Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов, О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 71–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 02:57:14

Berlin, 1988. **6.** *Olivier E.* C. R. Acad. Sci. Paris, **326**, Série I, 1171–1174 (1999). **7.** *Olivier E.* C. R. Acad. Sci. Paris, **328**, Série I, 13–16 (1998). **8.** *Takens F., Verbitski E.* Comm. Math. Phys., **203**, No. 3, 593–612 (1999). **9.** *Takens F., Verbitski E.* On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. Preprint, 1999. **10.** *Fan Ai-Hua, Feng De-Jun*, J. Statist. Phys., **99**, No. 3/4, 813–856 (2000). **11.** *Tempelman A. A.* J. Dynam. Control Systems, **7**, No. 4, 535–551 (2001).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: gurevich@mech.math.msu.su
Departments of Mathematics and Statistics,
Penn State University, USA
e-mail: arkady@stat.psu.edu

Поступило в редакцию
7 августа 2001 г.

УДК 517.927+517.928

О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем*

© 2002. А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов

В заметке рассматривается спектральная задача

$$-i\varepsilon y'' = (x - \lambda)y, \quad (1)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где λ — спектральный параметр, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Эта задача является моделью для более сложной задачи Орра–Зоммерфельда с линейным профилем (течение Куэтта).

Заметим, что задача Орра–Зоммерфельда после элементарных преобразований приводится к виду

$$-i\varepsilon(z'' - \alpha^2 z) = (x - \lambda)z, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 z(t) \operatorname{sh} \alpha(1-t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 z(t) \operatorname{sh} \alpha(1+t) dt = 0. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon = 1/\alpha R$, R — число Рейнольдса, а α — волновое число. Важным является изучение поведения спектра задачи (3), (4) при $R \rightarrow \infty$ (см., например, [1] и [2]). Здесь мы проведем исследование поведения спектра при $\varepsilon \rightarrow 0$ только для модельной задачи (1), (2). Характер поведения спектра задачи (3), (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в главном сохраняется, хотя возникают новые интересные явления. Подробное изложение результатов по задаче Орра–Зоммерфельда будет проведено в нашей следующей работе.

В работе [3] было доказано, что собственные значения задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ локализуются вдоль луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$ и двух отрезков $[1, -i/\sqrt{3}]$ и $[-1, -i/\sqrt{3}]$ (см. рис. 1). В [3] была найдена также асимптотика собственных значений в окрестности указанных отрезков. Цель этой заметки — вычислить асимптотику собственных значений задачи (1), (2) по малому параметру ε на луче

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №01-01-00691 и 00-15-96100.

$[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$, уточнить полученную в [3] асимптотику на отрезках $[\pm 1, -i/\sqrt{3}]$ и оценить количество собственных значений в круге малого радиуса с центром в точке-узле $-i/\sqrt{3}$. Где возможно, мы указываем лишь основные идеи доказательства.

Рис. 1

Замена $\xi = (-i\varepsilon)^{-1/3}(x - \lambda)$ приводит задачу (1), (2) к граничной задаче для уравнения Эйри

$$\begin{aligned} z''(\xi) &= \xi z(\xi), \\ z(\xi_1) &= z(\xi_2) = 0, \end{aligned}$$

где $\xi_1 = (-i\varepsilon)^{-1/3}(-1 - \lambda)$, $\xi_2 = (-i\varepsilon)^{-1/3}(1 - \lambda)$.

Известно [4], что уравнение Эйри обладает решением $v(\xi)$, имеющим в секторе $|\arg \xi| \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$ — произвольное фиксированное число) асимптотику

$$v(\xi) = \frac{e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\xi^{1/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|^{3/2}}\right) \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где выбираются главные (положительные) ветви корней при $\xi > 0$. Это решение часто называют функцией Эйри–Фока. Нам потребуется найти более широкую область, в которой асимптотика (5) сохраняется.

ЛЕММА 1. Для функции Эйри–Фока $v(\xi)$ асимптотика (5) сохраняется в области $\Omega = \{\xi : |\xi| > 1, |\arg \xi| \leq \pi - \frac{3}{4}|\xi|^{-3/2} \ln |\xi|\}$. При этом остаточный член мажорируется величиной $C|\xi|^{-3/2}$ равномерно по $\xi \in \Omega$.

Доказательство базируется на представлении

$$v(\xi) = e^{-\pi i/3} v(e^{2\pi i/3} \xi) + e^{\pi i/3} v(e^{-2\pi i/3} \xi).$$

Теперь легко понять, что в пересечении области Ω со вторым квадрантом комплексной плоскости доминирует первое слагаемое, а второе оценивается через модуль первого, умноженного на $C|\xi|^{-3/2}$. Кроме того, первое слагаемое в этой области имеет асимптотику (5). В нижней полуплоскости асимптотика сохраняется в силу принципа симметрии. $\square$

Рассмотрим область D_ε (см. рис. 2), ограниченную слева и справа прямыми $\operatorname{Re} \lambda = \pm 1$, а сверху — прямыми, проходящими через точки ± 1 и точку $d_\varepsilon = -i(1/\sqrt{3} + (\sigma/3)\varepsilon^{1/2}|\ln \varepsilon|)$. Здесь $\sigma > 1$ — некоторое фиксированное число. Положим

$$f(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{-\pi i/4 \sqrt{x-\lambda}} dx = \frac{2}{3} e^{-\pi i/4} [(1-\lambda)^{3/2} - (-1-\lambda)^{3/2}], \quad (6)$$

где ветвь квадратного корня выбирается такой, что $f(-i/\sqrt{3}) > 0$. Положим

$$\Lambda_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \alpha\}.$$

Рис. 2

ЛЕММА 2. Функция $f(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $f(\lambda)$ голоморфна в нижней полуплоскости и вещественна при $\lambda = -i\mu$, $\mu > 0$;
- 2) значения $f(\lambda)$ и $-if'(\lambda)$ лежат в секторе $\Lambda_{\pi/6}$, а $f''(\lambda)$ — в открытой левой полуплоскости при всех $\lambda \in D_\varepsilon$;
- 3) $f(\lambda)$ монотонно возрастает при $\lambda \rightarrow -i\infty$ по отрицательной мнимой оси в области D_ε ;
- 4) $f(\lambda) = 2\sqrt{i\lambda} + O(|\lambda|^{-3/2})$, $f'(\lambda) = i/\sqrt{i\lambda} + O(|\lambda|^{-3/2})$ при $\lambda \in D_\varepsilon$, $\lambda \rightarrow \infty$;
- 5) $f(d_\varepsilon) \leq \operatorname{Re} f(\lambda)$ при $\lambda \in D_\varepsilon$;
- 6) $|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \geq c|\lambda_1 - \lambda_2|/\sqrt{|\lambda_1| + |\lambda_2|}$ при $\lambda_1, \lambda_2 \in D_\varepsilon$, где постоянная c не зависит от λ_1, λ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этих свойств получается непосредственно из равенства (6). $\square$

Из леммы 2 следует, что найдется натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, такое, что уравнение

$$f(\lambda) = \pi k \varepsilon^{1/2}$$

имеет в области D_ε в точности одно чисто мнимое решение $-i\rho_k$ при всех целых $k \geq k_0$. Очевидно, что

$$id_\varepsilon < \rho_{k_0} < \rho_{k_0+1} < \dots$$

ТЕОРЕМА 1. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ все собственные значения задачи (1), (2), лежащие в области D_ε , являются простыми и образуют монотонную последовательность чисел на отрицательной мнимой оси. При этом на интервале $(d_\varepsilon, -i(\rho_{k_0} + \frac{1}{3}\varepsilon|\ln \varepsilon|\rho_{k_0}^{-1}))$ может находиться не более двух собственных значений, а все остальные лежат в $\frac{1}{3}\varepsilon|\ln \varepsilon|\rho_k^{-1}$ -окрестности чисел $-i\rho_k$, где $k \geq k_0 + 1$. То есть собственные значения λ_k задачи (1), (2) в области D_ε имеют вид

$$\lambda_k = -i\left(\rho_k + \frac{\theta_k}{3}\varepsilon|\ln \varepsilon|\rho_k^{-1}\right), \quad -1 \leq \theta_k \leq 1, \quad k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство нулю характеристического определителя задачи (1), (2) принимает вид (см. [3])

$$v(\xi_1)v(e^{-2\pi i/3}\xi_2) - v(e^{-2\pi i/3}\xi_1)v(\xi_2) = 0, \quad (7)$$

причем переменные ξ_j , $e^{-2\pi i/3}\xi_j$, $j = 1, 2$, остаются в области Ω , указанной в лемме 1, если $\lambda \in D_\varepsilon$. Воспользовавшись асимптотикой из леммы 1, после несложных преобразований придем к уравнению

$$e^{2i\varepsilon^{-1/2}f(\lambda)} - 1 = |\lambda|^{-3/2}O(\varepsilon^{1/2}),$$

которое в области D_ε эквивалентно уравнению

$$f(\lambda) = \pi k \varepsilon^{1/2} + |\lambda|^{-3/2}O(\varepsilon^{1/2}), \quad k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$$

Далее используется теорема Руше. □

ТЕОРЕМА 2. Собственные значения задачи (1), (2) симметричны относительно мнимой оси и в окрестности отрезка $[-1, -i/\sqrt{3}]$ имеют асимптотику

$$\lambda_k = (e^{-\pi i/6}t_k - 1)(1 + O(e^{-\varepsilon^{-1/2}\varphi(t_k)})), \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \frac{4}{3}\operatorname{Re}(2e^{\pi i/6} - t)^{3/2},$$

где t_k — нули функции Эйри-Фока $v(-\varepsilon^{-1/3}t) = 0$, когда $t \in [0, 2/\sqrt{3} - (\sigma/3)\varepsilon^{1/2}|\ln \varepsilon|]$. При этом

$$\varepsilon^{-1/3}t_k = \left(\frac{3\pi}{2}\left(k - \frac{1}{4}\right)\right)^{2/3} + O\left(\frac{1}{k^{4/3}}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства остается такой же, как в [3]. Второе слагаемое в левой части уравнения (7) экспоненциально убывает при $\lambda \in [-1, -i/\sqrt{3}]$ (за исключением малой окрестности узловой точки $-i/\sqrt{3}$), а функция $v(e^{-2\pi i/3}\xi_2)$ экспоненциально растет. Поэтому нули уравнения (7), согласно теореме Руше, оказываются экспоненциально близкими к корням уравнения $v(\xi_1) = 0$, которое можно переписать в виде $v(-\varepsilon^{-1/3}t) = 0$. Расчет значений t , при которых теорему Руше можно применять, проводится с помощью леммы 1. □

ЗАМЕЧАНИЕ. В [3] вместо условия $t_k \in [0, 2/\sqrt{3} - (\sigma/3)\varepsilon^{1/2}|\ln \varepsilon|]$ ошибочно фигурирует условие $t_k \in [0, 2/\sqrt{3} - \sigma\varepsilon^{1/2}]$. Кроме того, здесь мы уточняем, что нумерация нулей в (9) начинается при $k = 1$, а не при некотором $k = k_0$.

ТЕОРЕМА 3. Количество собственных значений задачи (1), (2) в круге малого радиуса δ с центром в точке-узле $-i/\sqrt{3}$ равно (при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$n_\delta(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \left(f \left(-\frac{i}{\sqrt{3}} - i\delta \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \delta \right)^{3/2} \right) \varepsilon^{-1/2} + O(1).$$

В круге уменьшающегося радиуса $\frac{\sigma}{3} \varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|$ при фиксированном $\sigma > 1$ число собственных значений равно

$$N_{\frac{\sigma}{3} \varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|}(\varepsilon) = \frac{2^{1/2} 3^{-1/4} \sigma}{\pi} |\ln \varepsilon| + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Предельное множество концентрации собственных значений

$$T = \left[-1, -\frac{i}{\sqrt{3}} \right) \cup \left[1, -\frac{i}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}, -i\infty \right)$$

названо в [3] «спектральным галстуком». Выше мы получили формулы локализации собственных значений рассматриваемой задачи на предельном множестве T вне малой окрестности узловой точки $-i/\sqrt{3}$. Важно иметь эти формулы в терминах функций распределения на множестве $T \setminus \{-i/\sqrt{3}\}$. Функцию $N(\lambda, \varepsilon)$, определенную при $\lambda \in T \setminus \{-i/\sqrt{3}\}$, назовем функцией распределения собственных значений задачи (1), (2), если для всех λ_1, λ_2 , принадлежащих любой связанной компоненте этого множества, число собственных значений на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2]$ (или в малом прямоугольнике, стороны которого проходят через λ_1 и λ_2) равно $|N(\lambda_2, \varepsilon) - N(\lambda_1, \varepsilon)|$. В такой формулировке функция $N(\lambda, \varepsilon)$ определяется с точностью до постоянной и знака.

ТЕОРЕМА 4. Функция распределения собственных значений задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ на сегментах $[\pm 1, -i/\sqrt{3})$ имеет вид

$$N(\lambda, \varepsilon) = \pm \frac{1}{\pi \varepsilon^{1/2}} \int_{\lambda}^{\pm 1} e^{-\pi i/4 \sqrt{x - \lambda}} dx + O(1),$$

а на луче $(-i/\sqrt{3}, -i\infty)$ — вид

$$N(\lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\pi \varepsilon^{1/2}} \int_{-1}^1 e^{-\pi i/4 \sqrt{x - \lambda}} dx + O(1).$$

Здесь остаточный член $O(1)$ зависит от λ и ε , но найдется число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $|O(1)| \leq 2$ равномерно по $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda \in T \setminus U(\varepsilon)$, где $U(\varepsilon)$ — окрестность точки $-i/\sqrt{3}$ радиуса $\frac{\sigma}{3} \varepsilon |\ln \varepsilon|$, а $\sigma > 1$ — произвольное фиксированное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morawetz C. S. J. Rat. Mech. Anal., **1**, 579–603 (1952). 2. Drazin R. G., Reid W. H. Hydrodynamic Stability. Cambridge, 1981. 3. Шкаликов А. А. Матем. заметки, **62**, № 6, 950–953 (1997). 4. Olver F. W. Asymptotic and special functions. Academic Press, New York, 1974.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

e-mail: sasha_d@auriga.ru

e-mail: shkal@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
29 октября 2001 г.