Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, А. А. Тарасенко, Безусловные базисы пространств де Бранжа из значений воспроизводящих ядер, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 71–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa21>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:07:59

Безусловные базисы пространств де Бранжа из значений воспроизводящих ядер*

© 2006. Г. М. ГУБРЕЕВ, А. А. ТАРАСЕНКО

В заметке метод интегральных оценок норм резольвент [1] распространяется на класс модельных операторов в пространствах целых функций де Бранжа [2]. Результаты формулируются в виде теорем о полноте и базисности семейств функций, построенных по воспроизводящему ядру пространства.

1. Базисы из воспроизводящих ядер. Каждая целая функция E , удовлетворяющая условию $|E(\bar{z})| < |E(z)|$, $\text{Im } z > 0$, порождает пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, состоящее из целых функций f , таких, что

1) $f(z)/E(z)$, $f^*(z)/E(z)$ суть функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в области $\text{Im } z > 0$;

2) функции $|f(x)/E(x)|^2$ суммируемы на $\mathbb{R}$.

Здесь $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, а средний тип $h(F)$ аналитической в области $\text{Im } z > 0$ функции F вычисляется по формуле

$$h(F) := \limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |F(iy)|.$$

Пространство $\mathcal{H}(E)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}(E)} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} |E(x)|^{-2} dx, \quad f, g \in \mathcal{H}(E).$$

Представив E в виде $E(z) = a(z) - ib(z)$, где $a = a^*$, $b = b^*$, положим

$$k(z, \lambda) = (b(z) \overline{a(\lambda)} - a(z) \overline{b(\lambda)}) / \pi(\lambda - \bar{z}).$$

Тогда $k(z, \lambda)$ является воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{H}(E)$ [2], т. е.

$$\langle f(z), k(z, \lambda) \rangle = f(\lambda), \quad f \in \mathcal{H}(E), \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим задачу о безусловной базисности в пространстве $\mathcal{H}(E)$ семейств функций

$$\{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}, \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке фонда CRDF, грант UM-1-2567-OD-03.

где $k(z, \lambda)$ — воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}(E)$, а Λ — комплексная последовательность с единственной предельной точкой ∞ . Можно доказать, что если система (1) образует безусловный базис в $\mathcal{H}(E)$, то Λ совпадает с множеством (простых) корней целой функции S , которая удовлетворяет условиям

(а) $S(z)/E(z)$, $S^*(z)/E(z)$ — функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в области $\text{Im } z > 0$;

$$(b) \int_{\mathbb{R}} |S(x)/E(x)|^2 (1+x^2)^{-1} dx < \infty.$$

Такие функции S называются *сопутствующими пространству $\mathcal{H}(E)$* [2]. В дальнейшем предполагается, что семейство (1) порождается некоторой сопутствующей функцией S с простыми корнями, т. е. $\Lambda = \{\lambda_n : S(\lambda_n) = 0\}$. Биортгональная к семейству (1) система состоит из функций

$$s_k(z) := (S'(\lambda_k))^{-1} S(z)/(z - \lambda_k), \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad (2)$$

которые в случае, если $0 \notin \Lambda$, являются собственными векторами ограниченного в $\mathcal{H}(E)$ оператора

$$(A_S f)(z) := (f(z)S(0) - S(z)f(0))/zS(0), \quad f \in \mathcal{H}(E). \quad (3)$$

Отметим, что мнимая часть $\frac{1}{2i}(A_S - A_S^*)$ этого оператора не более чем двумерна. Операторы (3) являются модельными в том смысле, что при определенных условиях недиссипативный оператор с дискретным спектром и двумерной мнимой частью унитарно эквивалентен оператору вида A_S в некотором пространстве $\mathcal{H}(E)$, причем S сопутствует $\mathcal{H}(E)$.

Предположим, что $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$ и потому $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, где $\Lambda_{\pm}$ — часть последовательности Λ , лежащая в верхней (нижней) полуплоскости. Из условия (а) следует, что сходятся произведения Бляшке B^+ , B^- с корнями из последовательностей Λ_+ , $\bar{\Lambda}_- := \{\bar{\lambda}_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$ соответственно. Положим также $B_k^{\pm} = B^{\pm}/b_k$, где $b_k(z)$ — элементарный множитель Бляшке, отвечающий точке $\lambda_k \in \Lambda_{\pm}$. Решение задачи о безусловных базисах из значений воспроизводящих ядер основано на следующих леммах.

ЛЕММА 1. *Если семейство (1) полно и равномерно минимально [3] в $\mathcal{H}(E)$, то существует такая константа $M > 0$, что имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} 1 - |E^*(\lambda_k)/E(\lambda_k)| &\leq M|B_k^+(\lambda_k)|, & \lambda_k \in \Lambda_+, \\ 1 - |E^*(\mu_k)/E(\mu_k)| &\leq M|B_k^-(\mu_k)|, & \mu_k \in \bar{\Lambda}_-. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если последовательность Λ такова, что*

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda_+} (1 - |E^*(\lambda_k)/E(\lambda_k)|) > 0, \quad \inf_{\lambda_k \in \bar{\Lambda}_-} (1 - |E^*(\bar{\lambda}_k)/E(\bar{\lambda}_k)|) > 0, \quad (4)$$

то в случае полноты и равномерной минимальности системы (1) последовательности Λ_+ и $\bar{\Lambda}_-$ удовлетворяют условию Карлесона:

$$\inf_{\lambda_k \in \Lambda_+} |B_k^+(\lambda_k)| > 0, \quad \inf_{\mu_k \in \bar{\Lambda}_-} |B_k^-(\mu_k)| > 0. \quad (5)$$

Заметим, что всегда справедливо равенство $E^*(z)/E(z) = e^{i\alpha z} \mathcal{B}(z)$, где $\alpha \geq 0$, а $\mathcal{B}$ — некоторое произведение Бляшке. Поэтому условие (4) накладывает ограничение на поведение последовательности Λ вблизи $\mathbb{R}$.

ЛЕММА 2. Пусть S сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$. Если семейство $\{k(z, \lambda_n) : S(\lambda_n) = 0\}$ полно в $\mathcal{H}(E)$, то

$$h(S/E) = h(S^*/E) = 0.$$

Нормируем S , E так, чтобы $S(0) = E(0)$. Тогда функция $u(z) := (S(z) - E(z))/z$ принадлежит $\mathcal{H}(E)$.

ЛЕММА 3. Пусть S сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$. Если семейство $\{k(z, \lambda_n) : S(\lambda_n) = 0\}$ образует безусловный базис в $\mathcal{H}(E)$ и выполняются условия (4), то для резольвенты оператора A_S справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}} |\langle (I - xA_S)^{-1}u, f \rangle|^2 dx \leq M \|f\|_{\mathcal{H}(E)}^2, \quad f \in \mathcal{H}(E). \quad (6)$$

Дополним эту лемму утверждением о том, что если для оператора A_S вида (3) имеет место оценка (6), то последовательность $\Lambda = \{\lambda_n : S(\lambda_n) = 0\}$ удовлетворяет условиям (4).

ЛЕММА 4. Интегральная оценка (6) имеет место тогда и только тогда, когда вес $W(x) := |S(x)/E(x)|^2$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию

$$\sup_{\Delta} \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} W(x) dx \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} W^{-1}(x) dx \right\} < \infty, \quad (A_2)$$

где Δ — произвольный интервал вещественной оси, а $|\Delta|$ — его длина.

ЛЕММА 5. Если вес $W(x) := |S(x)/E(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) , то система $\{s_k(z)\}$ вида (2) образует безусловный базис замыкания своей линейной оболочки в пространстве $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда последовательности Λ_+ , $\bar{\Lambda}_-$ удовлетворяют условию (5).

Из сформулированных лемм выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$, $\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ и $k(z, \lambda)$ — воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}(E)$. Семейство $\{k(z, \lambda_n) : \lambda_n \in \Lambda\}$ образует безусловный базис в $\mathcal{H}(E)$ и при этом справедливы неравенства (4) тогда и только тогда, когда Λ совпадает с множеством простых корней сопутствующей функции S , для которой выполняются следующие требования:

- 1) $h(S/E) = h(S^*/E) = 0$;
- 2) вес $|S(x)/E(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$;
- 3) Λ_+ и $\bar{\Lambda}_-$ удовлетворяют условиям (5).

Если выполняются лишь требования 1)–2), то семейство $\{k(z, \lambda_n) : S(\lambda_n) = 0\}$ полно в пространстве $\mathcal{H}(E)$.

Если E — целая функция экспоненциального типа и вес $|E(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$, то для краткости будем называть пространство $\mathcal{H}(E)$ WP-пространством. Все элементы WP-пространства также имеют конечный экспоненциальный тип, не превосходящий $h(E)$. Из теоремы 1 следует, что семейство $\{k(z, n+i) : n \in \mathbb{Z}\}$ образует безусловный базис WP-пространства $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда $h(E) = \pi$. Если $G = G^*$ и $G(z) \neq 0$, то система $\{k_1(z, n+i) : n \in \mathbb{Z}\}$ будет безусловным базисом пространства $\mathcal{H}(E_1)$ с $E_1(z) := G(z)E(z)$, причем отображение $f \rightarrow Gf$ есть унитарный оператор из WP-пространства $\mathcal{H}(E)$ на $\mathcal{H}(E_1)$. Здесь $k_1(z, \lambda)$ — воспроизводящее ядро пространства $\mathcal{H}(E_1)$. С помощью теоремы 1 дается следующее описание WP-пространств.

ТЕОРЕМА 2. Семейство $\{k(z, n + i) : n \in \mathbb{Z}\}$ образует безусловный базис пространства $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда существует вещественная целая функция G , не имеющая корней и такая, что пространство $\mathcal{H}(E_1)$ с $E_1(z) = E(z)/G(z)$ является WP-пространством, причем $h(E_1) = \pi$.

Отметим, что для WP-пространств при дополнительном предположении $\Lambda = \Lambda_+$ теорема 1 впервые была доказана в [1].

2. Ортогональные базисы де Бранжа. Остановимся на одном простом (с позиции теории операторов) частном случае ортогональных базисов, который формально не охватывается теоремой 1. Пусть выполнены условия нормировки $E(0) \in \mathbb{R}$, $E(0) = S(0) \neq 0$. Можно доказать, что размерность мнимой части оператора A_S строго меньше 2 тогда и только тогда, когда сопутствующая функция S имеет вид

$$S_\xi(z) = E^*(z) - \xi E(z), \quad \xi \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (7)$$

причем значению $\xi = \infty$ отвечает функция $S_\infty = E$. В случае $|\xi| \neq 1$ мнимая часть оператора A_{S_ξ} одномерна. Для всех таких ξ , за исключением, быть может, множества логарифмической емкости нуль, семейство корневых векторов оператора A_{S_ξ} полно в $\mathcal{H}(E)$. Далее, полное семейство корневых векторов образует безусловный базис пространства $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда кратности корней функции S_ξ ограничены в совокупности, а множество корней Λ удовлетворяет условию Карлесона (если $|\xi| < 1$, то Λ лежит в верхней полуплоскости, а в случае $|\xi| > 1$ — в нижней).

В случае $|\xi| = 1$ соответствующий оператор A_{S_ξ} самосопряжен, причем его ядро нетривиально лишь при условии, что $S_\xi \in \mathcal{H}(E)$, а это возможно только при одном исключительном значении $\xi = \xi_0$. Итак, если не существует исключительного значения либо $\xi \neq \xi_0$, семейство $\{k(z, \lambda_n) : S_\xi(\lambda_n) = 0\}$ образует ортогональный базис пространства $\mathcal{H}(E)$. Если $\xi = \xi_0$, то дефект этого семейства равен 1. Вместе с функцией $E^*(z) - \xi_0 E(z)$ оно снова образует ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$. Подчеркнем, что в случае $|\xi| = 1$ корни функции S_ξ вещественны. Указанные ортогональные базисы с помощью других соображений впервые были найдены де Бранжем [2].

Последовательности Λ , описание которых дается теоремой 1, характеризуются тем свойством, что сужения $F|_\Lambda$, $F \in \mathcal{H}(E)$, заполняют некоторое весовое пространство l_2 , причем соответствие между $F|_\Lambda$ и элементами этого пространства биективно. Другими словами, эту теорему можно переформулировать в виде результата об интерполяции целыми функциями из пространств де Бранжа. В недавней работе [4] выделен подкласс пространств де Бранжа (так называемые весовые пространства Пэли–Винера) и решена аналогичная задача интерполяции в этих пространствах. Описание интерполяционных последовательностей в [4] дано в виде трех условий, которые по смыслу близки к условиям 1)–3) теоремы 1. Интерполяционная теорема Любарского–Сейна и теорема 1 получены принципиально различными методами, ни один из этих результатов не содержит другой — они дополняют друг друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губреев Г. М. Алгебра и анализ, **12**, вып. 6, 1–97 (2000).
2. de Branges L. Hilbert Spaces of Entire Functions, Prentice-Hall, 1968.
3. Никольский Н. К. Лекции

об операторе сдвига. Наука, М., 1980. 4. *Lyubarskii Yu., Seip K.* J. Amer. Math. Soc., **15**, No. 4, 979–1006 (2002).

Полтавский национальный технический университет
e-mail: gubreev@yandex.ru

Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo
Pachuca, Hidalgo, Mexico
e-mail: anauaeh@yahoo.com

Поступило в редакцию
21 января 2004 г.