Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев,
Конечность дискретного спектра четырехчастичного
оператора Шрёдингера на решетке, *Функц. анализ и
его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 56–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:38:38

Конечность дискретного спектра четырехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*

© 2002. С. АЛЬБЕВЕРИО, С. Н. ЛАКАЕВ, Ж. И. АБДУЛЛАЕВ

1. Введение. Спектральные свойства многочастичных операторов Шрёдингера на евклидовом пространстве достаточно хорошо изучены [1–3]. Для системы многих частиц с произвольными быстро убывающими взаимодействиями конечность дискретного спектра установлена Жислиным [4, 5] и Яфаевым [6]. Жислиным применялся разработанный им вариационный метод, а результаты Яфаева основаны на исследовании фредгольмовой системы уравнений для резольвенты оператора Шрёдингера типа Фаддеева или Вайнберга.

Для резольвенты гамильтониана системы четырех квантовых частиц на евклидовом пространстве фредгольмова система интегральных уравнений получена Фаддеевым и Якубовским [2, 7].

Компактное интегральное уравнение типа Фаддеева для гамильтониана системы трех квантовых частиц на решетке получено в [8–10].

В этой заметке гамильтониан системы четырех бозонов, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на ν -мерной решетке, рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор (дискретный оператор Шрёдингера), действующий в гильбертовом пространстве. Установлен усиленный вариант теоремы Хунцикера–ван Винтера–Жислина (см. [1]) о местоположении существенного спектра.

Для любого значения $\mu > 0$ (μ — энергия взаимодействия двух бозонов) доказана конечность числа собственных значений, лежащих левее существенного спектра, а при достаточно малых $\mu > 0$ установлено их отсутствие. Эти результаты выводятся из интегрального уравнения типа Фаддеева–Якубовского, полученного в [11].

Авторы выражают благодарность Р. А. Минлосу за обсуждения результатов работы и рецензенту за ценные и полезные замечания, которые помогли существенно улучшить полученные в заметке результаты.

Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ есть ν -мерная решетка и $l_2^{\text{sym}}((\mathbb{Z}^\nu)^m)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых симметричных функций, определенных на $(\mathbb{Z}^\nu)^m$. В координатном представлении дискретный оператор Шрёдингера системы четырех бозонов, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, действует в гильбертовом пространстве $l_2^{\text{sym}}((\mathbb{Z}^\nu)^4)$ по формуле

$$\begin{aligned}
 (\hat{F}_\mu \phi)(n_1, n_2, n_3, n_4) = & \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) [\phi(n_1 + s, n_2, n_3, n_4) + \phi(n_1, n_2 + s, n_3, n_4) \\
 & + \phi(n_1, n_2, n_3 + s, n_4) + \phi(n_1, n_2, n_3, n_4 + s)] \\
 & - \mu \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \delta_{n_i n_j} \phi(n_1, n_2, n_3, n_4).
 \end{aligned}$$

*Работа частично финансировалась ГКНТ Узбекистана и Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Здесь $\hat{\varepsilon}(s)$, $s = (s_1, \dots, s_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$, — вещественнозначная функция, определенная на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, зависящая только от $|s| = |s_1| + \dots + |s_\nu|$ и удовлетворяющая неравенству $|\hat{\varepsilon}(s)| \leq C \exp(-a|s|)$ для некоторых чисел $a > 0$, $C > 0$; $\mu > 0$ — энергия взаимодействия двух частиц; δ_{nm} — символ Кронекера.

Пусть $\mathbb{T}^\nu$ есть ν -мерный тор и $L_2^{\text{sym}}((\mathbb{T}^\nu)^m)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^\nu)^m$. В импульсном представлении дискретный оператор Шрёдингера описанной выше системы действует в $L_2^{\text{sym}}((\mathbb{T}^\nu)^4)$ по формуле

$$F_\mu f = \sum_{i=1}^4 \varepsilon(k_i) f(k_1, k_2, k_3, k_4) - \mu \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \delta(k_\alpha + k_\beta - k'_\alpha - k'_\beta) f(k_i, k_j, k'_\alpha, k'_\beta) dk'_\alpha dk'_\beta.$$

Здесь $\varepsilon(k) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{\varepsilon}(s) \exp(i(k, s))$ — преобразование Фурье функции $\hat{\varepsilon}$.

Пусть $N = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ — полный квазиимпульс системы четырех частиц и $\Gamma_N = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \in (\mathbb{T}^\nu)^4 : k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = N\}$ — многообразие размерности 3ν . Обозначим через $L_2^{\text{sym}}(\Gamma_N)$ гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых симметричных функций, определенных на Γ_N .

Оператор $\hat{F}_\mu$ коммутирует с группой сдвигов; поэтому пространство $L_2^{\text{sym}}((\mathbb{T}^\nu)^4)$ и оператор F_μ разлагаются в прямые интегралы

$$L_2^{\text{sym}}((\mathbb{T}^\nu)^4) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus L_2^{\text{sym}}(\Gamma_N) dN, \quad F_\mu = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus F_\mu(N) dN.$$

В пространстве $L_2^{\text{sym}}(\Gamma_N)$ оператор $F_\mu(N)$ действует по формуле

$$F_\mu(N)f = F_0(N)f - \mu \sum_{1 \leq i < j \leq 4} V_{ij}f. \quad (1)$$

Здесь

$$(F_0(N)f)(k_1, k_2, k_3) = \varepsilon_N(k_1, k_2, k_3) f(k_1, k_2, k_3),$$

$\varepsilon_N(k_1, k_2, k_3) = \varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3) + \varepsilon(k_4)$, $k_4 = N - k_1 - k_2 - k_3$. В силу симметричности функции $f \in L_2^{\text{sym}}(\Gamma_N)$ относительно переменных действие оператора V_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$, на f можно выразить так:

$$(V_{ij}f)(k_1, k_2, k_3) = \int_{\mathbb{T}^\nu} f(k_i, k_j, s) ds.$$

Введем следующие пространства: пространство $L_2^{ij}(\Gamma_N)$, состоящее из тех и только тех элементов $f \in L_2(\Gamma_N)$, которые симметричны относительно перестановки переменных k_i, k_j , а также k_α, k_β , и пространство $L_2^\alpha(\Gamma_N)$, состоящее из функций, симметричных относительно перестановки переменных k_i, k_j, k_β . Во введенных пространствах определим следующие операторы каналов:

$$h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N)f = F_0(N)f - \mu V_{ij}f, \quad f \in L_2^{ij}(\Gamma_N),$$

$$h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)f = F_0(N)f - \mu[V_{ij} + V_{\alpha\beta}]f, \quad f \in L_2^{ij}(\Gamma_N),$$

$$H_\mu^{(\alpha)}(N)f = F_0(N)f - \mu[V_{ij} + V_{i\beta} + V_{j\beta}]f, \quad f \in L_2^\alpha(\Gamma_N).$$

Так как частицы одинаковые, операторы каналов $h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N)$, $1 \leq i < j \leq 4$ (здесь 6 операторов), становятся неразличимыми, и по этой причине их спектры

совпадают (аналогичные утверждение имеют место и для операторов каналов $h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)$, $H_\mu^{(\alpha)}(N)$).

Операторы каналов $h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N)$, $h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)$, $H_\mu^{(\alpha)}(N)$, соответствующие распадам типа $\{ij\}\{\alpha\}\{\beta\}$, $\{ij\}\{\alpha\beta\}$, $\{ij\beta\}\{\alpha\}$, разлагаются в «прямые операторные интегралы»:

$$h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus [h_\mu(k) \otimes I_{N-k} + I_k \otimes h_0(N-k)] dk,$$

$$h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus [h_\mu(k) \otimes I_{N-k} + I_k \otimes h_\mu(N-k)] dk,$$

$$H_\mu^{(\alpha)}(N) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \oplus [H_\mu(K) + \varepsilon(N-K)E] dK.$$

Здесь символ $\otimes$ означает тензорное произведение операторов и $h_\mu(k)$ — двухчастичный, а $H_\mu(K)$ — трехчастичный дискретные операторы Шрёдингера [9, 10].

Из теоремы о спектре разложимых операторов [1] следует

ЛЕММА 1. *Для спектров операторов каналов имеют место следующие представления:*

$$\sigma(h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^\nu} \{\sigma(h_\mu(k)) + \sigma(h_0(N-k))\}, \quad (2)$$

$$\sigma(h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^\nu} \{\sigma(h_\mu(k)) + \sigma(h_\mu(N-k))\}, \quad (3)$$

$$\sigma(H_\mu^{(\alpha)}(N)) = \bigcup_{K \in \mathbb{T}^\nu} \{\sigma(H_\mu(K)) + \hat{\varepsilon}(N-K)\}. \quad (4)$$

Здесь $A + B$ означает $\{z = \lambda + \mu : \lambda \in A, \mu \in B\}$.

Из включения $\sigma(h_0(k)) \subset \sigma(h_\mu(k))$ и формул (2)–(3) следует включение

$$\sigma(h_\mu^{(ij)(\alpha)(\beta)}(N)) \subset \sigma(h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)).$$

Обозначим через $\Sigma(N)$ множество $\sigma(h_\mu^{(ij)(\alpha\beta)}(N)) \cup \sigma(H_\mu^{(\alpha)}(N))$.

Известно [11], что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(F_\mu(N))$ оператора $F_\mu(N)$ совпадает с множеством $\Sigma(N)$. Двухчастичный оператор $h_\mu(k)$ имеет не более одного собственного значения $z_\mu(k)$ (см. [9]), а трехчастичный оператор $H_\mu(K)$ может иметь конечное или бесконечное число собственных значений $E_\mu^{(1)}(K) \leq \dots \leq E_\mu^{(n)}(K)$, причем $n \leq \infty$ зависит от K . Мы предположим, что $E_\mu^{(1)}(K)$ имеет невырожденный минимум в точке $K = 0$.

Пусть $\nu = 3$ и $\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i)$. Можно показать, что

$$-\mu \leq z_\mu(k) \leq 6 - \mu, \quad -3\mu \leq E_\mu^{(1)}(K) \leq 9 - 3\mu. \quad (5)$$

Из представлений (3) и (4) следует, что существенный спектр $\Sigma(N)$ оператора $F_\mu(N)$ состоит из объединения областей значений функций $\varepsilon_N(k_1, k_2, k_3)$, $z_\mu(k_1 + k_2) + \varepsilon(k_3) + \varepsilon(N - k_1 - k_2 - k_3)$, $z_\mu(k_1 + k_2) + z_\mu(N - k_1 - k_2)$ и $E_\mu^{(n)}(p) + \varepsilon(N - p)$. Если $N = 0$, то $\text{Im } \varepsilon_0 = [0, 24] = \sigma(F_0(0))$. В этом случае для

левых краев существенных спектров операторов каналов верны равенства

$$\inf \sigma(h_{\mu}^{(ij)(\alpha)(\beta)}(0)) = \min\{0, z_{\mu}(0)\}, \quad \inf \sigma(h_{\mu}^{(ij)(\alpha\beta)}(0)) = \min\{0, 2z_{\mu}(0)\}, \quad (6)$$

$$\inf \sigma(H_{\mu}^{(\alpha)}(0)) = \min\{0, E_{\mu}^{(1)}(0)\}.$$

Из равенств (6) следует, что если левый край κ существенного спектра оператора $F_{\mu}(0)$ отрицателен, то он совпадает либо с $2z_{\mu}(0)$, либо с $E_{\mu}^{(1)}(0)$. Это и есть теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина (см. [1]) для решетчатых четырехчастичных гамильтонианов. При $\mu > 9$ выполняется неравенство $E_{\mu}^{(1)}(0) < 2z_{\mu}(0)$ (см. (5)). Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu > 9$. Тогда нижняя граница существенного спектра оператора $F_{\mu}(0)$ определяется только распадением типа $\{ij\beta\}\{\alpha\}$, т. е. $\inf \sigma_{\text{ess}}(F_{\mu}(0)) = \inf \sigma(H_{\mu}^{(\alpha)}(0))$.

Пусть $\mu_1 > 0$ — наибольшее из чисел μ , для которых трехчастичный оператор $H_{\mu}(0)$ не имеет отрицательных собственных значений. Если $\mu > \mu_1$, то существуют окрестность $U_{\delta}(0)$ и отрицательное собственное значение $E_{\mu}^{(1)}(K)$, определенное в ней.

ТЕОРЕМА 2. (а) Существует $\mu_0 > 0$, такое, что при всех $\mu \in (0, \mu_0]$ оператор $F_{\mu}(0)$ не имеет собственных значений, т. е. $\sigma(F_{\mu}(0)) = [0, 24]$.

(б) Пусть $\mu > \mu_0$ и $E_{\mu}^{(1)}(K)$ имеет невырожденный минимум в точке $K = 0$. Тогда оператор $F_{\mu}(0)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Эскиз доказательства теоремы 2. Положим $R_0^N(z) = (F_0(N) - zI)^{-1}$, $T_{12}(z) = (I - \mu V_{12}R_0^N(z))^{-1}V_{12}R_0^N(z)$, $T_{12}(z)V_{13}f = T_{234}(z)\varphi$, $T_{12}(z)V_{23}f = T_{134}(z)\varphi$, $T_{12}(z)V_{34}f = T_{12}^{34}(z)\varphi$. Пусть $I + 2\mu R_{134}(z)$, $I + 2\mu R_{234}(z)$ и $I + \mu R_{12}^{34}(z)$ — операторы, обратные соответственно операторам $I - 2\mu T_{134}(z)$, $I - 2\mu T_{234}(z)$ и $I - \mu T_{12}^{34}(z)$. Определим оператор $R_{\mu N}(z)$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{\text{sym}}((\mathbb{T}^{\nu})^2)$, формулой

$$R_{\mu N}(z)\varphi = 2\mu^2[R_{12}^{34}(z)T_{134}(z) + R_{12}^{34}(z)T_{234}(z) + R_{234}(z)T_{12}^{34}(z) + 2R_{234}(z)T_{134}(z) + R_{134}(z)T_{12}^{34}(z) + 2R_{134}(z)T_{234}(z)]\varphi. \quad (7)$$

ЛЕММА 2. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_{\mu}(N))$ оператор $R_{\mu N}(z)$ является оператором Гильберта–Шмидта.

Связь собственных значений операторов $F_{\mu}(N)$ и $R_{\mu N}(z)$ выражается следующей леммой.

ЛЕММА 3. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_{\mu}(N))$ является собственным значением оператора $F_{\mu}(N)$ тогда и только тогда, когда оператор $R_{\mu N}(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

При достаточно малых $\mu > 0$ из (7) следуют неравенства $\|R_{\mu 0}(z)\| \leq C\mu^2 < 1$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 24]$. В силу леммы 3 оператор $F_{\mu}(0)$ не имеет собственных значений вне $\sigma_{\text{ess}}(F_{\mu}(0))$ и потому $\sigma(F_{\mu}(0)) = [0, 24]$. Утверждение (а) теоремы 2 доказано.

При $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$ существенный спектр оператора $F_{\mu}(0)$ совпадает с отрезком $[0, 24]$. Поэтому конечность числа его собственных значений левее существенного

спектра вытекает из компактности предельного «симметризованного оператора» $R_{\mu 0}^s(0)$.

Обозначим через $D_\mu(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_\mu(0))$, определитель Фредгольма оператора $I - R_{\mu 0}(z)$.

ЛЕММА 4. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(F_\mu(0))$ является собственным значением оператора $F_\mu(0)$ тогда и только тогда, когда $D_\mu(z) = 0$.

Если $\mu > \mu_1$, то левый край существенного спектра оператора $F_\mu(0)$ совпадает с $E_\mu^{(1)}(0) < 0$.

ЛЕММА 5. Существует $\delta > 0$, такое, что для функции $D_\mu(z)$ имеет место разложение

$$D_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\mu)(z - E_\mu^{(1)}(0))^{n/2}, \quad z \in V_\delta(E_\mu^{(1)}(0)). \quad (8)$$

Теперь утверждение о конечности числа собственных значений в случае $\mu > \mu_1$ выводится из разложения (8) и леммы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. Мир, М., 1982.
2. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. Наука, М., 1985.
3. Цикон Х., Фрези Р., Кириш В., Саймон Б. Операторы Шрёдингера. Мир, М., 1990.
4. Жислин Г. М. ДАН СССР, **207**, №1, 25–28 (1972).
5. Жислин Г. М. ТМФ, **21**, 60–73 (1974).
6. Яфаев Д. Р. Изв. АН СССР, сер. матем., **40**, №4, 908–948, (1976).
7. Шмидт Э., Цигельман Х. Проблемы трех тел в квантовой механике. Наука, М., 1979.
8. Mattis D. C. Rev. Modern. Phys., **58**, No. 2, 361–379 (1986).
9. Лакаев С. Н. Функциональный анализ и его прил., **27**, вып. 3, 15–28 (1993).
10. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. ТМФ, **111**, №1. 94–108 (1997).
11. Лакаев С. Н., Абдуллаев Ж. И. УМН, **53**, вып. 3, 201–202 (1998).

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn
Самаркандский университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
20 марта 2000 г.

УДК 517.982.27

О точной $\mathcal{H}$ -монотонности банаховых пар

© 2002. С. В. Асташкин

1. Введение. Для банаховой пары (X_0, X_1) , $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathcal{H}$ -функционал Петре

$$\mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i \}.$$

Пару (X_0, X_1) называют $\mathcal{H}$ -монотонной (парой Кальдерона–Митягина), если для некоторого $C > 0$ и всех $x, y \in X_0 + X_1$ из неравенства

$$\mathcal{H}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{H}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0) \quad (1)$$

вытекает существование линейного оператора $T: X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$, такого, что $y = Tx$ и $\max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow X_i} \leq C$. Если последнее выполнено при $C = 1$,