Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 36–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:25:15

Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость*

© 2002. О. И. Мохов

§1. Введение

В настоящей работе получены нелинейные уравнения, описывающие все неособые пучки метрик постоянной римановой кривизны, и доказана интегрируемость этих нелинейных уравнений методом обратной задачи рассеяния. Эти результаты были анонсированы в нашей предыдущей статье [1], а для плоских пучков метрик соответствующие утверждения и доказательства были представлены в работах автора [2, 3], где предложен метод интегрирования нелинейных уравнений для неособых плоских пучков метрик. В [4] указана пара Лакса для неособых плоских пучков метрик. Эта пара Лакса обобщается на случай произвольных неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны.

В данной статье доказывается, что все неособые пары согласованных метрик постоянной римановой кривизны описываются специальными интегрируемыми редукциями нелинейных уравнений, определяющих ортогональные криволинейные системы координат в пространствах постоянной кривизны. Отметим, что задача описания пучков метрик постоянной римановой кривизны эквивалентна задаче описания согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, порождаемых метриками постоянной римановой кривизны (согласованных скобок Мохова–Ферапонтова, см. [5]). Эти нелокальные скобки Пуассона играют важную роль в теории систем гидродинамического типа.

Напомним, что две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$ и $R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u)$ (в этом случае мы будем говорить также, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок согласованных метрик) [1]. Плоские пучки метрик, которые суть не что иное, как согласованные невырожденные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (согласованные скобки Дубровина–Новикова [6]), были введены в [7]. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант №02-01-00803) и INTAS (грант №99-1782).

соответственно называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$ [1]. Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны [1]. Очевидно, что все эти определения взаимно согласованы, и если согласованные метрики являются метриками постоянной римановой кривизны, то они образуют пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны, а если согласованные метрики плоские, то они образуют плоский пучок метрик. Пара псевдоримановых метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется *неособой*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны (пучок метрик, образованный неособой парой метрик, также называется *неособым*). В [1] доказано, что произвольная неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$, такие, что обе метрики в этих координатах диагональны и имеют следующий специальный вид (одну из метрик, в данном случае $g_2^{ij}(u)$, можно считать произвольной диагональной метрикой): $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной (вообще говоря, комплексные). Очевидно, что собственные значения рассматриваемой пары метрик задаются функциями $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$.

§2. Уравнения для неособых пар согласованных метрик постоянной римановой кривизны

Рассмотрим задачу описания неособых пар согласованных метрик постоянной римановой кривизны. Как доказано в [1] (см. также введение выше), достаточно классифицировать пары диагональных метрик постоянной римановой кривизны специального вида $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные (вообще говоря, комплексные) функции одной переменной, а $g^i(u)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные функции.

Задача описания диагональных $N \times N$ -метрик постоянной римановой кривизны K , т.е. метрик $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$, таких, что их тензор римановой кривизны имеет вид $R_{kl}^{ij} = K(\delta_l^i \delta_k^j - \delta_k^i \delta_l^j)$, где $K = \text{const}$, является классической задачей дифференциальной геометрии. Эта задача эквивалентна задаче описания ортогональных криволинейных систем координат в N -мерном пространстве постоянной кривизны K . Недавно Захаров показал, что уравнения Ламе, описывающие ортогональные криволинейные системы координат в плоских (евклидовых или псевдоевклидовых) N -мерных пространствах, интегрируются методом обратной задачи рассеяния [8] (см. также алгебро-геометрический подход в [9]). Аналогично интегрируются методом обратной задачи и уравнения, описывающие ортогональные криволинейные системы координат в N -мерных пространствах постоянной кривизны.

Введем стандартные классические обозначения

$$g^i(u) = \frac{\varepsilon^i}{(H_i(u))^2}, \quad ds^2 = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i (H_i(u))^2 (du^i)^2, \quad (2.1)$$

$$\beta_{ik}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i}, \quad i \neq k, \quad (2.2)$$

где $H_i(u)$ — коэффициенты Ламе и $\beta_{ik}(u)$ — коэффициенты вращения, $\varepsilon^i = \pm 1$, $i = 1, \dots, N$. Хотя в нашем случае все функции, вообще говоря, комплексные, мы будем использовать формулы, которыми удобно пользоваться и в чисто вещественном случае.

ТЕОРЕМА 2.1. *Неособые пары согласованных метрик постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 описываются следующими совместными интегрируемыми нелинейными системами:*

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \varepsilon^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \varepsilon^s \beta_{si} \beta_{sj} = -K_2 H_i H_j, \quad i \neq j, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^i f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \varepsilon^i (f^i)' \beta_{ij} + \varepsilon^j f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \varepsilon^j (f^j)' \beta_{ji} \\ + \sum_{s \neq i, s \neq j} \varepsilon^s f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} = -K_1 H_i H_j, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные заданные ненулевые функции одной переменной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Уравнения (2.3) — известные уравнения n -волн (уравнения Дарбу [10]), а уравнения (2.3), (2.4) описывают ортогональные криволинейные системы координат в N -мерных пространствах постоянной кривизны K_2 ; в частности, при $K_2 = 0$ получаются знаменитые уравнения Ламе. Уравнения (2.5) определяют нетривиальную нелинейную интегрируемую дифференциальную редукцию уравнений (2.3), (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если среди функций $f^i(u^i)$ есть совпадающие ненулевые константы, то уравнения (2.3)–(2.5) также описывают пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны, но, очевидно, этот пучок не является неособым.

Система уравнений (2.2)–(2.5) является совместной при любых функциях $f^i(u^i)$, что легко проверяется прямыми вычислениями. Более того, общее решение нелинейной системы (2.2)–(2.5) зависит от N^2 произвольных функций одной переменной (функции $\beta_{ij}(u)$ и $H_j(u)$ могут быть заданы произвольным образом на j -й координатной линии).

Рассмотрим условия, отвечающие тому, что диагональные метрики $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные функции одной указанной переменной (эти функции лишь не должны быть равны нулю тождественно), являются метриками постоянной римановой кривизны K_2 и K_1 соответственно.

Напомним, что для любой диагональной метрики $\Gamma_{jk}^i(u) = 0$, если все индексы i, j, k различны. Очевидно также, что при этом $R_{kl}^{ij}(u) = 0$, если все индексы i, j, k, l различны. Кроме того, в силу хорошо известных симметрий тензора римановой кривизны мы имеем

$$R_{kl}^{ii}(u) = R_{kk}^{ij}(u) = 0, \quad R_{il}^{ij}(u) = -R_{li}^{ij}(u) = R_{li}^{ji}(u) = -R_{il}^{ji}(u).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть условие $R_{kl}^{ij}(u) = K_2(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_k^j \delta_l^i)$ (необходимое и достаточное условие того, что соответствующая метрика является метрикой постоянной римановой кривизны K_2) только для компонент $R_{il}^{ij}(u)$ тензора римановой кривизны, где $i \neq j, i \neq l$:

$$R_{il}^{ij} = -K_2 \delta_l^j, \quad i \neq j, i \neq l. \quad (2.6)$$

Для произвольной диагональной метрики $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$ получаем

$$\Gamma_{2,ik}^i(u) = \Gamma_{2,ki}^i(u) = -\frac{1}{2g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^k} \quad \text{для любых } i, k,$$

$$\Gamma_{2,jj}^i(u) = \frac{1}{2} \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i}, \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} R_{2,il}^{ij}(u) &= g^i(u) R_{2,il}^j(u) \\ &= g^i(u) \left(\frac{\partial \Gamma_{2,il}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^l} + \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,si}^j(u) \Gamma_{2,il}^s(u) - \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,sl}^j(u) \Gamma_{2,ii}^s(u) \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Необходимо рассмотреть отдельно два случая.

1) $j \neq l$. Тогда условие (2.6) принимает вид

$$R_{il}^{ij} = 0, \quad i \neq j, i \neq l, j \neq l,$$

$$\begin{aligned} R_{2,il}^{ij}(u) &= g^i(u) \left(-\frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{2,ii}^j(u) \Gamma_{2,il}^i(u) - \Gamma_{2,jl}^j(u) \Gamma_{2,ii}^j(u) - \Gamma_{2,ll}^j(u) \Gamma_{2,ii}^l(u) \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) - \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^l} \\ &\quad + \frac{1}{4g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^l} - \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{g^i(u)g^l(u)} \frac{\partial g^l}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \frac{\partial H_j}{\partial u^k} + \frac{1}{H_k(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^j} \frac{\partial H_i}{\partial u^k}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k, \quad (2.9)$$

которые, в свою очередь, эквивалентны уравнениям (2.3).

2) $j = l$. Тогда условие (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^{ij} &= -K_2, \quad i \neq j, \\
 R_{2,ij}^{ij}(u) &= g^i(u) \left(\frac{\partial \Gamma_{2,ij}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{2,ii}^j}{\partial u^j} + \Gamma_{2,ii}^j(u) \Gamma_{2,ij}^i(u) \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{2,ji}^j(u) \Gamma_{2,ij}^j(u) - \sum_{s=1}^N \Gamma_{2,sj}^j(u) \Gamma_{2,ii}^s(u) \right) \\
 &= -\frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \right) - \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} + \frac{1}{4} \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} - \frac{1}{4g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^i}{\partial u^i} \\
 &\quad + \sum_{s \neq i} \frac{1}{4} \frac{g^s(u)}{g^i(u)g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^s} \frac{\partial g^i}{\partial u^s} = -K_2. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.10) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_j}{\partial u^i} \right) + \varepsilon^j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{1}{H_j(u)} \frac{\partial H_i}{\partial u^j} \right) + \sum_{s \neq i, s \neq j} \frac{\varepsilon^s}{(H_s(u))^2} \frac{\partial H_i}{\partial u^s} \frac{\partial H_j}{\partial u^s} \\
 = -K_2 H_i H_j, \quad i \neq j, \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, эквивалентны уравнениям (2.4).

Условие, что метрика $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ также является метрикой постоянной римановой кривизны, дает $N(N-1)/2$ дополнительных уравнений (2.5). Отметим, что в этом случае компоненты (2.8) тензора римановой кривизны обнуляются автоматически, а выполнение условия (2.10) дает соответствующие $N(N-1)/2$ уравнений.

Действительно, для метрики $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ коэффициенты Ламе и коэффициенты вращения имеют вид

$$\tilde{H}_i(u) = \frac{H_i(u)}{\sqrt{\varepsilon^i f^i(u^i)}}, \quad f^i(u^i)g^i(u) = \frac{\varepsilon^i \varepsilon^i}{(\tilde{H}_i(u))^2}, \quad \varepsilon^i = \pm 1, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta}_{ik}(u) &= \frac{1}{\tilde{H}_i(u)} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial u^i} = \frac{\sqrt{\varepsilon^i f^i(u^i)}}{\sqrt{\varepsilon^k f^k(u^k)}} \left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{\varepsilon^i f^i(u^i)}}{\sqrt{\varepsilon^k f^k(u^k)}} \beta_{ik}(u), \quad i \neq k. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Соответственно уравнения (2.3) автоматически выполняются также и для коэффициентов вращения $\tilde{\beta}_{ik}(u)$, а уравнения (2.4) для $\tilde{\beta}_{ik}(u)$ дают уравнения (2.5).

Отметим, что для наших дальнейших целей нам удобнее записывать систему (2.3)–(2.5) именно в таком виде, чтобы подчеркивать редукцию (2.12), (2.13), играющую важную роль в нашем методе интегрирования этой системы (см. следующий параграф), хотя легко показать, что уравнения (2.4), (2.5) для неособых пар метрик (т. е. когда все функции $f^i(u^i)$ должны быть различны и в том случае,

если они — константы) эквивалентны следующим уравнениям (в частности, эти уравнения удобнее использовать для проверки совместности системы (2.2)–(2.5)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} &= \frac{1}{2} \frac{(f^i(u^i))'}{f^j(u^j) - f^i(u^i)} \beta_{ij} + \frac{\varepsilon^i \varepsilon^j}{2} \frac{(f^j(u^j))'}{f^j(u^j) - f^i(u^i)} \beta_{ji} \\ &\quad - \sum_{s \neq i, s \neq j} \varepsilon^i \varepsilon^s \frac{f^j(u^j) - f^s(u^s)}{f^j(u^j) - f^i(u^i)} \beta_{si} \beta_{sj} \\ &\quad + \varepsilon^i \frac{K_1 - K_2 f^j(u^j)}{f^j(u^j) - f^i(u^i)} H_i H_j, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

ПРИМЕР 2.1. Если все функции $f^i(u^i)$ являются произвольными различными ненулевыми константами, $f^i(u^i) = c^i$, $c^i = \text{const} \neq 0$, $i = 1, \dots, N$, $c^i \neq c^j$ при $i \neq j$, то интегрируемая система (2.2)–(2.5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} = - \sum_{s \neq i, s \neq j} \varepsilon^i \varepsilon^s \frac{c^j - c^s}{c^j - c^i} \beta_{si} \beta_{sj} + \varepsilon^i \frac{K_1 - K_2 c^j}{c^j - c^i} H_i H_j, \quad i \neq j, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial H_j}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_i, \quad i \neq j. \quad (2.17)$$

В плоском случае, при $K_1 = K_2 = 0$, система (2.15), (2.16) была рассмотрена в [4] (она связана с любопытной тройкой попарно коммутирующих уравнений Монжа–Ампера). Система уравнений (2.15)–(2.17) представляет самостоятельный интерес для приложений.

§ 3. Согласованные плоские метрики и метод дифференциальных редукций Захарова

В этом параграфе мы приведем метод интегрирования системы уравнений (2.3)–(2.5) в плоском случае (при $K_1 = K_2 = 0$) (см. [2, 3]), т. е. системы (в данном параграфе во всех формулах $\varepsilon^i = 1$, $i = 1, \dots, N$)

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} (f^i)' \beta_{ij} + f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} \\ + \frac{1}{2} (f^j)' \beta_{ji} + \sum_{s \neq i, s \neq j} f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные заданные функции одной переменной.

Напомним метод Захарова интегрирования уравнений Ламе (3.1) и (3.2) [8].

Мы должны выбрать матричную функцию $F_{ij}(s, s', u)$ со специальными свойствами и решить линейное интегральное уравнение

$$K_{ij}(s, s', u) = F_{ij}(s, s', u) + \int_s^\infty \sum_l K_{il}(s, q, u) F_{lj}(q, s', u) dq. \quad (3.4)$$

При этом мы получаем однопараметрическое семейство решений уравнений Ламе по формуле

$$\beta_{ij}(s, u) = K_{ji}(s, s, u). \quad (3.5)$$

В частности, если $F_{ij}(s, s', u) = f_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, где $f_{ij}(x, y)$ — произвольная матричная функция двух переменных, то формула (3.5) задает решения уравнений (3.1). Для того чтобы построить решения уравнений (3.1), (3.2), Захаров предложил наложить на «одевающую матричную функцию» $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ некоторое дополнительное линейное дифференциальное соотношение. Если матричная функция $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ удовлетворяет дифференциальному соотношению Захарова (мы приведем его ниже), то коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ удовлетворяют дополнительно уравнениям (3.2).

Опишем нашу схему интегрирования всей системы уравнений (3.1)–(3.3).

ЛЕММА 3.1. *Если две функции, $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ и*

$$\tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) = \frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} F_{ij}(s - u^i, s' - u^j), \quad (3.6)$$

обе удовлетворяют дифференциальному соотношению Захарова, то соответствующие коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ (см. формулу (3.5)) удовлетворяют всем уравнениям (3.1)–(3.3).

Действительно, если функция $K_{ij}(s, s', u)$ является решением линейного интегрального уравнения (3.4), отвечающим функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, то функция

$$\tilde{K}_{ij}(s, s', u) = \frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} K_{ij}(s, s', u) \quad (3.7)$$

является решением уравнения (3.4), отвечающим функции (3.6). Это несложно доказать, умножая интегральное уравнение (3.4) на $\sqrt{f^j(u^j - s')}/\sqrt{f^i(u^i - s)}$:

$$\tilde{K}_{ij}(s, s', u) = \tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) + \int_s^\infty \sum_l \tilde{K}_{il}(s, q, u) \tilde{F}_{lj}(q - u^l, s' - u^j) dq. \quad (3.8)$$

Тогда и $\tilde{\beta}_{ij}(s, u) = \tilde{K}_{ji}(s, s, u)$, и $\beta_{ij}(s, u) = K_{ji}(s, s, u)$ удовлетворяют уравнениям Ламе (3.1) и (3.2). Кроме того, мы имеем

$$\tilde{\beta}_{ij}(s, u) = \tilde{K}_{ji}(s, s, u) = \frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s)}} K_{ji}(s, s, u) = \frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s)}} \beta_{ij}(s, u). \quad (3.9)$$

Таким образом, в этом случае коэффициенты вращения $\beta_{ij}(u)$ удовлетворяют в точности всем уравнениям (3.1)–(3.3), т. е. они порождают соответствующие согласованные плоские метрики.

Редукция Захарова задается следующими дифференциальными соотношениями [8]:

$$\frac{\partial F_{ij}(s, s', u)}{\partial s'} + \frac{\partial F_{ji}(s', s, u)}{\partial s} = 0. \quad (3.10)$$

Чтобы разрешить эти соотношения для матричной функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, можно ввести $N(N - 1)/2$ произвольных функций двух переменных $\Phi_{ij}(x, y)$, $i < j$, положить для $i < j$

$$\begin{aligned} F_{ij}(s - u^i, s' - u^j) &= \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s}, \\ F_{ji}(s - u^i, s' - u^j) &= -\frac{\partial \Phi_{ij}(s' - u^i, s - u^j)}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.11)$$

и, кроме того, для любого i положить

$$F_{ii}(s - u^i, s' - u^i) = \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s}, \quad (3.12)$$

где $\Phi_{ii}(x, y)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные кососимметрические функции:

$$\Phi_{ii}(x, y) = -\Phi_{ii}(y, x), \quad (3.13)$$

см. [8].

Для функции

$$\tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) = \frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} F_{ij}(s - u^i, s' - u^j) \quad (3.14)$$

дифференциальные соотношения Захарова (3.10) дают в точности $N(N - 1)/2$ линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на $N(N - 1)/2$ функций $\Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, $i < j$, двух переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\sqrt{f^j(u^j - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^j(u^j - s')}} \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s'} \right) = 0, \quad i < j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

которые эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^i \partial u^j} (f^i(u^i - s) - f^j(u^j - s')) + \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^j} \frac{df^i(u^i - s)}{du^i} \\ - \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial u^i} \frac{df^j(u^j - s')}{du^j} = 0, \quad i < j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Интересно, что все эти уравнения (3.16) для функций $\Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ суть уравнения одного и того же типа и совпадают с единственным уравнением в двумерном случае ($N = 2$), получаемым прямо из условий обнуления соответствующих тензоров римановой кривизны (см. [1]).

Кроме того, для N функций $\Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)$ мы имеем также N линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка,

получаемых из дифференциальных соотношений Захарова (3.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s')}}{\sqrt{f^i(u^i - s)}} \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sqrt{f^i(u^i - s)}}{\sqrt{f^i(u^i - s')}} \frac{\partial \Phi_{ii}(s' - u^i, s - u^i)}{\partial s'} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s \partial s'} (f^i(u^i - s) - f^i(u^i - s')) - \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s} \frac{df^i(u^i - s')}{ds'} \\ + \frac{\partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)}{\partial s'} \frac{df^i(u^i - s)}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Любое решение линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (3.16) и (3.18) порождает однопараметрическое семейство решений системы (3.1)–(3.3) по линейным уравнениям и явным формулам (3.11), (3.12), (3.4), (3.5). Таким образом, система (3.1)–(3.3) линеаризована. Метод дифференциальных редукций применим и к интегрированию произвольных неособых пучков согласованных метрик постоянной римановой кривизны (2.2)–(2.5). В следующем параграфе мы предъявим пару Лакса со спектральным параметром для системы (2.2)–(2.5), что также позволяет проинтегрировать эту систему.

Отметим, что уравнения (3.16), (3.18) легко интегрируются явно в специальных функциях. Если какие-то функции $f^i(u^i)$ не являются константами, то, как доказано в [1], для описания всех соответствующих пучков метрик достаточно рассматривать для этих функций случай $f^i(u^i) = u^i$, так как эти функции $f^i(u^i)$ могут быть выбраны в качестве соответствующих новых локальных координат. Соответственно уравнения (3.16) принадлежат к одному из следующих трех типов:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{1}{2(u^1 - u^2)} \frac{\partial F}{\partial u^1} - \frac{1}{2(u^1 - u^2)} \frac{\partial F}{\partial u^2}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} = -\frac{1}{2u^2} \frac{\partial F}{\partial u^1}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} = 0. \quad (3.21)$$

Общими решениями уравнений (3.20) и (3.21) являются функции $F(u^1, u^2) = g(u^1)/\sqrt{u^2 + h(u^2)}$ и $F(u^1, u^2) = g(u^1) + h(u^2)$ соответственно, где $g(u^1)$ и $h(u^2)$ — произвольные функции.

Уравнение (3.19) после замены переменных $u^1 = t + r$, $u^2 = t - r$ переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad (3.22)$$

хорошо известное в классической геометрии (еще одно известное уравнение Дарбу) и в классической математической физике (уравнение осесимметричных колебаний газа (r — радиальная координата) или уравнение для решений волнового

уравнения, соответствующих процессам излучения на плоскости (x, y) , т.е. решений, зависящих только от радиальной координаты $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и времени t).

В частности, уравнению Дарбу (3.22) с начальными условиями

$$F(t, 0) = \psi(t), \quad \frac{\partial F}{\partial r}(t, 0) = 0 \quad (3.23)$$

удовлетворяют функции вида

$$v(t, r) = \text{const} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(t + xr)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad (3.24)$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Для функции $\psi(t, z) = \psi(t)$, заданной на плоскости (t, z) , функция $v(t, r)$ выражает среднее значение на окружности радиуса r с центром в точке (t, z) .

Общие решения уравнений (3.22) можно построить методом разделения переменных: $F(t, r) = S(t)R(r)$,

$$\frac{S''}{S} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R}, \quad (3.25)$$

$$S'' = aS, \quad rR'' + R' - arR = 0, \quad a = \text{const}. \quad (3.26)$$

Легко написать общие решения в терминах специальных функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя или в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

§4. Пара Лакса для неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны

Пара Лакса для неособых плоских пучков метрик (3.1)–(3.3) указана Ферапотовым в [4]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} = \frac{\sqrt{\lambda + f^i}}{\sqrt{\lambda + f^j}} \beta_{ij} \varphi_j, \quad i \neq j, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\lambda + f^k}}{\sqrt{\lambda + f^i}} \beta_{ki} \varphi_k, \quad (4.2)$$

где λ — спектральный параметр.

Отметим, что линейная задача для уравнений Ламе (3.1), (3.2) была хорошо известна еще Дарбу [10] (см. также, например, [8, 9]):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} = \beta_{ij} \varphi_j, \quad i \neq j, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \beta_{ki} \varphi_k. \quad (4.4)$$

Условие совместности линейной системы (4.3), (4.4) определяет уравнения Ламе (3.1), (3.2). Пару Лакса (4.1), (4.2) легко получить из классической линейной задачи (4.3), (4.4) для уравнений Ламе. Действительно, система уравнений (3.1)–(3.3), определяющая неособые плоские пучки метрик, получается из условия, что диагональная метрика $(\lambda + f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$ является плоской при любом λ .

Очевидно, что в этом случае (см. (2.13) и [2, 3]) в уравнениях Ламе (3.1), (3.2) необходимо заменить $\beta_{ij}(u)$ на

$$\hat{\beta}_{ij}(u) = \frac{\sqrt{\lambda + f^i(u^i)}}{\sqrt{\lambda + f^j(u^j)}} \beta_{ij}(u).$$

При этом линейная задача (4.3), (4.4) переходит в пару Лакса (4.1), (4.2).

Пара Лакса (4.1), (4.2) обобщается и на случай произвольных неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны (2.2)–(2.5). Пара Лакса для системы (2.2)–(2.5) легко получается из линейной задачи для системы (2.2)–(2.4), описывающей все ортогональные криволинейные системы координат в N -мерных пространствах постоянной кривизны K_2 :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} = \frac{\sqrt{\varepsilon^i}}{\sqrt{\varepsilon^j}} \beta_{ij} \varphi_j, \quad i \neq j, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\varepsilon^k}}{\sqrt{\varepsilon^i}} \beta_{ki} \varphi_k + \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{\varepsilon^i}} H_i \psi, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{\varepsilon^i}} H_i \varphi_i \quad (4.7)$$

(условие совместности линейной системы (4.5)–(4.7) определяет уравнения (2.2)–(2.4)). Действительно, система уравнений (2.2)–(2.5), определяющая пучки метрик постоянной римановой кривизны, эквивалентна условию, что диагональная метрика $(\lambda + f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$ является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda K_2 + K_1$ при любом λ . В этом случае (см. (2.12), (2.13) и [2, 3]) в уравнениях (2.3), (2.4) необходимо заменить ε^i на $\varepsilon^i \epsilon^i$, $H_i(u)$ на

$$\hat{H}_i(u) = \frac{H_i(u)}{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i(u^i))}},$$

$\beta_{ij}(u)$ на

$$\hat{\beta}_{ij}(u) = \frac{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i(u^i))}}{\sqrt{\varepsilon^j(\lambda + f^j(u^j))}} \beta_{ij}(u)$$

и K_2 на $\hat{K} = \lambda K_2 + K_1$, $\epsilon^i = \pm 1$. При этом линейная задача (4.5)–(4.7) переходит в пару Лакса со спектральным параметром для системы (2.2)–(2.5):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^j} = \frac{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i)}}{\sqrt{\varepsilon^j(\lambda + f^j)}} \beta_{ij} \varphi_j, \quad i \neq j, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\varepsilon^k(\lambda + f^k)}}{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i)}} \beta_{ki} \varphi_k + \frac{\sqrt{\lambda K_2 + K_1}}{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i)}} H_i \psi, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\lambda K_2 + K_1}}{\sqrt{\varepsilon^i(\lambda + f^i)}} H_i \varphi_i, \quad (4.10)$$

где λ — спектральный параметр. Условие совместности линейной системы (4.8)–(4.10) эквивалентно уравнениям (2.2)–(2.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мохов О. И.* Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики. Функц. анализ и его прил., **35**, вып. 2, 24–36 (2001); E-print, arXiv: math.DG/0005051.
2. *Mokhov O. I.* On integrability of the equations for nonsingular pairs of compatible flat metrics. E-print, arXiv: math.DG/0005081.
3. *Мохов О. И.* Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ламе. УМН, **56**, вып. 2, 221–222 (2001).
4. *Ferapontov E. V.* Compatible Poisson brackets of hydrodynamic type. E-print, arXiv: math.DG/0005221.
5. *Мохов О. И., Ферпонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **270**, № 4, 781–785 (1983).
7. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories. Lect. Notes in Math., Vol. 1620, 1996, pp. 120–348; hep-th/9407018.
8. *Zakharov V. E.* Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equations. Duke Math. J., **94**, No. 1, 103–139 (1998).
9. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрические n -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 1, 32–50 (1997).
10. *Darboux G.* Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1910.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru

Поступило в редакцию
24 декабря 2001 г.