Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, Хаусдорфова размерность множества типичных точек для гиббсовских мер, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 68–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:46:26

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. Библиотека математика, т. 1, Фазис, М., 1996. 2. Giblin P. J., Holtom P. A. In: Geometry and Topology of Caustics, Banach Center Publications, Vol. 50 (S. Janeczko and V. M. Zakalyukin, eds.), Warsaw, 1999, pp. 91–105. 3. Goryunov V. V. In: Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold, ed.), Adv. Soviet Math., Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1990, pp. 157–200. 4. Holtom P. Local central symmetry for Euclidean plane curves, Math. Sci. Dissertation, University of Liverpool, Sept. 1997. 5. Su Bu-chin, Affine differential geometry. Science Press, Beijing, Gordon and Breach, New-York, 1983. 6. Janeczko S. Geom. Dedicata, **60** (1996), 9–16. 7. Закалюкин В. М. Труды МИРАН, **209**, 133–142 (1995). 8. Giblin P. J., Zakalyukin V. M. Singularities of centre symmetry sets. Preprint. Dept. of Math. Univ. of Liverpool, 2001.

Университет Ливерпуля, Великобритания
email: pfgiblin@liverpool.uk

Поступило в редакцию
25 декабря 2001 г.

Московский государственный университет
email: vladimir@zakai.mcsme.ru

УДК 517.938

Хаусдорфова размерность множества типичных точек для гиббсовских мер*

© 2002. Б. М. ГУРЕВИЧ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

Введем на множестве $X = V^{\mathbb{Z}^d} = \{x: \mathbb{Z}^d \rightarrow V\}$, где $d \geq 1$, $|V| < \infty$ ($|V|$ — мощность множества V), топологию прямого произведения, отвечающую дискретной топологии на V , и определим группу преобразований $\tau = \{\tau_s, s \in \mathbb{Z}^d\}$ пространства X равенством $(\tau_s x)(t) = x(s + t)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех вероятностных борелевских мер на X и $\mathcal{I}$ — совокупность τ -инвариантных мер из $\mathcal{P}$. На пространстве $\mathcal{C}(X)$ непрерывных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ определим функционал (давление)

$$f \mapsto P(f) := \sup_{\nu \in \mathcal{I}} [h(\nu) - \nu(f)], \quad (1)$$

где $h(\nu)$ — энтропия меры ν и $\nu(f) = \int f d\nu$. Мера $\mu \in \mathcal{I}$ называется *равновесной* относительно f (или *f -равновесной*), если $h(\mu) - \mu(f) = P(f)$ (подробности см. в [1, 2]). Множество f -равновесных мер обозначим через $\mathcal{E}(f)$. Назовем функцию $f \in \mathcal{C}(X)$ *регулярной*, если существует такая последовательность конечных множеств $F_n \subset \mathbb{Z}^d$, что $F_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n| \max_{x, y: x|_{F_n} = y|_{F_n}} |f(x) - f(y)| = 0. \quad (2)$$

Если f — регулярная функция, то все f -равновесные меры являются гиббсовскими мерами с одним и тем же потенциалом, имеющим конечную норму.

*Работа первого автора частично поддержана РФФИ, грант 02-01-00444.

Рассмотрим последовательность кубов $T_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Положим $C_n(x) = \{y \in X : x|_{T_n} = y|_{T_n}\}$ и для $f \in \mathcal{C}(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ определим множество

$$X_{f,\alpha} = \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|T_n|} \sum_{t \in T_n} f(\tau_t x) = \alpha \right\}.$$

Назовем точку $x \in X$ *типичной* для меры $\mu \in \mathcal{J}$ (или μ -типичной), если $x \in X_{f,\mu(f)}$ при всех $f \in \mathcal{C}(X)$. Множество μ -типичных точек обозначим через $X(\mu)$. Согласно эргодической теореме Винера, $\mu(X_{f,\mu(f)}) = 1$, если μ — эргодическая (относительно τ) мера. Из сепарабельности пространства $\mathcal{C}(X)$ вытекает, что в этом случае также $\mu(X(\mu)) = 1$. Если же μ — неэргодическая мера, то $\mu(X(\mu)) = 0$.

Нас будет интересовать хаусдорфова размерность $\dim_\rho$ множеств $X_{f,\alpha}$ и $X(\mu)$ по отношению к метрикам ρ , которые определяются следующим образом. Пусть $\mathbf{a} = \{a_n\}$ — последовательность положительных функций $a_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(а) $a_n(x) = a_n(y)$, если $C_n(x) = C_n(y)$;

(б) $a_n(x) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом $x \in X$;

(с) существует такое $\gamma_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n|^{-1} \ln a_n(x) = \gamma_{\mathbf{a}}$ при всех $x \in \bigcup_{\mu \in \mathcal{J}} X(\mu)$

(условие (с), очевидно, выполняется, если последний предел равен $\gamma_{\mathbf{a}}$ при всех $x \in X$). Метрика ρ называется *согласованной* с последовательностью $\mathbf{a}$ (ср. [3, 4]), если $\text{diam}_\rho(C_n(x)) \leq a_n(x)$ при всех $n \geq 0$, $x \in X$ и найдется такое $b > 0$, что $\rho(x, y) \geq b a_n(x)$ при всех $x \in X$, $y \notin C_n(x)$ (это условие можно ослабить, предположив конечность индекса Морана, см. [3]). Топология, порожденная такой метрикой, совпадает с введенной выше топологией прямого произведения. Положим $\rho_{\mathbf{a}}(x, x) = 0$, $\rho_{\mathbf{a}}(x, y) = \max_{z \in X} a_1(z)$, если $C_1(x) \neq C_1(y)$, и $\rho_{\mathbf{a}}(x, y) = a_{k(x,y)}(x)$, где $k(x, y) = \max\{n : C_n(x) = C_n(y)\}$, в остальных случаях. Легко проверить, что $\rho_{\mathbf{a}}$ — метрика, согласованная с последовательностью $\mathbf{a}$ (см. [4]); при этом можно взять $b = 1$. Если $a_n(x) \equiv \theta^n$, где $\theta \in (0, 1)$, мы приходим к одной из «стандартных» метрик в пространстве X . Если $\lambda \in \mathcal{J}$ является τ -инвариантной гиббсовской мерой с потенциалом конечной нормы, то последовательность функций $a_n(x) := \lambda(C_n(x))$ обладает свойствами (а)–(с) (соответствующую метрику $\rho_{\mathbf{a}}$ иногда называют метрикой Биллингсли, ср. [6, 7]).

Множество метрик, согласованных с последовательностью $\mathbf{a}$, обозначим через $\mathcal{R}(\mathbf{a})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — регулярная функция, $\mu \in \mathcal{E}(f)$ и $\rho \in \mathcal{R}(\mathbf{a})$. Тогда $\dim_\rho(X(\mu)) = h(\mu)/\gamma_{\mathbf{a}}$.

При доказательстве этой теоремы мы пользуемся тем, что $X(\mu) \subset X_{f,\mu(f)}$, и оцениваем $\dim_\rho(X_{f,\mu(f)})$ и $\dim_\rho(X(\mu))$ сверху и снизу одной и той же константой $c = h(\mu)/\gamma_{\mathbf{a}}$, применяя в обоих случаях вариант теоремы 1.6 из [3], связывающей хаусдорфову размерность с локальной цилиндрической размерностью. Из двух упомянутых оценок более сложной является нижняя. Она основана на существовании такой меры $\nu \in \mathcal{P}$, что $\nu(X(\mu)) = 1$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(C_n(x))}{\ln a_n(x)} \geq c$. Если μ — эргодическая мера, ее можно взять в качестве ν ; в общем случае при построении меры ν (которая уже не будет τ -инвариантной) мы используем идею Каяра [5], получившего результат, аналогичный теореме 1, в одномерном случае. Вначале фиксируем последовательность эргодических мер μ_n , слабо сходящуюся

к μ и обладающую двумя дополнительными свойствами. Первое из них состоит в том, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\mu_n) = h(\mu)$. Второе касается характера зависимости друг от друга цилиндрических множеств, основания которых не пересекаются. Затем индуктивно строим достаточно редкую последовательность $\{T_{n_i}\}$ и определяем меру ν двумя условиями:

(i) если C — цилиндр с носителем $T_{n_i} \setminus T_{n_{i-1}}$ (где $T_{n_0} = \emptyset$), то $\nu(C) = \mu_{n_i}(C)$;

(ii) если C', C'' — цилиндры указанного вида, которым отвечают разные i , то они ν -независимы.

Нетрудно убедиться, что при $d = 1$ последовательность мер μ_n с требуемыми свойствами существует для любой меры $\mu \in \mathcal{J}$ (в качестве μ_n можно брать марковские меры растущего порядка). При $d > 1$ мы можем лишь гарантировать, что такая последовательность существует для любой гиббсовской меры.

В ряде случаев теорема 1 позволяет вычислить размерность множества $X_{f,\alpha}$. Рассмотрим более общую задачу. Пусть функции $f_i \in \mathcal{C}(X)$, $1 \leq i \leq m$, удовлетворяют условию (2) с одной и той же последовательностью $\{F_n\}$. Тогда для любого вектора $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$ функция $f_\beta := \sum_{i=1}^m \beta_i f_i$ удовлетворяет тому же условию.

Введем множество $E_{f_1, \dots, f_m} = \{(\mu(f_1), \dots, \mu(f_m)) \in \mathbb{R}^m : \mu \in \mathcal{E}(f_\beta), \beta \in \mathbb{R}^m\}$. Если $m = 1$ и $f_1 = f$, то, как нетрудно показать, $\text{Int}(E_f) = (\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, где $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] = \{\mu(f) : \mu \in \mathcal{J}\}$, причем концы этого отрезка допускают простые выражения в терминах давления:

$$\underline{\alpha} = - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} P(\beta f) / \beta, \quad \overline{\alpha} = - \lim_{\beta \rightarrow -\infty} P(\beta f) / \beta,$$

а также в терминах эргодических средних:

$$\underline{\alpha} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{x \in X} \frac{1}{|T_n|} \sum_{t \in T_n} f(\tau_t x), \quad \overline{\alpha} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in X} \frac{1}{|T_n|} \sum_{t \in T_n} f(\tau_t x).$$

Приведенное описание множества $E_{f_1, \dots, f_m}$ для случая $m = 1$ легко обобщить на случай $m > 1$.

Используя теорему 1, можно также доказать следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\mu \in \mathcal{E}(f_\beta)$ и $\mu(f_i) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq m$, то

$$\dim_\rho \left(\bigcap_{i=1}^m X_{f_i, \alpha_i} \right) = \frac{h(\mu)}{\gamma_a} = \frac{1}{\gamma_a} \left[\sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i + P(f_\beta) \right]$$

для любой метрики $\rho \in \mathcal{R}(\mathbf{a})$. Если α не лежит в замыкании множества $E_{f_1, \dots, f_m}$, то $\bigcap_{i=1}^m X_{f_i, \alpha_i} = \emptyset$.

Для $d = 1$ результаты, близкие к теореме 2, получены в [7–9] (при $m = 1$ и различных условиях на f) и в [10] (при $m \geq 1$). Для $d \geq 1$ теорема 2 доказана в [11] при дополнительном предположении, что μ — эргодическая мера (это условие выполнено при любом β , если $\beta \mapsto P(f_\beta)$ — гладкая функция).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ruelle D. Thermodynamic Formalism. Addison-Wesley, Reading, MA, 1978.
2. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Мир, М., 1992.
3. Темпельман А. А. Теор. вер. и прим., **44**, вып. 3, 589–616 (1999).
4. Гуревич Б. М., Темпельман А. А. УМН, **54**, вып. 2, 171–172 (1999).
5. Sajar H. Lect. Notes in Math., Vol. 892, Springer-Verlag,

Berlin, 1988. **6.** *Olivier E.* C. R. Acad. Sci. Paris, **326**, Série I, 1171–1174 (1999). **7.** *Olivier E.* C. R. Acad. Sci. Paris, **328**, Série I, 13–16 (1998). **8.** *Takens F., Verbitski E.* Comm. Math. Phys., **203**, No. 3, 593–612 (1999). **9.** *Takens F., Verbitski E.* On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. Preprint, 1999. **10.** *Fan Ai-Hua, Feng De-Jun*, J. Statist. Phys., **99**, No. 3/4, 813–856 (2000). **11.** *Tempelman A. A.* J. Dynam. Control Systems, **7**, No. 4, 535–551 (2001).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: gurevich@mech.math.msu.su
Departments of Mathematics and Statistics,
Penn State University, USA
e-mail: arkady@stat.psu.edu

Поступило в редакцию
7 августа 2001 г.

УДК 517.927+517.928

О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем*

© 2002. А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов

В заметке рассматривается спектральная задача

$$-i\varepsilon y'' = (x - \lambda)y, \quad (1)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где λ — спектральный параметр, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Эта задача является моделью для более сложной задачи Орра–Зоммерфельда с линейным профилем (течение Куэтта).

Заметим, что задача Орра–Зоммерфельда после элементарных преобразований приводится к виду

$$-i\varepsilon(z'' - \alpha^2 z) = (x - \lambda)z, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 z(t) \operatorname{sh} \alpha(1-t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 z(t) \operatorname{sh} \alpha(1+t) dt = 0. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon = 1/\alpha R$, R — число Рейнольдса, а α — волновое число. Важным является изучение поведения спектра задачи (3), (4) при $R \rightarrow \infty$ (см., например, [1] и [2]). Здесь мы проведем исследование поведения спектра при $\varepsilon \rightarrow 0$ только для модельной задачи (1), (2). Характер поведения спектра задачи (3), (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в главном сохраняется, хотя возникают новые интересные явления. Подробное изложение результатов по задаче Орра–Зоммерфельда будет проведено в нашей следующей работе.

В работе [3] было доказано, что собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ локализуются вдоль луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$ и двух отрезков $[1, -i/\sqrt{3}]$ и $[-1, -i/\sqrt{3}]$ (см. рис. 1). В [3] была найдена также асимптотика собственных значений в окрестности указанных отрезков. Цель этой заметки — вычислить асимптотику собственных значений задачи (1), (2) по малому параметру ε на луче

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №01-01-00691 и 00-15-96100.