Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Константинов, О существенном спектре одного класса матричных дифференциальных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 76–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:40:44

УДК 517.9

О существенном спектре одного класса матричных дифференциальных операторов

© 2002. А. Ю. Константинов

Задача о существенном спектре матричных дифференциальных операторов смешанного порядка изучалась многими авторами. Наиболее общие результаты для эллиптических по Дуглису–Ниренбергу систем были получены в [1]. В [2, 3] (см. также [4]) была предложена абстрактная схема для исследования существенного спектра блочных операторных матриц. Отметим также статьи [5–7], где эта схема применялась к матричным дифференциальным операторам. В частности, в [5, 8] был вычислен существенный спектр матричного дифференциального оператора смешанного порядка, связанного с моделью линейных колебаний идеально проводящей невязкой плазмы во внешнем прямом магнитном поле (см. [9]). В настоящей работе мы развиваем результаты работ [5, 8] и исследуем класс неэллиптических дифференциальных операторов вида

$$L = \begin{pmatrix} -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_1 + b_{11} & -\rho^{-1}\partial_1\rho a\partial_2 + b_{12} & -\rho^{-1}i\partial_1\rho c_1 \\ -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_1 + b_{21} & -\rho^{-1}\partial_2\rho a\partial_2 + b_{22} & -\rho^{-1}i\partial_2\rho c_1 \\ -ic_2\partial_1 & -ic_2\partial_2 & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$D(L) = \{f = (f_1, f_2, f_3) \in (W_2^1(\Omega))^3 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0\}$, в пространстве $\mathcal{H} = (L_2(\Omega, \rho))^3$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей класса C^2 (условия гладкости на границу могут быть ослаблены (см. [5])), $L_2(\Omega, \rho)$ — пространство квадратично суммируемых функций на области Ω с весом ρ , в $\mathcal{H}$ вводится метрика ортогональной суммы гильбертовых пространств, $\partial_1 = \partial/\partial x_1$, $\partial_2 = \partial/\partial x_2$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Предполагается, что функции a , c_1 , c_2 , ρ удовлетворяют условию Липшица на $\overline{\Omega}$, $b_{ij}, d \in C(\overline{\Omega})$. Более того, a и ρ положительны на $\overline{\Omega}$ (b_{ij} , c_1 , c_2 , d — комплекснозначные функции на $\overline{\Omega}$).

Оператор L удобно записать в виде блочной операторной матрицы (ниже $B := (b_{ij})_{i,j=1}^2$ — матричный потенциал):

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho^{-1}\nabla\rho a \operatorname{div} + B & -i\rho^{-1}\nabla\rho c_1 \\ -ic_2 \operatorname{div} & d \end{pmatrix} \quad (2)$$

в ортогональной сумме $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = (L_2(\Omega, \rho))^2 \oplus L_2(\Omega, \rho)$.

Напомним, что замкнутый оператор S называется фредгольмовым, если его ядро $\operatorname{Ker}(S)$ конечномерно и образ $\operatorname{Ran}(S)$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности. Существенный спектр $\sigma_{\operatorname{ess}}(S)$ замкнутого оператора S определяется как множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $S - \lambda$ не фредгольмов.

Остановимся сначала на анализе оператора $L_{11} = A + B$, где $A = -\rho^{-1}\nabla\rho a \operatorname{div}$, $D(A) = D(L_{11}) = \{f = (f_1, f_2) \in (W_2^1(\Omega))^2 \mid \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \in W_2^1(\Omega), \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2|_{\partial\Omega} = 0\}$. Оператор A неотрицателен в пространстве $\mathcal{H}_1$, более того, он существенно самосопряжен [5] и его замыкание может быть представлено в виде произведения $\overline{A} = T T^*$, где $T = -\rho^{-1}\nabla a^{1/2}$ (T рассматривается как оператор из

$L_2(\Omega, \rho^{-1})$ в $\mathcal{H}_1$ на области $D(T) = W_2^1(\Omega)$). При этом сопряженный оператор T^* действует из $\mathcal{H}_1$ в $L_2(\Omega, \rho^{-1})$ на соответствующей области определения. Так как сужения операторов TT^* и T^*T на ортогональные дополнения к их ядрам унитарно эквивалентны (см., например, [10]), то отсюда легко вытекает, что спектр оператора $\bar{A}$ состоит из нуля (собственное значение бесконечной кратности) и последовательности положительных собственных значений конечной кратности, стремящейся к ∞ (в простейшей ситуации, при $\rho = a = 1$, T^*T — просто лапласиан с граничными условиями Неймана). В частности, $\sigma_{\text{ess}}(\bar{A}) = \{0\}$.

Применяя классическую теорему Вейля (см. [11]) о сохранении существенного спектра при относительно компактных возмущениях, можно показать (см. [5]), что

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{A} + B) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}). \quad (3)$$

Здесь $\hat{B}$ — ограниченный оператор в $\mathcal{H} = \text{Ker}(\bar{A})$, задаваемый соотношением $\hat{B}f = PBf$, где P — ортопроектор в $\mathcal{H}_1$ на подпространство $\mathcal{H}$. Аналогично, для фиксированного $x \in \bar{\Omega}$ введем оператор $\hat{B}(x)f = PB(x)f$, $f \in \mathcal{H}$. Нам понадобится также симметризованная матрица $B_s(x) := (\hat{b}_{ij}(x))_{i,j=1}^2$, $\hat{b}_{ij}(x) = (b_{ij}(x) + b_{ji}(x))/2$. Ниже $f(\bar{\Omega}) = \{f(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}$, а $[\lambda, \mu]$ — отрезок, соединяющий точки $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что коэффициенты оператора L_{11} удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда*

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{11}) = \bigcup_{x \in \bar{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}(x)) = \bigcup_{x \in \bar{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}_s(x)).$$

Если дополнительно предположить, что симметризованная матрица $B_s(x)$ вещественна для всех $x \in \Omega$, то

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{11}) = [m, M].$$

Здесь m, M — соответственно нижняя и верхняя грани оператора умножения на матричнозначную функцию B_s в $\mathcal{H}_1$. Если же B_s диагональна, то

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{11}) = \bigcup_{x \in \bar{\Omega}} [b_{11}(x), b_{22}(x)]. \quad (4)$$

Отметим, что если $B := (b_{ij})_{i,j=1}^2 = bI$, где I — единичная матрица в $\mathbb{C}^2$, результат теоремы 1 легко вытекает из (3) и компактности коммутатора $[P, \varphi]$, где φ — оператор умножения на функцию $\varphi \in C(\bar{\Omega})$. В этом случае (см. [5]) $\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{11}) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}) = b(\bar{\Omega})$.

Для матрицы B общего вида задача вычисления существенного спектра оператора $\hat{B}$ значительно сложнее. Поясним результат в случае постоянных B и ρ . Более того, дополнительно предположим, что матрица B диагональна, а Ω — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что уравнение $\hat{B}f = \lambda f$ эквивалентно соотношению

$$(B - \lambda)f = \nabla g, \quad f \in \mathcal{H}, \quad (5)$$

где $g \in W_2^1(\Omega)$. Последнее вытекает из того, что ортогональное дополнение к $\mathcal{H}$ состоит из потенциальных полей (см., например, [12]), т. е. $\mathcal{H}^\perp = \{\nabla g \mid g \in$

$W_2^1(\Omega)\}$. Отсюда (по крайней мере для гладких g) следует, что g — решение краевой задачи

$$(b_{22} - \lambda)\partial_{11}^2 g + (b_{11} - \lambda)\partial_{22}^2 g = 0, \quad \nu_1 \partial_1 g + \frac{b_{11} - \lambda}{b_{22} - \lambda} \nu_2 \partial_2 g|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Наоборот, при $\lambda \notin \{b_{11}, b_{22}\}$ всякое (отличное от постоянной) решение задачи (6) восстанавливает по (5) собственную функцию оператора $\hat{B}$. Явно решая (6), нетрудно показать, что оператор $\hat{B}$ имеет полную систему ортонормированных собственных векторов и его собственные числа всюду плотны в отрезке $[b_{11}, b_{22}]$, что и доказывает (4) в рассмотренной здесь модельной ситуации.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции a, c_1, c_2, ρ удовлетворяют условию Липшица на $\overline{\Omega}$, a и ρ положительны на $\overline{\Omega}$, $b_{ij}, d \in C(\overline{\Omega})$. Тогда оператор L допускает замыкание и

$$\sigma_{\text{ess}}(\overline{L}) = \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} \sigma_{\text{ess}}(\hat{B}(x)) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)(\overline{\Omega}).$$

Отметим, что в случае скалярной матрицы $B = bI$ результаты теорем 1, 2 установлены в [5]. В [13] был рассмотрен случай диагональной матрицы B .

Поясним схему доказательства теоремы 2. Оно использует теорему 1 и абстрактный подход к изучению существенного спектра операторных матриц, основанный на факторизации операторной матрицы $L - \mu$ в смысле Фробениуса–Шура (см. [2–5]). При этом важную роль играет компактность операторов

$$\overline{L}_{21}(\overline{L}_{11} - \mu)^{-1}, \quad L_{12}^*(\overline{L}_{11} - \mu)^{-1},$$

где μ — произвольная точка из резольвентного множества оператора $\overline{L}_{11}$. Теперь несложно показать, что

$$\sigma_{\text{ess}}(\overline{L}) = \sigma_{\text{ess}}(\overline{L}_{11}) \cup \sigma_{\text{ess}}(\overline{L_{22} - L_{21}(\overline{L}_{11} - \mu)^{-1}L_{12}}) = \sigma_{\text{ess}}(\overline{L}_{11}) \cup \left(d - \frac{c_1 c_2}{a}\right)(\overline{\Omega}).$$

В заключение отметим, что развиваемая в данной работе техника работает и в более общих ситуациях. В частности, теорема 2 сохраняется и для многомерного варианта оператора вида (2), действующего в $(L_2(\Omega, \rho))^n \oplus L_2(\Omega, \rho)$. Здесь Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей в $\mathbb{R}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grubb G., Geymonat G. Math. Ann., **227**, 247–276 (1977).
2. Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A. Math. Nachr., **167**, 5–20 (1994).
3. Шкаликов А. А. Матем. заметки, **58**, 945–949 (1995).
4. Konstantinov A. Yu. Укр. матем. ж., **50**, 1064–1072 (1998).
5. Langer H., Möller M. Math. Nachr., **178**, 233–248 (1996).
6. Hardt V., Mennicken R., Naboko S. Math. Nachr., **205**, 19–68 (1999).
7. Константинов А. Ю. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 3, 77–80 (1997).
8. Raikov G. D. Asymptotic Analysis, **3**, 1–35 (1990).
9. Lifschitz A. E. Magnetohydrodynamics and spectral theory. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
10. Deift P. A. Duke Math. J., **45**, 267–310 (1978).
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М. (1972).
12. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Наука, М., 1989.
13. Гриньук Ю. Н., Константинов А. Ю. Доповіді НАН України, №7, 13–17 (2002).