Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Гиблин, В. М. Закалюкин, Особенности семейств
хорд, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, вы-
пуск 3, 63–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:14:04

пространство $\Lambda(\varphi)$ — это $L_1 + L_\infty$, причем

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = a \ln(1/q) \int_0^\infty x^*(t) q^t dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я. ДАН СССР, **256**, №1, 14–17 (1981).
2. Calderon A. P. Studia Math., **26**, No. 3, 273–299 (1966).
3. Митягин Б. С. Матем. сб., **66**, вып. 4, 473–482 (1965).
4. Седаев А. А., Семенов Е. М. Оптимизация, вып. 4 (21), 98–114 (1971).
5. Седаев А. А. ДАН СССР, **209**, №4, 798–800 (1973).
6. Peetre J. Banach Couples. Technical report, Lund, 1971.
7. Sparr G. Studia Math., **62**, 229–271 (1978).
8. Cwikel M. Ark. Mat., **19**, No. 1, 123–136 (1981).
9. Маркус А. С. ДАН СССР, **146**, 11–14 (1962).
10. Маркус А. С. УМН, **19**, вып. 4, 93–123 (1964).
11. Митягин Б. С. Изв. АН СССР, **28**, 819–832 (1964).

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
19 марта 2001 г.

УДК 517.67

Особенности семейств хорд*

© 2002. П. Гиблин, В. М. Закалюкин

1. Введение. Для заданной гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ аффинного пространства *хордой* будем называть прямую, проходящую через пару точек из M , в которых касательные гиперплоскости параллельны. Такие пары будем называть *параллельными*.

Огибающая семейства хорд для центрально симметричных гиперповерхностей M совпадает с центром симметрии. Поэтому в общем случае она называется *множеством центральной симметрии (МЦС)* гиперповерхности M . Изучение особенностей общего положения МЦС было начато в работах [6, 2] для случая $n = 2$. МЦС является *аффинным* инвариантом гиперповерхности, встречающимся в ряде приложений [5] в физике и дифференциальных уравнениях. Так, например, особенности МЦС связаны с особенностями семейств эквидистант в финслеровой геометрии.

Здесь мы показываем, что особенности МЦС являются особенностями специальных лагранжевых и лежандровых отображений [1, 7], и классифицируем все особенности общего положения в трехмерном пространстве.

Все конструкции являются локальными, а все объекты — бесконечно гладкими.

Классификация особенностей различна в следующих ситуациях:

1. Трансверсальный случай отвечает системе хорд, порожденной ростками (M, a_0) и (N, b_0) двух различных гиперповерхностей в окрестности параллельной пары a_0, b_0 , состоящей из различных точек, причем проходящая через них хорда трансверсальна гиперповерхностям. Приходится выделять два подслучая: когда отмеченные точки не являются параболическими и когда хотя бы одна из них параболическая.

*При поддержке грантов INTAS (000259), NWO и РФФИ (02010099).

2. В *бикасательном* случае точки a_0, b_0 различны, но касательные гиперплоскости к M и N в этих точках совпадают.

Эти два случая содержат все локальные особенности систем хорд, соединяющих точки двух различных гиперповерхностей общего положения.

Однако, изучая особенности систем хорд с концами на одной гиперповерхности, необходимо еще рассмотреть параллельные пары точек a, b , сколь угодно близких к параболической точке a_0 гиперповерхности M . В этом случае возникают $\mathbb{Z}_2$ -симметричные лагранжевы особенности, которые изучаются в отдельной работе [8].

2. Аффинные производящие семейства. Пусть (M, a_0) и (N, b_0) — два ростка в точках a_0 и b_0 гладких гиперповерхностей аффинного пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{r}_i: U_i^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, — локальные регулярные параметризации гиперповерхностей M и N (здесь U_i — окрестности нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$, снабженные соответственно локальными координатами u и v , $\mathbf{r}_1(0) = a$, $\mathbf{r}_2(0) = b$).

Всюду ниже предполагается, что отмеченные точки a_0, b_0 образуют параллельную пару.

Аффинной (λ, μ) -эквилистантой E_λ ростков (M, a) и (N, b) назовем множество всех $q \in \mathbb{R}^n$, таких, что $q = \lambda a + \mu b$ для заданных $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu = 1$, и всех параллельных пар a, b (близких к a_0, b_0).

Расширенным пространством назовем пространство $\mathbb{R}_e^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с барицентрическими координатами (*аффинным временем*) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu = 1$, на первом сомножителе.

Обозначим через $pr: w = (\lambda, q) \mapsto q$ проекцию $\mathbb{R}_e^{n+1}$ на второй сомножитель.

Расширенным аффинным фронтом $W(M, N)$ набора (M, N) будем называть объединение всех аффинных эквидистант, каждая из которых вложена в свой слой расширенного пространства: $W(M, N) = \{(\lambda, E_\lambda)\} \subset \mathbb{R}_e^{n+1}$.

Бифуркационным множеством $\text{Bif}(M, N)$ семейства аффинных эквидистант (или семейства хорд) набора M, N назовем образ при проекции pr множества критических точек сужения $pr_r = pr|_{W(M, N)}$. Точка является *критической*, если росток pr_r в ней не является ростком регулярной проекции гладкого подмногообразия.

В общем случае $\text{Bif}(M, N)$ состоит из двух компонент: *каустики* Σ , которая является проекцией множества особых точек расширенного фронта $W(M, N)$, и *криминанты* Δ , которая является замыканием множества образов критических точек сужения проекции pr на регулярную часть расширенного фронта $W(M, N)$.

Каустика состоит из особых точек эквидистант E_λ , а криминанта является огибающей семейства регулярных частей эквидистант. С другой стороны, расширенный фронт заматывается поднятиями хорд в пространство $\mathbb{R}_e^{n+1}$, причем каждая из них имеет регулярную проекцию в конфигурационное пространство $\mathbb{R}^n$. Таким образом, бифуркационное множество $B(M, N)$ является также и огибающей семейства хорд (т. е. МЦС пары M, N).

Всякий росток семейства $F(x, w)$ функций от $x \in \mathbb{R}^k$ с параметрами $w = (t, q) \in \mathbb{R}_e^{n+1}$, где $t \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}^n$, задает следующий набор подмногообразий: *послойное критическое множество* $\mathcal{C}_F \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, состоящее из решений (x, w) так называемых *уравнений Лежандра* $F(x, w) = 0$, $\partial F / \partial x = 0$; *волновой фронт* (или *дискриминант*) $W(F) = \{(t, q) \mid \text{существует точка } x, \text{ такая, что } (x, w) \in \mathcal{C}_F\}$.

Пересечения волнового фронта с подпространствами $t = \text{const}$ называются *мгновенными* волновыми фронтами $W_t(F)$.

Бифуркационное множество $\text{Bif}(F)$ состоит из образов проекции $pr: (t, q) \mapsto q$ тех точек из $W(F)$, в которых росток ограничения проекции $pr|_{W(F)}$ не является ростком регулярной проекции гладкого подмногообразия. Проекции особых точек волнового фронта $W(F)$ образуют *каустику* $\Sigma(F)$, а критические значения проекции на множестве регулярных точек из $W(F)$ задают *оггибающую*, или *криминанту* $\Delta(F)$.

Два ростка семейств F_i , $i = 1, 2$, называются *контактно-расслоенно-эквивалентными* (для краткости *эквивалентными*), если существует ненулевая функция $\phi(x, t, q)$ и диффеоморфизм $\theta: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$\theta: (x, t, q) \mapsto (X(x, t, q), T(t, q), Q(q)),$$

такие, что $\phi F_1 = F_2 \circ \theta$.

Сумма семейства $F(x, t, q)$ с невырожденной квадратичной формой от дополнительных переменных $y_1, \dots, y_m$ называется *стабилизацией* семейства F . Два ростка семейств называются *стабильно эквивалентными*, если они эквивалентны стабилизациям одного и того же семейства, зависящего от меньшего числа переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Аффинным производящим семейством* $\mathcal{F}$ набора M, N называется семейство функций от переменных $(u, v, p) \in U_1 \times U_2 \times (\mathbb{R}^n)^\wedge \setminus \{0\}$ с параметрами $(\lambda, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$\mathcal{F}(u, v, p) = \lambda \langle \mathbf{r}_1(u) - q, p \rangle + \mu \langle \mathbf{r}_2(v) - q, p \rangle.$$

Здесь $\lambda, \mu = 1 - \lambda$ — барицентрические координаты на прямой $\mathbb{R}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — естественное спаривание векторов из $\mathbb{R}^n$ и ковекторов p из двойственного пространства $(\mathbb{R}^n)^\wedge$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Росток в точке $q_0 = \lambda_0 a_0 + \mu_0 b_0$ семейства аффинных эквидистант, порожденных парой ростков $(M, a_0), (N, b_0)$, совпадает с семейством мгновенных волновых фронтов, порожденных ростком семейства $\mathcal{F}$ в точке $x = 0, y = 0, p_0$, где ковектор p_0 аннулирует касательные пространства $T_{a_0} M$ и $T_{b_0} N$.*

Волновой фронт $W_{\mathcal{F}}$ совпадает с расширенным фронтом $W(M, N)$, а бифуркационная диаграмма $\text{Bif}(\mathcal{F})$ совпадает с МЦС пары M, N .

3. Трансверсальный случай. Подходящим выбором аффинных координат $q = (h, s_1, \dots, s_{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$ можно добиться, чтобы $a_0 = (1/2, 0, \dots, 0)$, $b_0 = (-1/2, 0, \dots, 0)$ и гиперплоскости, касательные к (M, a_0) и (N, b_0) , были параллельны координатной гиперплоскости $h = 0$.

Выберем локальные параметризации гиперповерхностей M и N в виде

$$\mathbf{r}_1(x) = (1/2 + f(x), x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \mathbf{r}_2(y) = (-1/2 + g(y), y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in V$ (U, V — окрестности начала координат в $\mathbb{R}^{n-1}$) и гладкие функции f, g имеют нулевую 1-струю в начале координат, $f \in \mathcal{M}_x^2$, $g \in \mathcal{M}_y^2$.

ЛЕММА. *Росток семейства $\mathcal{F}$ в точке $x = 0, y = 0, p_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\lambda = \lambda_0, q_0 = (h_0, 0, \dots, 0)$, $h_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0 - \mu_0)$ (которая соответствует точке q_0*

на хорде $l(a_0, b_0)$) стабильно эквивалентен росту в точке $z = 0$, $\lambda = \lambda_0$, $q = q_0$ следующего семейства G функций от $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ с параметрами λ , q :

$$G = -h + \lambda(\frac{1}{2} + f(s + \mu z)) + \mu(-\frac{1}{2} + g(s - \lambda z)).$$

СЛЕДСТВИЕ. Точка q_0 принадлежит $B(M, N)$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма $\mu_0 f_2(z) + \lambda_0 g_2(z)$ вырожденна. Здесь f_2 и g_2 — вторые дифференциалы функций f и g в нуле. Криминанта $\Delta(F)$ в трансверсальном случае пуста.

Зафиксируем области U , V и параметризацию $g(y)$, $y \in V$, подмногообразия N . Пусть во всякой точке второй дифференциал параметризации g невырожден.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \leq 5$. В пространстве гиперповерхностей, заданных функциями $f(x)$, $x \in U$, с невырожденным вторым дифференциалом во всех точках, имеется открытое всюду плотное подмножество, образованное такими функциями, что соответствующее семейство G в каждой точке стабильно эквивалентно версальной деформации роста функции, имеющего одну из простых особенностей A_k ($1 \leq k \leq n+1$), D_k ($4 \leq k \leq n+1$), E_6 при $k \leq n$.

Пусть a_0 является параболической точкой. Тогда b_0 принадлежит пересечению каустики с хордой $l(a_0, b_0)$.

Зафиксируем типичную функцию $g: V \rightarrow \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \leq 5$. В пространстве функций $f(x)$, $x \in U$, существует открытое всюду плотное подмножество, состоящее из функций, для которых соответствующее семейство F в каждой точке каустики, такой, что $\lambda \neq 0 \neq \mu$, стабильно эквивалентно версальной деформации одной из простых особенностей A_k ($1 \leq k \leq n+1$), D_k ($4 \leq k \leq n+1$), E_6 , а росток каустики в каждой точке, где $\lambda = 0$, является цилиндром с одномерной образующей, трансверсальной подмногообразию N , над каустикой одной из простых особенностей A_k , D_k , $k < n$.

4. Бикасательный случай. Мы рассматриваем в основном только случай $n = 3$, $\mathbb{R}^3 = \{q = (h, s_1, s_2)\}$. В больших размерностях соответствующие классы эквивалентности семейств имеют функциональные инварианты (см. [7]).

Не теряя общности, можно предположить, что $a_0 = (0, -1/2, 0)$, $b_0 = (0, 1/2, 0)$ и общая касательная плоскость к (M, a_0) и (N, b_0) , содержащая эти точки, задана уравнением $h = 0$. Поверхности M и N параметризуем локальными координатами x_1, x_2 и y_1, y_2 , определенными в окрестностях начала координат в $\mathbb{R}^2$: $M = \{(f(x_1, x_2), -\frac{1}{2} + x_1, x_2)\}$, $N = \{(g(y_1, y_2), \frac{1}{2} + y_1, y_2)\}$.

Замена переменных $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (z_1, z_2, w_1, w_2)$, где $z = x - y$, $w_1 = \lambda x_1 + \mu y_1 - \varepsilon - t$, $w_2 = \lambda x_2 + \mu y_2 - s_2$, $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, $\mu = \mu_0 - \varepsilon$, $t = s_1 - \frac{1}{2}(\mu_0 - \lambda_0)$, а также процедура стабилизации, аналогичная использованной в лемме из разд. 3, позволяют исключить переменные w и привести семейство F к виду

$$F = -h + \lambda f(t + \varepsilon + \mu z_1, s_2 + \mu z_2) + \mu g(t + \varepsilon - \lambda z_1, s_2 - \lambda z_2).$$

Таким образом, точки каустики на бикасательной хорде отвечают значениям λ_0, μ_0 , для которых квадратичная форма $\mu_0 f_2 + \lambda_0 g_2$ вырожденна, а криминанта Δ содержит хорду $z = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (поскольку на ней $\partial F / \partial \lambda$ и $\partial F / \partial z$ обращаются в нуль).

Начнем с плоского случая $n = 2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, $q = (h, s)$. Ростки (M, a_0) и (N, b_0) кривых, касающихся оси $h = 0$, определяют производящее семейство семейства хорд следующего вида:

$$F = -h + \lambda f(s + \varepsilon + \mu z) + \mu g(s + \varepsilon - \lambda z).$$

В случае общего положения бикасание наблюдается в изолированных парах точек, в которых вторые дифференциалы функций невырождены, $f(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ и $g(y) = b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$. Точка с координатами $h = 0$, $s = \frac{1}{2}(\mu_0 - \lambda_0)$ принадлежит каустике, если и только если $\mu_0a_2 + \lambda_0b_2 = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Для пары плоских кривых общего положения кривинанта Δ совпадает с набором бикасательных. На всякой бикасательной имеется не более одной точки каустики, росток которой является ростком гладкой кривой, имеющей второй порядок касания с кривинантой. Производящее семейство в этой точке эквивалентно особенностям типа C_3 :*

$$C_3: F(x, \varepsilon, q) = x^3 + x(\varepsilon + s) + h.$$

При описании типичных особенностей в пространстве при $n = 3$, $s = (s_1, s_2)$, $z = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ можно считать, что по крайней мере одна из квадратичных форм f_2 или g_2 невырождена. Пусть для определенности невырожденной является форма f_2 . Подходящим аффинным преобразованием ее можно привести к виду $f_2 = x_1^2 \pm x_2^2$; при этом другая форма запишется в виде $g_2 = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2$.

Распознавание классов особенностей относительно контактной расслоенной эквивалентности использует квадратичную форму Q_F центральной функции $F_0 = F|_{q=0}$ семейства и квадратичную форму Q_F^0 — сужение формы Q_F на подпространство $\varepsilon = 0$.

Условие $\lambda + \mu = 1$ приводит к значительному сокращению членов при вычислении определителей форм Q_F и Q_F^0 :

$$\det Q_F = \pm a\mu + (ac - b^2)\lambda, \quad \det Q_F^0 = \lambda^2b^2 - (\mu + \lambda a)(\pm\mu + \lambda c).$$

Таким образом, на всякой бикасательной хорде (параметризованной λ) в случае общего положения имеется единственная точка, в которой $\det Q_F = 0$, и не более двух точек, в которых $\det Q_F^0 = 0$.

Значение $\det Q_F^0$ в корнях уравнения $\det Q_F = 0$ равно $\mp(b^2 - ac)\lambda^2b^2a^{-2}$; поэтому обе формы вырождены, если $b = 0$ (главные оси форм f_2 и g_2 совпадают) или $b^2 - ac = 0$ (b_0 — параболическая точка на N).

ТЕОРЕМА 4. *Для фиксированной функции f общего положения в пространстве функций g на V имеется открытое всюду плотное подмножество, образованное такими функциями, что росток $\text{Bif}(F)$ во всякой точке на бикасательной хорде (при $\lambda \neq 0 \neq \mu$) диффеоморфен бифуркационной диаграмме одной из версальных деформаций простых особенностей B_k , C_k , $k = 2, 3, 4$, или F_4 проектирований полных пересечений на прямую [3].*

Доказательство состоит в непосредственной проверке версальности семейства F для типичного g . Классы B_3 , B_4 отвечают точкам, в которых $\text{rank}(Q_F^0) = 2$, $\text{rank}(Q_F) = 2$; классы C_3 , C_4 отвечают точкам, в которых $\text{rank}(Q_F^0) = 1$, $\text{rank}(Q_F) = 3$; наконец, класс F_4 отвечает точкам, где $\text{rank}(Q_F^0) = 1$, $\text{rank}(Q_F) = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. Библиотека математика, т. 1, Фазис, М., 1996. 2. Giblin P. J., Holtom P. A. In: Geometry and Topology of Caustics, Banach Center Publications, Vol. 50 (S. Janeczko and V. M. Zakalyukin, eds.), Warsaw, 1999, pp. 91–105. 3. Goryunov V. V. In: Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold, ed.), Adv. Soviet Math., Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1990, pp. 157–200. 4. Holtom P. Local central symmetry for Euclidean plane curves, Math. Sci. Dissertation, University of Liverpool, Sept. 1997. 5. Su Bu-chin, Affine differential geometry. Science Press, Beijing, Gordon and Breach, New-York, 1983. 6. Janeczko S. Geom. Dedicata, **60** (1996), 9–16. 7. Закалюкин В. М. Труды МИРАН, **209**, 133–142 (1995). 8. Giblin P. J., Zakalyukin V. M. Singularities of centre symmetry sets. Preprint. Dept. of Math. Univ. of Liverpool, 2001.

Университет Ливерпуля, Великобритания
email: pfgiblin@liverpool.uk

Поступило в редакцию
25 декабря 2001 г.

Московский государственный университет
email: vladimir@zakai.mcsme.ru

УДК 517.938

Хаусдорфова размерность множества типичных точек для гиббсовских мер*

© 2002. Б. М. ГУРЕВИЧ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Введем на множестве $X = V^{\mathbb{Z}^d} = \{x: \mathbb{Z}^d \rightarrow V\}$, где $d \geq 1$, $|V| < \infty$ ($|V|$ — мощность множества V), топологию прямого произведения, отвечающую дискретной топологии на V , и определим группу преобразований $\tau = \{\tau_s, s \in \mathbb{Z}^d\}$ пространства X равенством $(\tau_s x)(t) = x(s + t)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех вероятностных борелевских мер на X и $\mathcal{I}$ — совокупность τ -инвариантных мер из $\mathcal{P}$. На пространстве $\mathcal{C}(X)$ непрерывных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ определим функционал (давление)

$$f \mapsto P(f) := \sup_{\nu \in \mathcal{I}} [h(\nu) - \nu(f)], \quad (1)$$

где $h(\nu)$ — энтропия меры ν и $\nu(f) = \int f d\nu$. Мера $\mu \in \mathcal{I}$ называется *равновесной* относительно f (или *f -равновесной*), если $h(\mu) - \mu(f) = P(f)$ (подробности см. в [1, 2]). Множество f -равновесных мер обозначим через $\mathcal{E}(f)$. Назовем функцию $f \in \mathcal{C}(X)$ *регулярной*, если существует такая последовательность конечных множеств $F_n \subset \mathbb{Z}^d$, что $F_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n| \max_{x, y: x|_{F_n} = y|_{F_n}} |f(x) - f(y)| = 0. \quad (2)$$

Если f — регулярная функция, то все f -равновесные меры являются гиббсовскими мерами с одним и тем же потенциалом, имеющим конечную норму.

*Работа первого автора частично поддержана РФФИ, грант 02-01-00444.