Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Антивандермондовы системы и плоские деревья, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:07:03

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М., Керов С. В. В кн.: Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 26, ВИНТИ, М., 1985, с. 3–56. **2.** Вершик А. М., Кохась К. П. Алгебра и анализ, **2**, вып. 6, 98–106 (1990). **3.** Кохась К. П. Зап. научн. семин. ПОМИ, **283**, 140–155 (2001). **4.** Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. тт. 1, 2, Мир, М., 1988. **5.** Смирнов С. В. ДАН СССР. **170**, № 3, 524–525 (1966).

Поступило в редакцию
10 мая 2002 г.

УДК 512

Антивандермондовы системы и плоские деревья*

© 2002. Ю. Ю. КОЧЕТКОВ

1. Введение. Мы рассматриваем многочлены вида

$$p(z) = (1 - x_1 z)^{k_1} \cdots (1 - x_n z)^{k_n} \in \mathbb{C}[z]$$

($k_1, \dots, k_n$ — целые положительные числа), у которых кроме критических точек $a_1 = 1/x_1, \dots, a_n = 1/x_n$ имеется еще только одна критическая точка 0.

Критические точки многочлена p — это корни его производной p' . Кратность критической точки равна ее кратности как корня многочлена p' плюс 1. Поэтому кратность нуля равна

$$\sum_{i=1}^n k_i - 1 - \sum_{i=1}^n (k_i - 1) + 1 = n.$$

Если 0 — критическая точка многочлена p кратности n , то у p ровно 2 критических значения — 0 и 1, т. е. p является обобщенным многочленом Чебышёва.

Очевидное соотношение

$$p'(z) = p(z) \left[-\frac{k_1 x_1}{1 - x_1 z} - \cdots - \frac{k_n x_n}{1 - x_n z} \right] = p(z) \frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}$$

является необходимым и достаточным условием того, что 0 — критическая точка многочлена p кратности n . Сокращая на p , получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{z - a_i} = \frac{(\sum k_i) z^{n-1}}{\prod (z - a_i)}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (1) эквивалентно системе

[illegible]

*Эта работа была поддержана РФФИ, проект № 98-01-00329.

Система (2) называется антивандермондовой системой, потому что представляет собой обычную вандермондову систему (т. е. систему с матрицей Вандермонда), но у которой изменены роли неизвестных и коэффициентов. Решение системы (2) определено с точностью до мультипликативного множителя; поэтому мы всегда будем считать, что $x_n = 1$.

Условие (1) и система (2) имеют смысл и при вещественных k_i . Берч доказал (не опубликовано), что система (2) имеет ровно $(n - 1)!$ различных решений, если $k_i > 0$. В дальнейшем под целым случаем мы будем понимать случай целых положительных k_i , а под вещественным — случай вещественных положительных k_i .

Нас будет интересовать степень поля определения решения системы (2). Наиболее интересен здесь случай $n = 5$. Л. Заппони доказал [3] (см. также [1, 4]), что если число $k_1 \cdots k_5(k_1 + \cdots + k_5)$ — полный квадрат, то решение определено над полем степени 12 (а не 24). В настоящей работе анонсировано доказательство сильного обобщения результата Заппони.

2. Антивандермондовы системы и плоские деревья. Решения системы (2) имеют изящную геометрическую интерпретацию [1]. Пусть $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1 \in \mathbb{C}$ — решение. Как уже указывалось, в этом случае многочлен $p(z)$ является обобщенным многочленом Чебышёва и имеет ровно два критических значения 0 и 1. Прообраз $p^{-1}[0, 1]$ представляет собой связное дерево диаметра 4: центральная вершина (центр) валентности n находится в начале координат, n вершин валентностей $k_1, \dots, k_n$ (боковые вершины) соединены с центром ребрами и находятся в точках $a_1 = 1/x_1, \dots, a_{n-1} = 1/x_{n-1}, a_n = 1$ соответственно, остальные вершины имеют валентность 1.

Пусть k_i попарно различны (именно этот случай и будет нас интересовать); тогда такое дерево определено (с точностью до изотопии) циклическим порядком валентностей боковых вершин при обходе центра против часовой стрелки. А так как вершина валентности k_n находится в точке 1, то дерево определено перестановкой чисел $k_1, \dots, k_{n-1}$. У нас есть $(n - 1)!$ перестановок и $(n - 1)!$ решений системы (2). Известно [1], что существует взаимно однозначное соответствие между решениями системы (1) и классами изотопии описанных выше плоских деревьев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дерево, отвечающее четной перестановке $k_1, \dots, k_{n-1}$, мы будем называть *четным* деревом, а нечетной — *нечетным*. Соответственно мы разбиваем множество из $(n - 1)!$ решений системы (1) на два подмножества — *подмножество четных решений* и *подмножество нечетных решений*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Четные и нечетные решения можно определить и в вещественном случае. Для этого рассмотрим плоскую вещественную кривую

$$\prod_{i=1}^n |1 - x_i z|^{k_i} = 1.$$

Если $x_1, \dots, x_n$ — решение системы (1), то кривая представляет собой « n -лепестковый цветок с центром в начале координат», причем точка $a_i = 1/x_i$ находится внутри своего лепестка. (В целом случае ребро, соединяющее центр с боковой вершиной валентности k_i , также находится внутри своего лепестка.) Циклический порядок лепестков и определяет четность или нечетность решения.

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\sum_{i=1}^n (z - a_1) \cdots \widehat{(z - a_i)} \cdots (z - a_n) = (k_1 + \cdots + k_n) z^{n-1}. \quad (3)$$

Последовательно подставляя в (3) $z = a_1, z = a_2, \dots, z = a_n$ и перемножая полученные равенства, получаем

$$(-1)^{n(n-1)/2} \Delta^2 \prod_{i=1}^n k_i = (k_1 + \cdots + k_n)^n \prod_{i=1}^n a_i^{n-1}, \quad (4)$$

где $\Delta = \prod_{i < j} (a_i - a_j)$. Соотношение (4) показывает, что a_i попарно различны (так как $\Delta \neq 0$).

Если $n = 2k + 1$ нечетно, то равенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta}{\prod a_i^k} = (k_1 + \cdots + k_n)^k \left((-1)^{k(2k+1)} \frac{\sum k_i}{\prod k_i} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Другими словами, множество решений S разбивается на два подмножества, $S = S_+ \cup S_-$, решения, для которых левая часть формулы (5) положительна, и решения, для которых левая часть формулы (5) отрицательна.

ТЕОРЕМА 1. *Подмножество S_+ является подмножеством четных (нечетных) решений, а подмножество S_- является подмножеством нечетных (четных) решений.*

Эта теорема была впервые доказана Л. Заппони в его диссертации (см. также [3]) с помощью сложной техники штрелелевых дифференциалов. Простое доказательство см. в [4].

Исключая из системы (2) все переменные, кроме x_{n-1} , мы получим многочлен $F(x_{n-1}, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}[x_{n-1}, k_1, \dots, k_n]$ степени $(n-1)!$ по x_{n-1} . В дальнейшем переменную x_{n-1} в F мы будем обозначать через x . При фиксированных k_i корни многочлена $F(x)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями системы (2) (если $F(x)$ не имеет кратных корней). Поэтому мы можем разбить множество корней на два подмножества: подмножество четных корней и подмножество нечетных корней.

3. Основные результаты. Далее будет изучаться случай $n = 5$. Здесь многочлен $F(x, k_1, \dots, k_5)$ имеет степень 24 по x , он однороден степени 24 по k_i . Кроме того, F симметричен по k_1, k_2, k_3 и

$$x^{24} F(1/x, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = F(x, k_1, k_2, k_3, k_5, k_4).$$

Громоздкость F как многочлена от 6 переменных (в нем примерно 100 000 членов) не позволяет вычислить его непосредственно, используя базисы Грёбнера или результаты. Он был найден интерполяционными методами. Знание F является необходимым для доказательства основного результата этой работы.

При $n = 5$ соотношение (6) можно записать в виде

$$\frac{\Delta}{(\prod a_i^2)(\sum k_i)^2} = \pm \sqrt{d}, \quad (6)$$

где $d = k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)$. Величину $\pm \sqrt{d}$ мы будем называть инвариантом решения $x_1, \dots, x_5$ (корня γ многочлена $F(x)$) и обозначать через

$i(x_1, \dots, x_5) (i(\gamma))$. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{12}$ — множество четных корней многочлена $F(x)$, а $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{12}$ — множество нечетных корней. Тогда

$$F(x) = G(x)H(x), \quad \text{где } G(x) = \prod_i (x - \gamma_i), \quad H(x) = \prod_i (x - \gamma'_i).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$, то корни многочлена $F(x)$ разбиты на 12 пар сопряженных (если $F(x)$ не имеет вещественных корней). Если γ и $\bar{\gamma}$ — корни, то они имеют одинаковую четность, потому что перестановки $(k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}, k_{i_4})$ и $(k_{i_4}, k_{i_3}, k_{i_2}, k_{i_1})$ имеют одинаковую четность. Таким образом, 12 пар сопряженных корней этого многочлена разбиты на 6 пар четных и 6 пар нечетных. Вопрос о существовании его вещественных корней (даже в вещественном случае) открыт. Из геометрических соображений понятно, что такой корень обязан быть кратным.

ТЕОРЕМА 2. Если d — полный квадрат, то в разложении $F = GH$ многочлены G и H определены над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому корню γ отвечает решение $x_1, \dots, x_5$ системы (1), по которому, в свою очередь, вычисляется инвариант $i(\gamma) = \pm\sqrt{d}$. Пусть $g \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Тогда $g(\gamma) = \gamma'$, где γ' также является корнем многочлена $F(x)$. Нам нужно доказать, что γ и γ' имеют одинаковую четность, т. е. что $i(\gamma) = i(\gamma')$. Но $i(\gamma') = i(g(\gamma)) = g(i(\gamma)) = i(\gamma)$, так как $\sqrt{d}$ — целое число. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если d не является полным квадратом, то G и H определены над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство дословно совпадает с доказательством теоремы 2, только теперь $g \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если многочлен F неприводим над $\mathbb{Q}$, то его группа Галуа импримитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K — поле разложения многочлена F и $g \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Либо $g(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$ и тогда g переводит четные корни в четные и нечетные в нечетные, либо $g(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$ и тогда g переводит четные корни в нечетные и нечетные в четные. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные результаты справедливы для нечетного $n = 4k + 1$. Если $n = 4k + 3$, то разложение $F = GH$ определено над мнимым квадратичным полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Теперь сформулируем теорему о разложении для $n = 5$ в общей ситуации.

ТЕОРЕМА 3. При $n = 5$ в кольце $\mathbb{Z}[x, k_1, \dots, k_5][\delta]$, $\delta^2 = k_1 \cdots k_5(k_1 + \cdots + k_5)$, имеет место разложение $F = (A + \delta B)(A - \delta B)$, где $A \in \mathbb{Z}[x, k_1, \dots, k_5]$ имеет степень 12 по x , однороден и имеет степень 12 по k_i , $B \in \mathbb{Z}[x, k_1, \dots, k_5]$ имеет степень 9 по x , однороден и имеет степень 9 по k_i . Кроме того, $B = x^3(x - 1)^3C$, где C принадлежит $\mathbb{Z}[x, k_1, \dots, k_5]$ и имеет степень 3 по x .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 не утверждает, что разложение $F = (A + \delta B)(A - \delta B)$ связано с четными и нечетными корнями. Чтобы установить такую связь, надо воспользоваться теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shabat G., Zvonkin A.* Contemp. Math., **178**, 233–275 (1994). 2. *Кочетков Ю. Ю.* УМН, **52**, вып. 4, 203–204 (1997). 3. *Zapponi L.* Compos. Math., **122**, 113–133 (2000). 4. *Kochetkov Yu.* In: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Springer-Verlag, 2000, pp. 447–455.

Московский институт электроники и математики
e-mail: yuyuk@kochetkov.mcsme.ru

Поступило в редакцию
15 января 2001 г.

УДК 517.982

О мультипликаторах на множестве рядов Радемахера в симметричных пространствах*

© 2002. Г. П. КУРБЕРА, В. А. РОДИН

1. Введение. Пусть E — симметричное пространство измеримых на $[0, 1]$ функций. Мы будем обозначать через $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ пространство измеримых функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $fg \in E$ для любого п.в. сходящегося ряда Радемахера $g = \sum c_n r_n$, такого, что $\sum c_n r_n \in E$, где $r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n \geq 1$, — функции Радемахера. Снабженное нормой

$$\|f\|_\Lambda = \sup \left\{ \|fg\|_E : g = \sum c_n r_n \in E, \|g\|_E \leq 1 \right\},$$

пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ становится банаховым функциональным пространством. Пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ можно рассматривать как пространство операторов, определенных умножением на измеримую функцию и действующих из замыкания в E линейного подпространства $[r_n]_E$, образованного функциями Радемахера, на все пространство E . В работе [6, Theorem 6] было получено описание симметричных пространств E , для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 . А именно, если G — это замыкание множества ограниченных функций в пространстве Орлича L_{Φ_2} с $\Phi_2(t) = \exp |t|^2 - 1$, то G непрерывно вложено в E . В этом случае норму в $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ можно записать в эквивалентном виде следующим образом:

$$\|f\|_\Lambda = \sup \left\{ \|fg\|_E : g = \sum c_n r_n, \sum c_n^2 \leq 1 \right\}.$$

В [3] рассматривался вопрос, должно ли пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ быть всегда изоморфным некоторому симметричному пространству? Было показано, что для широкого класса классических симметричных пространств E , для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 , ответ отрицательный. Это так, например, для пространств $L_{p,q}$ и для обширного множества пространств Лоренца и Орлича (см. [3, р. 122]). В данной работе мы рассматриваем противоположную задачу. Изучаются условия, при которых пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно некоторому симметричному пространству. В разд. 3 дано описание пространств E , для которых $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_∞ . Отметим, что в работе [3] были показаны некоторые примеры таких пространств — это пространства Орлича $E = L_{\Phi_q}$ с $\Phi_q(t) = \exp |t|^q - 1$ при

*Исследования первого автора поддержаны DGES, грант PB96-1321-C02-01, а второго — РФФИ, грант 98-01-00044.