $\mathcal{P}_{3,3/2}$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Все алгебры $\mathcal{P}_{4,\alpha}$ уже бесконечномерны; среди них только алгебра $\mathcal{P}_{4,2}$ является PI-алгеброй (см. [12]). Однако Σ_4 и $*$ -представления алгебр $\mathcal{P}_{4,\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_4$, устроены достаточно просто (см., например, [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (а) $\Sigma_4 = \{0, 1, 1 + \frac{k}{k+2} \ (k \in \mathbb{N}), 2, 3 - \frac{k}{k+2} \ (k \in \mathbb{N}), 3, 4\}$.

(б) $*$ -алгебра $\mathcal{P}_{4,0}$ имеет единственное неприводимое представление $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$.

(с) $*$ -алгебра $\mathcal{P}_{4,1}$ имеет 4 неприводимых (неэквивалентных одномерных) представлений $P_1 = \dots = P_{k-1} = P_{k+1} = \dots = P_4 = 0$, $P_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$.

(д) При нечетном k существует единственное с точностью до эквивалентности $((k+2)$ -мерное) неприводимое представление $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{k}{k+2}}$.

(е) При четном $k = 2k_1$ существуют четыре неэквивалентных $((k_1+1)$ -мерных) неприводимых представления $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{k}{k+2}}$.

(ф) $\mathcal{P}_{4,2}$ есть PI-алгебра. Ее неприводимые $*$ -представления одномерны и двумерны. Существует шесть неэквивалентных одномерных представлений $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{4,2}$: два проектора равны нулю, два — единице. Неэквивалентные двумерные представления $\pi_{a,b,c}$ $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{4,2}$ зависят от точек множества $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1, a > 0, b > 0, c \in [-1, 1], \text{ или } a = 0, b > 0, c > 0, \text{ или } a > 0, b = 0, c > 0\}$, операторы представления — это

$$\begin{aligned} \pi_{a,b,c}(p_1) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & -b-ic \\ -b+ic & 1-c \end{pmatrix}, & \pi_{a,b,c}(p_2) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a & b-ic \\ b+ic & 1+a \end{pmatrix}, \\ \pi_{a,b,c}(p_3) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-a & -b+ic \\ -b-ic & 1+a \end{pmatrix}, & \pi_{a,b,c}(p_4) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+a & b+ic \\ b-ic & 1-a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что и доказательство пп. (а)–(е), и формулы для операторов неприводимых представлений $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{4,\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_4$, можно получить из дальнейших конструкций статьи, которые проведены для $*$ -алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ с $n \geq 4$.

1.2. О функторах Кокстера и их свойствах.

1.2.1. *Функторы линейного и гиперболического отражений.* Построим функтор $T: \text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{P}_{n,n-\alpha}$, $\alpha < n$. Если π — представление из категории $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$, а $\pi(p_i) = P_i$ — проекторы в пространстве H , то в том же пространстве операторы $P_i^\perp = I_H - P_i$ задают представление $T(\pi)$ из категории $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,n-\alpha}$. На морфизмах функтор T действует тождественно.

Функтор T в дальнейшем мы называем *функтором линейного отражения*. Очевидно, что $T^2 = \text{Id}$, где Id — тождественный функтор.

Построим теперь функтор $S: \text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{\alpha-1}}$, $\alpha > 1$ (в дальнейшем мы называем его *функтором гиперболического отражения*).

Пусть π — представление алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\pi(p_i) = P_i$, где P_i — ортопроекторы в пространстве H . Рассмотрим пространства $H_i = \text{Im } P_i$ и естественные изометрии $\Gamma_i: H_i \rightarrow H$. Тогда $\Gamma_i^*: H \rightarrow H_i$ суть эпиморфизмы и

$$\Gamma_i^* \Gamma_i = I_{H_i}, \quad P_i = \Gamma_i \Gamma_i^*. \quad (1)$$

Пусть $\mathfrak{H} = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$. Зададим линейный оператор $\Gamma: \mathfrak{H} \rightarrow H$ его пирсовским разложением $\Gamma = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_n]$.

Так как $\Gamma \Gamma^* = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \Gamma_i^* = \sum_{i=1}^n P_i = \alpha I_H$, то $(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma)(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma^*) = I_H$, так что $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma^*$ — изометрия пространства H в $\mathfrak{H}$. Пусть $\hat{H}$ — ортогональное дополнение к $\text{Im } \Gamma^*$ в $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Delta^*$ естественную изометрию пространства $\hat{H}$ в $\mathfrak{H}$; тогда $U^* = [\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Delta^*, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma^*]$ — унитарный оператор из пространства $\hat{H} \oplus H$ на пространство $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, то оператор U имеет следующее пирсовское разложение:

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Delta_1 & \dots & \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Delta_n \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma_1 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma_n \end{bmatrix},$$

$U: \mathfrak{H} \rightarrow \hat{H} \oplus H$, $\Delta_i: H_i \rightarrow \hat{H}$, $\Delta_i^*: \hat{H} \rightarrow H_i$. Так как $U^* U = I_{\mathfrak{H}}$, то $\frac{\alpha-1}{\alpha} \Delta_i^* \Delta_i + \frac{1}{\alpha} \Gamma_i^* \Gamma_i = I_{H_i}$, или (поскольку $\Gamma_i^* \Gamma_i = I_{H_i}$) $\Delta_i^* \Delta_i = I_{H_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Кроме того, $\frac{\alpha-1}{\alpha} \Delta_i^* \Delta_j + \frac{1}{\alpha} \Gamma_i^* \Gamma_j = 0$ при $i \neq j$, так что $\Delta_i^* \Delta_j = -\frac{1}{\alpha-1} \Gamma_i^* \Gamma_j$ при $i \neq j$. Так как $U U^* = I_{\hat{H} \oplus H}$, то $\frac{\alpha-1}{\alpha} (\Delta_1 \Delta_1^* + \dots + \Delta_n \Delta_n^*) = I_{\hat{H}}$, или $\sum_{i=1}^n \Delta_i \Delta_i^* = \frac{\alpha}{\alpha-1} I_{\hat{H}}$. Кроме того, $\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \sum_{i=1}^n \Delta_i \Gamma_i^* = 0$, т.е. $\sum_{i=1}^n \Delta_i \Gamma_i^* = 0$. Таким образом, имеют место следующие формулы:

$$\Delta_i^* \Delta_i = I_{H_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.a)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \Delta_i^* = \frac{\alpha}{\alpha-1} I_{\hat{H}}, \quad (2.b)$$

$$\Delta_i^* \Delta_j = -\frac{1}{\alpha-1} \Gamma_i^* \Gamma_j \quad \text{при } i \neq j, \quad (2.c)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \Gamma_i^* = 0. \quad (2.d)$$

Определим далее функтор S следующим образом: $S(\pi) = \hat{\pi}$, где $\hat{\pi}(p_i) = \Delta_i \Delta_i^*$. Нетрудно проверить, что в силу формулы (2.a) $\Delta_i \Delta_i^*$ — ортопроекторы; будем в дальнейшем их обозначать через Q_i ($Q_i: \hat{H} \rightarrow \hat{H}$). Равенство (2.b) означает, что $\sum_{i=1}^n Q_i = \frac{\alpha}{\alpha-1} I_{\hat{H}}$, т.е. $\hat{\pi}$ есть представление алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{\alpha-1}}$.

Пусть C — морфизм представления π в представление $\tilde{\pi}$, т.е. отображение $C: H \rightarrow \tilde{H}$, такое, что $C\pi(p_i) = \tilde{\pi}(p_i)C$. Обозначим через C_i ограничение оператора C на пространство H_i ; C_i отображает H_i в пространство $\tilde{H}_i$; при этом, как легко видеть,

$$C \Gamma_i = \tilde{\Gamma}_i C_i, \quad (3.a)$$

$$C_i \Gamma_i^* = \tilde{\Gamma}_i^* C. \quad (3.b)$$

Из соотношений (3) следует, что

$$C_i = \tilde{\Gamma}_i^* C \Gamma_i, \quad (4.a)$$

$$C = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Gamma}_i C_i \Gamma_i^*. \quad (4.b)$$

Аналогично формуле (4.b) положим $\hat{C} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i C_i \Delta_i^*$. Покажем, что $\hat{C}$ — морфизм представления $\hat{\pi} = S(\pi)$ в представлении $\hat{\tilde{\pi}} = S(\tilde{\pi})$, т.е. $\hat{C}\hat{\pi}(p_i) = \hat{\tilde{\pi}}(p_i)\hat{C}$, или $\hat{C}Q_k = \tilde{Q}_k\hat{C}$ ($k = 1 \dots, n$).

Достаточно доказать, что $\hat{C}\Delta_k = \tilde{\Delta}_k C_k$ и $C_k \Delta_k^* = \tilde{\Delta}_k^* \hat{C}$ (тогда $\hat{C}Q_k = \hat{C}\Delta_k \Delta_k^* = \tilde{\Delta}_k C_k \Delta_k^* = \tilde{\Delta}_k \tilde{\Delta}_k^* \hat{C} = Q_k \hat{C}$). Имеем $\hat{C}\Delta_k = \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i C_i (\Delta_i^* \Delta_k)$; согласно равенствам (2.a) и (2.c), $\hat{C}\Delta_k = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n \tilde{\Delta}_i (C_i \Gamma_i^*) \Gamma_k + \frac{\alpha-1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k$. В силу равенств (3.b) получаем $\hat{C}\Delta_k = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n \tilde{\Delta}_i \tilde{\Gamma}_i^* (C \Gamma_k) + \frac{\alpha-1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k$, а в силу равенства (3.a) $\hat{C}\Delta_k = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n \tilde{\Delta}_i \tilde{\Gamma}_i^* \tilde{\Gamma}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k$. Учитывая равенство (2.d), имеем $\hat{C}\Delta_k = \frac{1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k \tilde{\Gamma}_k^* \tilde{\Gamma}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k = \frac{1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k + \frac{\alpha-1}{\alpha} \tilde{\Delta}_k C_k = \tilde{\Delta}_k C_k$, что и требовалось доказать.

Аналогично, $\tilde{\Delta}_k^* \hat{C} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_k^* \tilde{\Delta}_i C_i \Delta_i^* = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n \tilde{\Gamma}_k^* (\tilde{\Gamma}_i C_i) \Delta_i^* + \frac{\alpha-1}{\alpha} C_k \Delta_k^* = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n \tilde{\Gamma}_k^* C \Gamma_i \Delta_i^* + \frac{\alpha-1}{\alpha} C_k \Delta_k^* = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1, i \neq k}^n C_k \Gamma_k^* \Gamma_i \Delta_i^* + \frac{\alpha-1}{\alpha} C_k \Delta_k^* = \frac{1}{\alpha} C_k \Gamma_k^* \Gamma_k \Delta_k^* + \frac{\alpha-1}{\alpha} C_k \Delta_k^* = \frac{1}{\alpha} C_k \Delta_k^* + \frac{\alpha-1}{\alpha} C_k \Delta_k^* = C_k \Delta_k^*$.

Положим по определению $S(C) = \hat{C}$. Этим мы закончили построение функтора S .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Точнее было бы в обозначение функтора S ввести индексы, указывающие, на какой категории $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$ он определен (например, $S_{n,\alpha}$), но нам удобнее будет думать, что «один и тот же» функтор S определен на множестве категорий $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\alpha > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ограничение построенного унитарного оператора $U: H_1 \oplus \dots \oplus H_n \rightarrow \hat{H} \oplus H$ на подпространство H_i есть изометрия $\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Delta_i \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Gamma_i \end{bmatrix}$ пространства H_i в $\hat{H} \oplus H$, так что оператор $\mathcal{P}_i = \mathcal{B}_i \mathcal{B}_i^*$ — ортопроектор в пространстве $\hat{H} \oplus H$:

$$\mathcal{P}_i = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-1}{\alpha} \Delta_i \Delta_i^* & \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \Delta_i \Gamma_i^* \\ \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \Gamma_i \Delta_i^* & \frac{1}{\alpha} \Gamma_i \Gamma_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-1}{\alpha} Q_i & \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \Delta_i \Gamma_i^* \\ \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \Gamma_i \Delta_i^* & \frac{1}{\alpha} P_i \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенства (2), легко проверить, что $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_n = I_{\hat{H} \oplus H}$. Таким образом, мы построили конкретную «совместную» дилатацию разложений единичных операторов $I_{\hat{H}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} Q_1 + \dots + \frac{\alpha-1}{\alpha} Q_n$ и $I_H = \frac{1}{\alpha} P_1 + \dots + \frac{1}{\alpha} P_n$ в пространствах $\hat{H}$ и H соответственно до разложения единичного оператора в пространстве $\hat{H} \oplus H$ в сумму ортогональных проекторов.

ТЕОРЕМА 1. Функтор S^2 равен Id (через Id мы обозначаем тождественный функтор на соответствующей категории $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$). Функтор S осуществляет эквивалентность категорий $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{\alpha-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C_i = \tilde{\Gamma}_i^* C \Gamma_i$, $C_i = \tilde{\Delta}_i^* \hat{C} \Delta_i$, а $C = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Gamma}_i C_i \Gamma_i^*$, $\hat{C} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i C_i \Delta_i^*$, то функтор S строгий и полный. Каждое представление $\hat{\pi}$ категории $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{\alpha-1}}$ эквивалентно одному из представлений $S(\pi)$ (например, $S^2(\hat{\pi})$). В матрицу U операторы Γ_i , Δ_i входят симметричным образом, так что $S^2 = \text{Id}$.

1.2.2. *Функторы Кокстера Φ^+ и Φ^- . Отображения Кокстера Φ^+ и Φ^- на Σ_n и на размерностях представлений.* Определим теперь функторы Φ^+ и Φ^- следующим образом: $\Phi^+ = ST$ для $\alpha < n-1$, $\Phi^- = TS$ для $\alpha > 1$. В дальнейшем эти функторы мы будем называть функторами Кокстера на множестве категорий $\text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha}$.

ТЕОРЕМА 2. *Функторы $\Phi^+ : \text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-1-\alpha}}$, $\Phi^- : \text{Rep } \mathcal{P}_{n,\alpha} \rightarrow \text{Rep } \mathcal{P}_{n,n-1-\frac{1}{\alpha-1}}$ осуществляют эквивалентность соответствующих категорий: $\Phi^+ \Phi^- = \text{Id}$, $\Phi^- \Phi^+ = \text{Id}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом следует из теоремы 1 и аналогичного утверждения для функтора T .

Функторы Φ^+ , Φ^- , S , T порождают отображения на множестве размерностей представлений (в случае, если представления конечномерны) и на множестве Σ_n ; эти отображения мы будем обозначать теми же символами, что и функторы.

Обобщенной размерностью представления π алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ в пространстве H назовем вектор $(d; d_1, \dots, d_n)$, где $d = \dim H$, $d_i = \dim H_i$ ($H_i = \text{Im } P_i$).

Легко проследить, как меняется размерность при переходе к представлениям $S(\pi)$ и $T(\pi)$:

$$\begin{aligned} S(d; d_1, \dots, d_n) &= \left(\sum_{i=1}^n d_i - d; d_1, \dots, d_n \right), \\ T(d; d_1, \dots, d_n) &= (d; d - d_1, \dots, d - d_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Отображения Φ^+ , Φ^- на множестве размерностей суть композиции отображений (5).

Числовые отображения T , S , Φ^+ , Φ^- на Σ_n задаются формулами $T(\alpha) = n - \alpha$, $S(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha-1}$, $\Phi^+(\alpha) = 1 + \frac{1}{n-1-\alpha}$, $\Phi^-(\alpha) = n - 1 - \frac{1}{\alpha-1}$. Введем обозначение $\Phi^{+k}(\alpha) = \Phi^+(\Phi^{+(k-1)}(\alpha))$ (Φ^{+0} — тождественное отображение). Пусть $\Phi^{+k}(\alpha) = 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k}$ ($k \in \mathbb{N}$); тогда $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ есть линейная рекуррентная последовательность с характеристическим многочленом $F(x) = x^2 - (n-2)x + 1$ и начальным вектором $(1, n-1-\alpha)$. Как известно, линейное пространство $L(F)$ всех линейных рекуррентных последовательностей с фиксированным характеристическим многочленом $F(x)$ превращается в модуль над кольцом многочленов $\mathbb{R}[x]$, если считать, что $x\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ (сдвиг влево на одну позицию). При этом полученный модуль является циклическим с порождающим элементом $\vec{e} = (0, 1, \dots)$ — рекуррентной последовательностью из $L(F)$, имеющей начальный вектор $(0, 1)$. Многочлен $\phi(x)$ со свойством $\vec{a} = \phi(x)\vec{e}$ называется генератором последовательности $\vec{a}$.

Легко видеть, что $\vec{a} = (1, n-1-\alpha, a_2, a_3, \dots) = (x+1-\alpha)\vec{e}$, так что предварительно построим рекуррентную последовательность $\vec{e}$, $\vec{e} = (b_0, b_1, b_2, \dots) \equiv (0, 1, n-2, (n-2)^2-1, (n-2)^3-2(n-2), \dots)$. Легко доказать по индукции, что $b_k = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^i C_{k-1-i}^i (n-2)^{k-1-2i}$, $k \geq 2$, так что $a_k = b_{k+1} + (1-\alpha)b_k$ и

$$\Phi^+(\alpha) = 1 + \frac{1}{n-1-\alpha}, \quad \Phi^{+2}(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{a_2}, \quad \Phi^{+k}(\alpha) = 1 + \frac{\alpha_{k-1}}{a_k}, \quad \text{т. е.}$$

$$\Phi^{+k}(\alpha) = 1 + \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^i C_{k-1-i}^i (n-2)^{k-1-2i} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (-1)^i C_{k-2-i}^i (n-2)^{k-2-2i}}{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^i C_{k-i}^i (n-2)^{k-2i} + (1-\alpha) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} (-1)^i C_{k-1-i}^i (n-2)^{k-1-2i}}.$$

1.3. О множестве Σ_n . Построив функторы S , T , Φ^+ , Φ^- , мы одновременно доказали следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha \in \Sigma_n$. Тогда $T(\alpha) \in \Sigma_n$. Если $\alpha > 1$, то $S(\alpha) \in \Sigma_n$ и $\Phi^-(\alpha) \in \Sigma_n$. Если $\alpha < n-1$, то $\Phi^+(\alpha) \in \Sigma_n$.

Справедлива следующая основная теорема параграфа:

ТЕОРЕМА 3. $\Sigma_n = \{\Lambda_n^1, \Lambda_n^2, [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}], n - \Lambda_n^1, n - \Lambda_n^2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы разобьем на две части: описание точек дискретного спектра и описание точек непрерывного.

ЛЕММА 4. Множество $\Sigma_n \cap [0, \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2})$ состоит из двух последовательностей точек: последовательности $x_k = \Phi^{+k}(0)$, $k = 0, 1, \dots$, образующей множество

$$\Lambda_n^1 = \left\{ 0, 1 + \frac{1}{n-1}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-1}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{(n-1)}}}}}, \dots \right\},$$

и последовательности $y_k = \Phi^{+k}(1)$, $k = 0, 1, \dots$, образующей множество

$$\Lambda_n^2 = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{n-2}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-2}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{(n-2)}}}}}, \dots \right\}.$$

Обе последовательности сходятся к точке $\beta_n = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n \geq 4$ имеем $\dots < \Phi^{+k}(0) < \Phi^{+k}(1) < \Phi^{+(k+1)}(0) < \Phi^{+(k+1)}(1) < \dots < \beta_n$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^{+k}(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^{+k}(1) = \beta_n$. Открытые интервалы $(\Phi^{+k}(0), \Phi^{+k}(1))$ и $(\Phi^{+k}(1), \Phi^{+(k+1)}(0))$ точек множества Σ_n не содержат, так как $(0, 1) \cap \Sigma_n = (1, 1 + \frac{1}{n-1}) \cap \Sigma_n = \emptyset$, а Φ^+ по теореме 2 является функтором эквивалентности. Таким образом, $\Sigma_n \cap [0, \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}) = \Lambda_n^1 \cup \Lambda_n^2$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что $(\beta_n, n - \beta_n) \subset \Sigma_n$. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 5. Если $[3/2, 2] \subset \Sigma_5$, то $[2, n-2] \subset \Sigma_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[3/2, 2] \subset \Sigma_5$. Применяя оператор Φ^- к отрезку $[3/2, 2]$, мы получаем по лемме 3, что $[2, 3] \subset \Sigma_5$. Теперь индукцией по n покажем, что $[2, n-2] \subset \Sigma_n$ при $n \geq 5$. Пусть $k \geq 5$ и $[2, k-2] \subset \Sigma_k$. Поскольку $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1}$, то $[2, k-2] \subset \Sigma_{k+1}$. Если же $\alpha \in [k-2, (k+1)-2]$, то $\alpha-1 \in \Sigma_k$ и поэтому существует представление $P_1 + \dots + P_k = (\alpha-1)I$, где P_i — некоторые проекторы из $L(H)$. Положив $P_{k+1} = I$, получим, что $P_1 + \dots + P_{k+1} = \alpha I$. Таким образом, $[k-2, (k+1)-2] \subset \Sigma_{k+1}$ и, следовательно, $[2, (k+1)-2] \subset \Sigma_{k+1}$.

ЛЕММА 6. Если $[2, n-2] \subset \Sigma_n$, то $(\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}) \subset \Sigma_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение Φ^+ непрерывно. Поэтому, так как $\Phi^+(2) = 1 + \frac{1}{n-3}$ и $\Phi^+(n-2) = 2$, то $[1 + \frac{1}{n-3}, 2] \subset \Sigma_n$. Далее, $\Phi^+(1 + \frac{1}{n-3}) = 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-3}}$ и $\Phi^+(2) = 1 + \frac{1}{n-3}$, т. е. $[1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-3}}, 1 + \frac{1}{n-3}] \subset \Sigma_n$. Продолжая этот процесс, получаем, что $(\beta_n, 2] \subset \Sigma_n$, где $\beta_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^{+k}(2) = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$. Используя отображение T , устанавливаем, что интервал $[n-2, n - \beta_n)$ лежит в Σ_n и, следовательно, $(\beta_n, n - \beta_n) \subset \Sigma_n$.

ЛЕММА 7. $(3/2, 2) \subset \Sigma_5$.

Прежде чем доказывать лемму, докажем два вспомогательных утверждения. Везде в дальнейшем $\alpha \in (3/2, 2)$ и $\varepsilon = \alpha - 1$.

Нам понадобится

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем склейкой двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{pmatrix},$$

матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm-1} & a_{mm} + b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ll} \end{pmatrix},$$

которую в дальнейшем мы будем обозначать через $A \tilde{+} B$.

Непосредственно из определения следует, что если матрицы $P_1, \dots, P_k$ являются проекторами, то матрица $P_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} P_k$ есть сумма k проекторов (матрица P_i дополняется в нужном месте нулевыми строками и столбцами до необходимой размерности). В частности, если $0 \leq x \leq 2$ и $\tau = (x-1)^2$, то матрица $(1) \tilde{+} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau - \tau^2} \\ \sqrt{\tau - \tau^2} & 1 - \tau \end{pmatrix}$ со спектром $\{x, 2-x\}$ есть сумма двух проекторов $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau - \tau^2} \\ \sqrt{\tau - \tau^2} & 1 - \tau \end{pmatrix}$. Тогда матрица $\begin{pmatrix} 1 - \tau_1 & \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} \\ \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} & \tau_1 \end{pmatrix} \tilde{+} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$ есть сумма трех проекторов; легко проверить, что при $\varepsilon \leq x \leq \alpha$, $\tau_1 = \varepsilon(\alpha - x)/x$ она имеет спектр $\{x - \varepsilon, \alpha, 2 - x\}$. Докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\varepsilon \leq a \leq \alpha$ и при некотором $k \in \{0, 1, 2\}$ выполнены неравенства $0 < 2 - a - k\varepsilon \leq \varepsilon$. Тогда матрица $\text{diag}(a, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k \text{ раз}}, 2 - a - k\varepsilon)$ является суммой трех проекторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = 0$ и $k = 1$ рассмотрены выше. Пусть $k = 2$ и $0 < 2 - a - k\varepsilon \leq \varepsilon$. Положим $Q = \begin{pmatrix} (a + \varepsilon)/2 & \frac{1}{2}\sqrt{2a + 2\varepsilon - (a + \varepsilon)^2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2a + 2\varepsilon - (a + \varepsilon)^2} & 1 - (a + \varepsilon)/2 \end{pmatrix}$,

$R = \begin{pmatrix} (a + \varepsilon)/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2a + 2\varepsilon - (a + \varepsilon)^2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2a + 2\varepsilon - (a + \varepsilon)^2} & 1 - (a + \varepsilon)/2 \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \varepsilon(1 - a)/(a + \varepsilon)$, $\tau_2 = \varepsilon(a + 2\varepsilon - 1)/(2 - a - \varepsilon)$. Тогда спектр матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 - \tau_1 & \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} \\ \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} & \tau_1 \end{pmatrix} \tilde{+} (Q + R) \tilde{+} \begin{pmatrix} \tau_2 & \sqrt{\tau_2 - \tau_2^2} \\ \sqrt{\tau_2 - \tau_2^2} & 1 - \tau_2 \end{pmatrix}$$

с учетом кратности состоит из точек a , α , α , $2 - a - 2\varepsilon$. Поскольку

$$\begin{pmatrix} 1 - \tau_1 & \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} \\ \sqrt{\tau_1 - \tau_1^2} & \tau_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \tau_2 & \sqrt{\tau_2 - \tau_2^2} \\ \sqrt{\tau_2 - \tau_2^2} & 1 - \tau_2 \end{pmatrix}$$

является проектором, то матрица D , так же как и любая эквивалентная ей матрица, представляется в виде суммы трех проекторов.

Перейдем к рассмотрению сумм пяти проекторов.

Предложение 5. Пусть $1 \leq b \leq \alpha$. Тогда при некотором $k \in \{1, 2, 3\}$ выполнены неравенства $0 < 3 - b - k\varepsilon \leq \varepsilon$ и существует пять проекторов $P_1, \dots, P_5$, таких, что $\sum_1^5 P_i = \text{diag}(b, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k \text{ раз}}, 3 - b - k\varepsilon)$.

Доказательство. Так как $1 \leq b \leq \alpha$, то $\varepsilon < 3 - \alpha \leq 3 - b \leq 2 \leq 4\varepsilon$. Отсюда следует, что при некотором $k \in \{1, 2, 3\}$ справедливы неравенства $0 < 3 - b - k\varepsilon \leq \varepsilon$. Пусть теперь b , k фиксированны и $0 < 3 - b - k\varepsilon \leq \varepsilon$. Положим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} b/2 & \sqrt{b/2 - b^2/4} \\ \sqrt{b/2 - b^2/4} & 1 - b/2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} b/2 & -\sqrt{b/2 - b^2/4} \\ -\sqrt{b/2 - b^2/4} & 1 - b/2 \end{pmatrix}.$$

Из предложения 4 при $a = \alpha - (2 - b)$ следует, что существуют проекторы Q_3 , Q_4 и Q_5 , такие, что

$$Q_3 + Q_4 + Q_5 = \text{diag}(a, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k-1 \text{ раз}}, 2 - a - (k - 1)\varepsilon).$$

Матрица $D = (Q_1 + Q_2) \tilde{+} (Q_3 + Q_4 + Q_5)$ представляется суммой пяти проекторов $P_1, \dots, P_5$, построенных с учетом операции склейки по матрицам $Q_1, \dots, Q_5$. В то же время $D = \text{diag}(b, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k \text{ раз}}, 3 - b - k\varepsilon)$. Предложение 5 доказано.

Замечание 4. Матрицы $P_1, \dots, P_5$ из доказательства предложения 5 удовлетворяют следующим условиям:

$$P_1 \text{diag}(0, \dots, 0, 1) = P_2 \text{diag}(0, \dots, 0, 1) = 0,$$

$$P_3 \text{diag}(1, 0, \dots, 0) = P_4 \text{diag}(1, 0, \dots, 0) = P_5 \text{diag}(1, 0, \dots, 0) = 0.$$

Поэтому матрицы $\underbrace{P_i \tilde{+} \dots \tilde{+} P_i}_{l \text{ раз}}$, $l \in \mathbb{N} \cup \infty$, также являются проекторами, когда $i = 1, \dots, 5$.

Доказательство леммы 7. Пусть $b_1 = \alpha$. Из предложения 5 следует, что существуют число k_1 и проекторы $P_1^1, \dots, P_5^1$, такие, что

$$\sum_1^5 P_i^1 = \text{diag}(b_1, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k_1 \text{ раз}}, 3 - b_1 - k_1\varepsilon).$$

Выбрав $b_2 = \alpha - (3 - b_1 - k_1\varepsilon)$ (очевидно, что $1 \leq b_2 \leq \alpha$), найдем, с помощью конструкции из доказательства предложения 5, проекторы $P_1^2, \dots, P_5^2$, такие, что

$$\sum_1^5 P_i^2 = \text{diag}(b_2, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{k_2 \text{ раз}}, 3 - b_2 - k_2\varepsilon).$$

Продолжим такой процесс далее, выбирая b_s по формуле $b_s = \alpha - (3 - b_{s-1} - k_{s-1}\varepsilon)$, и найдем последовательность проекторов $P_1^s, \dots, P_5^s$, $s = 1, 2, \dots$. Из замечания 4 следует, что $P_i = P_i^1 + P_i^2 + \dots$ — проекторы в l_2 для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Кроме того, по построению $\sum_1^5 P_i = \alpha I$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что включение $[3/2; 5/2] \subset \Sigma_5$ другим методом доказано в [13].

Из лемм 5, 6 и 7 следует, что $(\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}) \subset \Sigma_n$.

Доказательство теоремы 3 завершает следующая доказанная в более общей ситуации В. С. Шульманом [14] лемма. Мы приведем ее доказательство.

ЛЕММА 8. *Множество Σ_n замкнуто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_k \in \Sigma_n$, $P_j^{(k)} \in L(H_k)$ ($j = 1, \dots, n$) — проекторы, такие, что $\sum_{j=1}^n P_j^{(k)} = \alpha_k I_{H_k}$, и последовательность α_k сходится к α . Рассмотрим C^* -алгебру $\mathcal{A}$ последовательностей операторов $X_k \in L(H_k)$, равномерно ограниченных по норме, в ней замкнутый двусторонний $*$ -идеал $\mathcal{J}$ последовательностей, по норме стремящихся к нулю, и C^* -алгебру $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{J}$. Обозначим через π отображение факторизации $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Тогда проекторы $P_j = (P_j^{(1)}, P_j^{(2)}, \dots) \in \mathcal{A}$ определяют проекторы $\pi(P_j) \in \mathcal{B}$. При этом $\sum_{j=1}^n \pi(P_j) = \alpha I_{\mathcal{B}}$. Так как абстрактная C^* -алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна конкретной C^* -алгебре операторов, то лемма 8 доказана.

§2. Представления алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_n$

2.1. О неприводимых представлениях алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ для дискретного спектра. Алгебра $\mathcal{P}_{n,0}$ имеет единственное неприводимое представление π_0 размерности 1: $\pi_0(p_i) = P_i = 0$. Алгебра $\mathcal{P}_{n,1}$ имеет ровно n неприводимых представлений π_1^j , все они размерности 1: $\pi_1^j(p_i) = 0$ при $i \neq j$, $\pi_1^j(p_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Пусть $\alpha = m/l$ — точка дискретного спектра и дробь m/l несократима.

ТЕОРЕМА 4. *Алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha = \Phi^{+k}(0) = m/l$ с точностью до унитарной эквивалентности обладает единственным неприводимым $*$ -представлением $\Phi^{+k}(\pi_0)$; это представление имеет размерность l . Алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha = \Phi^{+k}(1) = m/l$ с точностью до унитарной эквивалентности обладает n неприводимыми $*$ -представлениями $\Phi^{+k}(\pi_1^j)$, $j = 1, \dots, n$, каждое из которых имеет размерность l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из того, что Φ^+ — функтор эквивалентности категорий. Кроме того, используя формулы (5), можно по индукции доказать, что при $m/l \in \Lambda_n^1$ обобщенная размерность неприводимого представления алгебры $\mathcal{P}_{n,m/l}$ равна $(l; m/n, m/n, \dots, m/n)$, обобщенная размерность неприводимого представления $\Phi^{+k}(\pi_1^j)$ алгебры $\mathcal{P}_{n,m/l}$ при $m/l \in \Lambda_n^2$

равна

$$\left(l; \frac{m + (-1)^{k-1}}{n}, \dots, \frac{m + (-1)^{k-1}}{n}, \frac{m + (-1)^{k-1}}{n} + (-1)^k, \frac{m + (-1)^{k-1}}{n}, \dots, \frac{m + (-1)^{k-1}}{n} \right).$$

↑
j-е место

Теорема доказана.

Так, например, можно получить формулы для единственного неприводимого $*$ -представления алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-1}}$ (см. также [15]):

ТЕОРЕМА 5. *Неприводимое $*$ -представление алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-1}}$ унитарно эквивалентно представлению, которое на образующих p_i задается следующим набором матриц: $\pi(p_i) = P_i = \|p_{kl}^{(i)}\|$, $k, l = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n$, где*

$$p_{kl}^{(i)} = \begin{cases} \frac{n}{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(n-k)(n-l+1)(n-l)}}, & \text{если } k, l < i, \\ -\frac{n}{n-1} \frac{\sqrt{n-i}}{\sqrt{(n-i+1)(n-l+1)(n-l)}}, & \text{если } k = i, l < i, \\ -\frac{n}{n-1} \frac{\sqrt{n-i}}{\sqrt{(n-i+1)(n-k+1)(n-k)}}, & \text{если } k < i, l = i, \\ \frac{n}{n-1} \frac{1}{(n-i+1)}, & \text{если } k = i, l = i, \\ 0, & \text{если } k > i \text{ или } l > i. \end{cases}$$

Как утверждается в теореме 4, неприводимых неэквивалентных представлений у алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-2}}$ всего n . Формулы для операторов представления таковы: один из проекторов полагается равным нулевому оператору, а остальные являются проекторами из теоремы 5 для алгебры $\mathcal{P}_{n-1,1+\frac{1}{n-2}}$. Далее в статье представления алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, полученные из представлений алгебр $\mathcal{P}_{n-k,\beta}$ добавлением нулевых и единичных проекторов, называются редуцируемыми представлениями. Таким образом, алгебра $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-2}}$ имеет n неприводимых представлений и все они редуцируемые.

2.2. О конечномерных $*$ -представлениях алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in [\beta_n, n - \beta_n]$. Конечномерные представления алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ могут существовать только для рациональных α , так как след суммы проекторов является некоторым целым числом m , а след скалярного оператора αI равен αl , $l = \dim H$, т.е. $\alpha = m/l$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы у алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ существовало конечномерное представление, необходимо и достаточно, чтобы α было рациональным и $\alpha \in \Sigma_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость утверждения теоремы следует из определения множества Σ_n . Докажем достаточность, построив конечномерное представление алгебры $\mathcal{P}_{n,m/l}$. Случай, когда m/l принадлежит дискретному спектру, рассмотрен в п. 2.1.

Пусть $m/l = \alpha \in (3/2, 2)$. Сохраним обозначения доказательства леммы 7. Зададим матрицы $R_1 = P_1^1 \tilde{+} \dots \tilde{+} P_1^s \tilde{+} (1)$, $R_i = P_i^1 \tilde{+} \dots \tilde{+} P_i^s$, $i = 2, 3, 4, 5$, $s = m - l$. Из замечания 4 следует, что R_i — проекторы. Кроме того, $\sum R_i = \text{diag}(m/l, \dots, m/l, 3 - b_s - k_s \varepsilon + 1)$. Так как число $3 - b_s - k_s \varepsilon = s(3 - m/l) -$

$\sum_1^s k_i(m-l)/l = \frac{m-l}{l}(3l-m-\sum_1^s k_i) = \varepsilon(3l-m-\sum_1^s k_i)$ кратно ε и $0 < 3-b_s-k_s\varepsilon \leq \varepsilon$, то $3-b_s-k_s\varepsilon = \frac{m-l}{l}$. Поэтому $3-b_s-k_s\varepsilon+1 = m/l$ и $\sum_1^5 R_i = m/lI$.

Итак, для рациональных чисел из интервала $(3/2, 2)$ теорема 6 доказана. Очевидно, что она верна также и для чисел $3/2$ и 2 , см. п. 1.1.2. Применяя функтор Φ^- и линейное отображение T к построенным представлениям, мы получаем конечномерные представления для $\mathcal{P}_{5,r}$ при $r \in [2, 3]$. Теперь можно получить конечномерное представление алгебры $\mathcal{P}_{n,r}$ для рациональных точек $r \in [2, n-2]$. Действительно, пусть $s \in \mathbb{N}$ — такое число, что $r-s \in [2, 3]$. В качестве проекторов $P_1, \dots, P_5$ возьмем соответствующие матрицы конечномерного представления алгебры $\mathcal{P}_{5,r-s}$, проекторы $P_6, \dots, P_{5+s}$ положим равными единичной матрице, $P_6 = \dots = P_{5+s} = E$, а в качестве остальных возьмем нулевые матрицы. Тогда $P_1 + \dots + P_n = (r-s)I + sI + 0 = rI$. По теореме 2 и лемме 6 итерация отображений Φ^+ и Φ^- даст нам представления для всех рациональных r из непрерывного спектра.

Вопрос об описании всех конечномерных представлений в точках $m/l \in (\beta_n, n - \beta_n)$ будет рассмотрен отдельно.

2.3. О представлениях алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ для α из $(\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2})$, $n \geq 5$.

2.3.1. *Об алгебрах $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ не типа I.* Всюду ниже $\ast$ -алгебра называется алгеброй не типа I, если у нее существует факторпредставление не типа I.

ТЕОРЕМА 7. *Алгебра $\mathcal{P}_{5,\alpha}$, $\alpha \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (\Phi^{+k}([2, 7/3] \cup 5/2 \cup [8/3, 3]) \cup \Phi^{-k}([2, 7/3] \cup 5/2 \cup [8/3, 3]))$, не типа I.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = l_2 \oplus l_2 \oplus l_2$ и $\mathcal{J}$ — тождественный оператор в l_2 . Введем следующие операторы из $L(H)$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} c_1\mathcal{J} & 0 & c_2S_1^* \\ 0 & c_1\mathcal{J} & c_2S_2^* \\ c_2S_1 & c_2S_2 & (1-c_1)\mathcal{J} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} c_1\mathcal{J} & 0 & -c_2S_1^* \\ 0 & c_1\mathcal{J} & -c_2S_2^* \\ -c_2S_1 & -c_2S_2 & (1-c_1)\mathcal{J} \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} c_3\mathcal{J} & \sqrt{3}c_3\mathcal{J} & \sqrt{c_3c_4}\mathcal{J} \\ \sqrt{3}c_3\mathcal{J} & 3c_3\mathcal{J} & \sqrt{3c_3c_4}\mathcal{J} \\ \sqrt{c_3c_4}\mathcal{J} & \sqrt{3c_3c_4}\mathcal{J} & c_4\mathcal{J} \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} c_3\mathcal{J} & -\sqrt{3}c_3\mathcal{J} & \sqrt{c_3c_4}\mathcal{J} \\ -\sqrt{3}c_3\mathcal{J} & 3c_3\mathcal{J} & -\sqrt{3c_3c_4}\mathcal{J} \\ \sqrt{c_3c_4}\mathcal{J} & -\sqrt{3c_3c_4}\mathcal{J} & c_4\mathcal{J} \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 4c_3\mathcal{J} & 0 & -2\sqrt{c_3-4c_3^2}\mathcal{J} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{c_3-4c_3^2}\mathcal{J} & 0 & (1-4c_3)\mathcal{J} \end{pmatrix},$$

где $c_1 = (3\alpha - 5)/2$, $c_2 = \sqrt{c_1 - c_1^2}$, $c_3 = (5 - 2\alpha)/6$, $c_4 = (4\alpha - 7)/3$, а S_1, S_2 — операторы представления образующих $\ast$ -алгебры Кунца O_2 в l_2 , например, $S_1^*(x_0, x_1, \dots) = (x_0, x_2, x_4, \dots)$, $S_2^*(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_3, x_5, \dots)$, $S_1(x_0, x_1, \dots) = (x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$, $S_2(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots)$.

Поскольку $S_1^*S_2 = 0$, $S_1^*S_1 = I = S_2^*S_2 = S_1S_1^* + S_2S_2^*$, непосредственно проверяется, что P_i — проекторы при $\alpha \in [7/4, 7/3]$ и $P_1 + \dots + P_5 = \alpha I$. Кроме

того, $C^*(P_1, \dots, P_5) = M_3(C^*(S_1, S_2)) = M_3(O_2)$, $\alpha \neq 2$. Поскольку $M_3(O_2)$ не типа I , то и алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ не типа I . Более того, используя функтор линейного отражения, получим, что $\mathcal{P}_{5,\alpha}$ не типа I при $\alpha \in n - [7/4, 7/3] \setminus \{2\} = [8/3, 13/4] \setminus \{3\}$. Алгебры $\mathcal{P}_{5,2}$ и $\mathcal{P}_{5,5/2}$ являются не только алгебрами не типа I , но и $*$ -дикими алгебрами (см. п. 2.3.2). Таким образом, все алгебры $\mathcal{P}_{5,\alpha}$, $\alpha \in [2, 7/3] \cup 5/2 \cup [8/3, 3]$, не типа I .

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 7.

ЛЕММА 9. *Алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ есть алгебра не типа I тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_{n,\Phi^+(\alpha)}$ — алгебра не типа I .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует непосредственно из их задания, функторы Кокстера Φ^+ и Φ^- являются на только функторами эквивалентности $*$ -категорий $\text{Per } \mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\text{Per } \mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-1-\alpha}}$, но и функторами эквивалентности соответствующих W^* -категорий, т. е. непрерывны в W^* -топологии. Если у алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ существует факторпредставление π не типа I , то и W^* -алгебра сплетающих операторов этого представления (см., например, [16]), и изоморфная ей W^* -алгебра сплетающих операторов представления $\Phi^+(\pi)$ алгебры $\mathcal{P}_{n,1+\frac{1}{n-1-\alpha}}$, а следовательно, и W^* -алгебра, порожденная операторами представления $\Phi^+(\pi)$, суть факторы не типа I .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Авторам не известно, при каких

$$\alpha \in [\beta_n, n - \beta_n], \quad \alpha \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} (\Phi^{+k}([2, 7/3] \cup 5/2 \cup [8/3, 3]) \cup \Phi^{-k}([2, 7/3] \cup 5/2 \cup [8/3, 3])),$$

$*$ -алгебра $\mathcal{P}_{5,\alpha}$ является алгеброй не типа I .

Справедлив аналог теоремы 7 при $n \geq 6$:

ТЕОРЕМА 8. *Алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, $n \geq 6$, $\alpha \in (\beta_n, n - \beta_n)$, не типа I .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для $n = 6$. Сохранив обозначения H, I, S_1, S_2 из предыдущей теоремы, введем следующие операторы из $L(H)$:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} d_1 \mathcal{I} & \sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_1^* & 0 \\ \sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_1 & (1 - d_1) \mathcal{I} & \sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_2 \\ 0 & \sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_2^* & d_1 \mathcal{I} \end{pmatrix}, \\ P_2 &= \begin{pmatrix} d_1 \mathcal{I} & -\sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_1^* & 0 \\ -\sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_1 & (1 - d_1) \mathcal{I} & -\sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_2 \\ 0 & -\sqrt{d_1 - d_1^2} \cdot S_2^* & d_1 \mathcal{I} \end{pmatrix}, \\ P_3 &= \begin{pmatrix} d_2 \mathcal{I} & \sqrt{d_2 - d_2^2} \mathcal{I} & 0 \\ \sqrt{d_2 - d_2^2} \mathcal{I} & (1 - d_2) \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} d_2 \mathcal{I} & -\sqrt{d_2 - d_2^2} \mathcal{I} & 0 \\ -\sqrt{d_2 - d_2^2} \mathcal{I} & (1 - d_2) \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 \mathcal{I} & \sqrt{d_3 - d_3^2} \mathcal{I} \\ 0 & \sqrt{d_3 - d_3^2} \mathcal{I} & (1 - d_3) \mathcal{I} \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 \mathcal{I} & -\sqrt{d_3 - d_3^2} \mathcal{I} \\ 0 & -\sqrt{d_3 - d_3^2} \mathcal{I} & (1 - d_3) \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $d_1 = \frac{3}{2}\alpha - 3$, $d_2 = 3 - \alpha$, $d_3 = \alpha - 2$. Непосредственно проверяется, что P_i — проекторы при $\alpha \in [2, 8/3]$ и $P_1 + \dots + P_6 = \alpha I$. Покажем, что $C^*(P_1, \dots, P_6) = M_3(C^*(S_1, S_2))$. При $\alpha \neq 2, 5$ числа $0, 2d_3, 2 - 2d_3$ попарно различны и поэтому $E_{ii} \in C^*(P_1, \dots, P_6)$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что $E_{ii}P_3E_{jj} \in C^*(P_1, \dots, P_6)$ и $E_{ii}P_5E_{jj} \in C^*(P_1, \dots, P_6) \implies E_{i,i+1}, E_{i+1,i} \in C^*(P_1, \dots, P_6)$, $i = 1, 2$, т. е. $M_3(C\mathcal{S}) \in C^*(P_1, \dots, P_6)$. По построению операторы S_1, S_2 являются элементами матрицы P_1 ; поэтому $C^*(P_1, \dots, P_6) = M_3(C^*(S_1, S_2))$. Случай $\alpha = 2, 5$ рассматривается в предыдущей теореме и п. 2.3.2. Итак, $C^*(P_1, \dots, P_6) = M_3(C^*(S_1, S_2))$. Поскольку $M_3(O_2)$ не типа I , то и алгебра $\mathcal{P}_{6,\alpha}$ не типа I при $\alpha \in [2, 8/3]$. Используя теорему 7, получаем, что $\mathcal{P}_{6,\alpha}$ не типа I при $\alpha \in [2, 3]$, а применяя функтор T , выводим, что $\mathcal{P}_{6,\alpha}$ не типа I при $\alpha \in [3, 4]$. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться леммами 6 и 9.

2.3.2. О $*$ -диких $*$ -алгебрах $\mathcal{P}_{n,\alpha}$. Для ряда значений α $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ являются не только алгебрами не типа I , но и $*$ -дикими алгебрами (см. [11] и библиографию, приведенную там).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\frac{k}{2}}$ при $n \geq 5$, $4 \leq k \leq 2n - 4$ $*$ -дикие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,2}$ ($n \geq 5$) $*$ -дикие, так как (см. [11, р. 218]) задача описания представлений алгебры $\mathcal{P}_{5,2}$ содержит $*$ -дикую подзадачу описания троек операторов, два из которых ортогональны (см. [17, 18, 11]). $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\frac{n}{2}}$ ($n \geq 5$) $*$ -дикие, так как (см. [11, р. 218]) задача описания представлений алгебры $\mathcal{P}_{5,\frac{5}{2}}$ содержит $*$ -дикую подзадачу описания троек самосопряженных отражений, два из которых антикоммутируют. Тогда предложение 6 доказано, так как для любой $*$ -алгебры $\mathcal{P}_{n,\frac{k}{2}}$, $n \geq 5$, $4 \leq k \leq 2n - 4$, алгебра $\mathcal{P}_{5,2}$ или $\mathcal{P}_{5,\frac{5}{2}}$ является ее факторалгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Авторы пока не умеют описывать все точки $\alpha \in [\beta_n, n - \beta_n]$, для которых алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ $*$ -дикие. Более того, не известно, является ли алгебра $\mathcal{P}_{n,\Phi^+(\alpha)}$ $*$ -дикой, если $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ $*$ -дикая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu P. Y. Additive combination of special operators. In: Functional Analysis and Operator Theory, Banach Center Publ., Warszawa, Vol. 30, 1994, pp. 337–361.
2. Jones V. Index for subfactors. Invent. Math., **72**, 1–25 (1983).
3. Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 4, 91–93 (2000).
4. Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. Когда скалярный оператор представляется суммой проекторов. Укр. матем. журн., **53**, № 7, 939–952 (2001).
5. Кругляк С. А. Функторы Кокстера для одного класса $*$ -колчанов. Укр. матем. журн., **54**, № 6, 789–797 (2002).
6. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля. УМН, **28**, вып. 2, 19–33 (1973).
7. Fillmore P. A. On sums of projections. J. Funct. Anal., **4**, 146–152 (1969).
8. Wang J.-H. Decomposition of operators into quadratic type. Ph.D. dissertation, National Chiao Tung Univ., Hsinchu, Taiwan, 1991.
9. Беспалов Ю. В. Наборы ортопроекторов, связанных соотношениями. Укр. матем. журн., **44**, № 3, 309–317 (1992).
10. Ehrhardt T. Sums of four idempotents. Preprint, Chemnitz, 1995.
11. Ostrovskii V., Samoilenko Yu. Introduction to the Theory Representation of Finitely Presented $*$ -algebras. I. Representations by bounded operators. Rev. Math. & Math. Phys., Vol. 11, 1–261, Gordon and Breach, 1999.

12. Стрелец А. В., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С. О тождествах в алгебрах $\mathcal{Q}_{n,\lambda}$, порожденных идемпотентами. Укр. матем. журн., **53**, №10, 1380–1390 (2001).
13. Ehrhardt T. On sums of five projections equal to a multiple of the identity. Preprint, Chemnitz, 2000.
14. Shulman V. S. On representations of limit relations. Meth. Func. Anal. Topology, **7**, No. 4, 85–87 (2002).
15. Djeldubaev E. R., Kruglyak S. A. On representation of the $*$ -algebra $\mathcal{P}_{n, \frac{n}{n-1}}$. Meth. Func. Anal. Topology, **7**, No. 2, 35–41 (2001).
16. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann), Gauthier–Villars, Paris, 1957, 1969.
17. Кругляк С. А., Самойленко Ю. С. О унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 1, 60–62 (1980).
18. Kruglyak S. A., Samoilenko Yu. S. On complexity of description of representations of $*$ -algebras generated by idempotents. Proc. Amer. Math. Soc., **128**, No. 6, 1655–1664 (2000).

Институт математики НАН Украины
e-mail: slavik@imath.kiev.ua
e-mail: yurii_sam@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
8 ноября 2001 г.