Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. П. Кохась, Классификация конечных фактор-
представлений $(2m + 1)$ -мерной группы Гейзенбер-
га над счетным полем конечной характеристики,
Функц. анализ и его прил., 2002, том 36, вы-
пуск 3, 79–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:53:27

УДК 517.986

Классификация конечных факторпредставлений ($2m + 1$)-мерной группы Гейзенберга над счетным полем конечной характеристики*

© 2002. К. П. КОХАСЬ

Пусть p — простое число, а $k_1, k_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел, каждое из которых больше единицы. Пусть $q_n = p^{k_1 \dots k_n}$. Рассмотрим возрастающую цепочку конечных полей F_{q_n} характеристики p , состоящих из q_n элементов: $F_{q_1} \subset F_{q_2} \subset \dots$, и счетное поле $F = \varinjlim F_{q_n}$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, и пусть H есть $(2m + 1)$ -мерная группа Гейзенберга над полем F , т. е. группа всех матриц размера $(m + 2) \times (m + 2)$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & c \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, c \in F.$$

Пусть H_q — аналогичная (конечная) группа над полем F_q .

В этой заметке мы описываем конечные факторпредставления группы H и группу Гротендика $K_0(\mathbb{C}(H))$. Алгебра $\mathbb{C}(H)$ является локально полупростой, и всю информацию о ее представлениях и K_0 -функторе мы получаем, в конечном счете, из ее диаграммы Браттели, хотя нигде в формулировках она явно не упоминается. Подробные доказательства для трехмерного случая можно найти в [3].

Автор глубоко благодарен А. М. Вершику за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор признателен рецензенту за полезные ссылки и замечания.

1. Диаграмма Браттели. Пусть $q = p^n$, F_q^+ — аддитивная группа поля F_q , $\hat{F}_q$ — группа аддитивных характеров этого поля и $\mathbf{1}$ — тривиальный аддитивный характер; для обозначения характеров мы используем греческие буквы. Пусть $E_{i,j}$ — матрица размера $(m + 2) \times (m + 2)$ с единственным ненулевым элементом на месте (i, j) , равным единице, и E — единичная матрица (все рассматриваемые матрицы — над полем F или F_q). Для a из F или F_q обозначим через x_i^a , y_i^a , z^a , $1 \leq i \leq m$, элементы группы H или H_q следующего вида:

$$x_i^a = E + aE_{1,i+1}, \quad y_i^a = E + aE_{i+1,m+2}, \quad z^a = E + aE_{1,m}.$$

Мы используем элементы x_i^a , y_i^a , z^a как суррогаты образующих, поскольку группа H не является конечно порожденной.

Группа H_q имеет q^{2m} одномерных представлений $T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ — произвольные наборы аддитивных характеров поля F_q :

$$T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(x_i^a) = \alpha_i(a), \quad T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(y_i^a) = \beta_i(a), \quad T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(z^a) = 1. \quad (1)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00098.

Кроме одномерных группа H_q имеет $q - 1$ попарно неэквивалентных неприводимых представлений T_γ размерности q^m , где $\gamma \in \widehat{F}_q \setminus \{1\}$. Для предельного перехода удобна следующая реализация этих представлений. Известно, что отображение $\chi_\gamma: F_q \rightarrow \widehat{F}_q$, заданное формулой $g \mapsto \gamma(g \cdot)$, является биекцией. Заданное действие аддитивной группы поля F_q на $\widehat{F}_q$ (зависящее от γ): для $\alpha \in \widehat{F}_q$, $g \in F_q$ положим

$$\alpha + g = \alpha + \chi_\gamma(g); \quad (2)$$

здесь мы рассматриваем аддитивные характеры поля F_q как отображения $F_q^+ \rightarrow F_q^+$ и для произведения характеров используем аддитивную запись.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\gamma \in \widehat{F}_q \setminus \{1\}$ — аддитивный характер и $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in F_q^m$ (единица на i -м месте). Представление T_γ действует в пространстве $\mathbb{C}^{q^m} \cong \mathbb{C}(\widehat{F}_q^m)$ с базисом $u_{\bar{\alpha}}$, где $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ пробегает всевозможные наборы из m аддитивных характеров, следующим образом:

$$T_\gamma(x_i^a) u_{\bar{\alpha}} = u_{\bar{\alpha} + a e_i}, \quad T_\gamma(y_i^a) u_{\bar{\alpha}} = \alpha_i(a) u_{\bar{\alpha}}, \quad T_\gamma(z^a) u_{\bar{\alpha}} = \gamma(a) u_{\bar{\alpha}}. \quad (3)$$

Здесь сумма $\alpha_i + a$ определена при помощи характера γ и понимается в смысле (2).

Вложение полей $F_q \subset F_{q^n}$ приводит к вложению групп $H_q \subset H_{q^n}$.

ЛЕММА 1.2. Матрица кратностей ограничений представлений группы H_{q^n} на H_q имеет следующий вид:

	$T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$	T_γ
$T_{\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } (\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n) _{(F_q^m \oplus F_q^m)} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \\ 0, & \text{если } (\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n) _{(F_q^m \oplus F_q^m)} \neq (\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \end{cases}$	0
T_{γ_n}	$\begin{cases} q^{m(n-2)}, & \text{если } \gamma_n _{F_q} = 1, \\ 0, & \text{если } \gamma_n _{F_q} \neq 1, \end{cases}$	$\begin{cases} q^{m(n-1)}, & \text{если } \gamma_n _{F_q} = \gamma, \\ 0, & \text{если } \gamma_n _{F_q} \neq \gamma. \end{cases}$

Утверждение леммы проверяется прямым подсчетом скалярных произведений характеров. Диаграмма Браттели, заданная этой леммой, представляет собой граф, чуть более сложный, чем дерево с кратными ребрами.

2. Факторпредставления. Зафиксируем характер $\rho \in \widehat{F} \setminus \{1\}$. Для бесконечного поля F отображение $g \mapsto \rho(g \cdot)$ из предыдущего раздела уже не будет биекцией, и для правильного обобщения формул (3) на бесконечномерный случай нам понадобятся два определения. В них мы по-прежнему интерпретируем характеры как отображения $F \rightarrow F_p^+$ и используем для произведения характеров аддитивную запись.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Наборы характеров $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \widehat{F}^m$ называются ρ -эквивалентными, если найдутся такие $z_1, \dots, z_m \in F$, что $(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(x) = (\rho(z_1 x), \dots, \rho(z_m x))$ для любого $x \in F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Для произвольного характера $\alpha \in \widehat{F}$ и любого $a \in F$ зададим характер α' формулой $\alpha' = \alpha + \rho(a \cdot)$. Будем писать $\alpha' = \alpha + a$.

Обозначим через B_ρ множество пар ρ -эквивалентных наборов характеров из $\widehat{F}^m$. Как множество B_ρ совпадает с $\widehat{F}^m \times F^m$. Введем на B_ρ меру, являющуюся

произведением мер Хаара на $\widehat{F}^m$ и $(F^+)^m$. На самом деле ρ -эквивалентность — это в точности хвостовое отношение эквивалентности (см. [1]) на той части схемы ветвления, которая соответствует последовательности представлений T_{ρ_n} .

ТЕОРЕМА 2.1. *Представление π_ρ , действующее в пространстве $L^2(B_\rho)$ следующим образом:*

$$(\pi_\rho(x_i^a)f)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = f(\bar{\alpha} + ae_i, \bar{\beta}),$$

$$(\pi_\rho(y_i^a)f)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \alpha_i(a)f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

$$(\pi_\rho(z^a)f)(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \rho(a)f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

является факторпредставлением типа Π_1 . След этого представления задается формулой

$$\mathrm{Tr}_\rho(g) = \prod_{i=1}^m \delta_{x_i, 0} \delta_{y_i, 0} \cdot \rho(z), \quad \text{где } g = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_m & z \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & y_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы получается при помощи стандартной конструкции факторпредставления по центральной эргодической мере на схеме ветвления (см. [1]), фактически при помощи предельного перехода. Этот способ построения факторов известен как *траекторная* или *группоидная* конструкция факторов.

Группа H имеет очевидный набор одномерных факторпредставлений (1).

ТЕОРЕМА 2.2. *Представления π_ρ , $\rho \in \widehat{F}$, $\rho \neq 1$, — полный список неодномерных конечных факторпредставлений группы H .*

Каждое факторпредставление LS-алгебры с конечным следом задается центральной эргодической мерой на пространстве путей схемы ветвления, заданной в лемме 1.2. В данном случае эти меры легко перечислить, что и дает утверждение теоремы.

Для алгебраических нильпотентных групп над полем характеристики 0 описание конечных следов было получено в [5].

3. Разложение регулярного представления. Опишем подалгебру алгебры центральных функций на схеме ветвления, соответствующую неодномерным представлениям. Для каждого $\gamma_n \in \widehat{F}_{q_n} \setminus \{1\}$ обозначим через $Z_{\gamma_n} \in \mathbb{C}(H_{q_n}) \subset \mathbb{C}(H)$ центральный носитель представления T_{γ_n} ; пусть Z_{1_n} — сумма центральных носителей всех одномерных представлений группы H_{q_n} , взятая с весом q_n^m . Пусть $\mathbb{Z}[1/p]$ — аддитивная группа рациональных чисел со знаменателями — степенями числа p . Элементы Z_{γ_n} удовлетворяют соотношениям

$$Z_{\gamma_n} = \sum_{\gamma_{n+1}: \gamma_{n+1}|_{F_{q_n}} = \gamma_n} \frac{q_{n+1}^m}{q_n^m} Z_{\gamma_{n+1}}$$

и порождают требуемую коммутативную подалгебру, которую мы отождествим благодаря этим соотношениям с алгеброй $C(\widehat{F})$ непрерывных функций на $\widehat{F}$ со значениями в $\mathbb{Z}[1/p]$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Правое регулярное представление π группы H разлагается по подалгебре $\pi(C(\widehat{F})) \subset (\pi(\mathbb{C}(H)))'$ в прямой интеграл факторпредставлений: $\pi = \int_{\widehat{F}} \pi_\rho d\rho$ (интегрирование по мере Хаара на $\widehat{F}$).*

ТЕОРЕМА 3.2. Для любой функции $f \in L^1(H) \cap L^2(H) \subset \mathbb{C}(H)$ верна формула Планшереля

$$\int_H |f(x)|^2 dx = \int_{\widehat{F}} \text{Tr}_\rho(\pi_\rho(f)\pi_\rho^*(f)) d\rho$$

(в левой части производится интегрирование по мере Хаара на H , в правой части — по мере Хаара на $\widehat{F}$).

Это утверждение можно получить предельным переходом от конечномерных представлений или как следствие описания множества характеров (теорема 2.2).

Неодномерные неприводимые представления группы H , являющиеся естественными пределами конечномерных представлений, параметризуются парами $(\rho, \bar{\sigma})$, где $\rho \neq 1$ — аддитивный характер, а $\bar{\sigma}$ — элемент факторпространства $\widehat{F}^m/F^m$ (факторизация по покоординатному аддитивному действию из определения 2.2). Обозначим эти представления через $S_{\rho, \bar{\sigma}}$; они действуют в пространстве $L^2(F^m)$ по формулам

$$\begin{aligned} (S_{\rho, \bar{\sigma}}(x_i^a)f)(\bar{\alpha}) &= f(\bar{\alpha} + ae_i), \\ (S_{\rho, \bar{\sigma}}(y_i^a)f)(\bar{\alpha}) &= \alpha_i(a)f(\bar{\alpha}), \\ (S_{\rho, \bar{\sigma}}(z^a)f)(\bar{\alpha}) &= \rho(a)f(\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\alpha} \in \widehat{F}^m$ пробегает орбиту $\bar{\sigma}$ аддитивного действия группы F^m на $\widehat{F}^m$, и мы отождествляем пространство $L^2(F^m)$ с пространством L^2 над этой орбитой.

ТЕОРЕМА 3.3. Факторпредставления π_ρ разлагаются в прямой интеграл неприводимых представлений по диагональной подалгебре: $\pi_\rho = \int_{\widehat{F}^m/F^m} S_{\rho, \bar{\sigma}} d\bar{\sigma}$ (интеграл по мере, получающейся при факторизации из меры Хаара на $\widehat{F}^m$).

Группа Гротендика $K_0(\mathbb{C}(H))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $\widehat{H} = (\widehat{F} \setminus \{1\}) \cup (\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m)$ — пространство конечных факторпредставлений группы H . Назовем функцию $f: \widehat{H} \rightarrow \mathbb{Z}[1/p]$ бинепрерывной, если

1) f принимает целочисленные значения на $\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m$ и сужение f на $\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m$ непрерывно;

2) функция $g: \widehat{F} \rightarrow \mathbb{Z}[1/p]$, заданная формулой

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \widehat{F} \setminus \{1\}, \\ \int_{\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m} f(y) dy, & x = 1 \end{cases}$$

(интегрирование по мере Хаара на $\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m$), непрерывна.

Отметим, что пространства $\widehat{F}$ и $\widehat{F}^m \times \widehat{F}^m$ — вполне несвязные компакты, а непрерывные функции на них — это в точности локально постоянные функции.

ТЕОРЕМА 4.1. Группа Гротендика $K_0(\mathbb{C}H)$ изоморфна аддитивной группе бинепрерывных функций на $\widehat{H}$. Конус истинных модулей состоит из неотрицательных функций, а порядковая единица — это функция, тождественно равная единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М., Керов С. В. В кн.: Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, ВИНТИ, М., 1985, с. 3–56. **2.** Вершик А. М., Кохась К. П. Алгебра и анализ, **2**, вып. 6, 98–106 (1990). **3.** Кохась К. П. Зап. научн. семин. ПОМИ, **283**, 140–155 (2001). **4.** Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. тт. 1, 2, Мир, М., 1988. **5.** Смирнов С. В. ДАН СССР. **170**, № 3, 524–525 (1966).

Поступило в редакцию
10 мая 2002 г.

УДК 512

Антивандермондовы системы и плоские деревья*

© 2002. Ю. Ю. КОЧЕТКОВ

1. Введение. Мы рассматриваем многочлены вида

$$p(z) = (1 - x_1 z)^{k_1} \cdots (1 - x_n z)^{k_n} \in \mathbb{C}[z]$$

($k_1, \dots, k_n$ — целые положительные числа), у которых кроме критических точек $a_1 = 1/x_1, \dots, a_n = 1/x_n$ имеется еще только одна критическая точка 0.

Критические точки многочлена p — это корни его производной p' . Кратность критической точки равна ее кратности как корня многочлена p' плюс 1. Поэтому кратность нуля равна

$$\sum_{i=1}^n k_i - 1 - \sum_{i=1}^n (k_i - 1) + 1 = n.$$

Если 0 — критическая точка многочлена p кратности n , то у p ровно 2 критических значения — 0 и 1, т. е. p является обобщенным многочленом Чебышёва.

Очевидное соотношение

$$p'(z) = p(z) \left[-\frac{k_1 x_1}{1 - x_1 z} - \cdots - \frac{k_n x_n}{1 - x_n z} \right] = p(z) \frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}$$

является необходимым и достаточным условием того, что 0 — критическая точка многочлена p кратности n . Сокращая на p , получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{z - a_i} = \frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (1) эквивалентно системе

[illegible]

*Эта работа была поддержана РФФИ, проект № 98-01-00329.