Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Курбера, В. А. Родин, О мультипликаторах на множестве рядов Радемахера в симметричных пространствах, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:40:28

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shabat G., Zvonkin A.* Contemp. Math., **178**, 233–275 (1994). 2. *Кочетков Ю. Ю.* УМН, **52**, вып. 4, 203–204 (1997). 3. *Zapponi L.* Compos. Math., **122**, 113–133 (2000). 4. *Kochetkov Yu.* In: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Springer-Verlag, 2000, pp. 447–455.

Московский институт электроники и математики
e-mail: yuyuk@kochetkov.mcsme.ru

Поступило в редакцию
15 января 2001 г.

УДК 517.982

О мультипликаторах на множестве рядов Радемахера в симметричных пространствах*

© 2002. Г. П. КУРБЕРА, В. А. РОДИН

1. Введение. Пусть E — симметричное пространство измеримых на $[0, 1]$ функций. Мы будем обозначать через $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ пространство измеримых функций $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $fg \in E$ для любого п.в. сходящегося ряда Радемахера $g = \sum c_n r_n$, такого, что $\sum c_n r_n \in E$, где $r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n \geq 1$, — функции Радемахера. Снабженное нормой

$$\|f\|_\Lambda = \sup \left\{ \|fg\|_E : g = \sum c_n r_n \in E, \|g\|_E \leq 1 \right\},$$

пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ становится банаховым функциональным пространством. Пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ можно рассматривать как пространство операторов, определенных умножением на измеримую функцию и действующих из замыкания в E линейного подпространства $[r_n]_E$, образованного функциями Радемахера, на все пространство E . В работе [6, Theorem 6] было получено описание симметричных пространств E , для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 . А именно, если G — это замыкание множества ограниченных функций в пространстве Орлича L_{Φ_2} с $\Phi_2(t) = \exp |t|^2 - 1$, то G непрерывно вложено в E . В этом случае норму в $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ можно записать в эквивалентном виде следующим образом:

$$\|f\|_\Lambda = \sup \left\{ \|fg\|_E : g = \sum c_n r_n, \sum c_n^2 \leq 1 \right\}.$$

В [3] рассматривался вопрос, должно ли пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ быть всегда изоморфным некоторому симметричному пространству? Было показано, что для широкого класса классических симметричных пространств E , для которых $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 , ответ отрицательный. Это так, например, для пространств $L_{p,q}$ и для обширного множества пространств Лоренца и Орлича (см. [3, р. 122]). В данной работе мы рассматриваем противоположную задачу. Изучаются условия, при которых пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно некоторому симметричному пространству. В разд. 3 дано описание пространств E , для которых $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_∞ . Отметим, что в работе [3] были показаны некоторые примеры таких пространств — это пространства Орлича $E = L_{\Phi_q}$ с $\Phi_q(t) = \exp |t|^q - 1$ при

*Исследования первого автора поддержаны DGES, грант PB96-1321-C02-01, а второго — РФФИ, грант 98-01-00044.

$q \geq 2$. Заметим, что если $E = L_{\Phi_2}$, то $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 , а если $E = L_{\Phi_q}$ при $q > 2$, то $[r_n]_E$ изоморфно пространству $\ell_{q', \infty}$, где $1/q + 1/q' = 1$ (см. [6, р. 221]). Мы будем рассматривать симметричные пространства, характеризующиеся определенным квазилинейным оператором Q . Для этих пространств доказано, что $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_∞ . Эти пространства удовлетворяют условию $E \subsetneq L_{\Phi_2}$. В разд. 4 изучается возможность определения пространств E , для которых $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно пространству, отличному от L_∞ . Некоторые экземпляры таких пространств рассматривались и в работе [3]. Было показано, что $\Lambda(\mathcal{R}, L_{\exp})$ изоморфно пространству L_{Φ_2} . В настоящей работе мы показываем, что если $E = L_{\Phi_q}$ с $\Phi_q(t) = \exp|t|^q - 1$ и $0 < q < 2$, то $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно пространству Орлича L_{Φ_α} , где $\alpha = 2q/(2 - q)$. Заметим, что в этом случае $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 . В завершение рассматриваются условия на симметричные пространства F и E , при выполнении которых имеет место непрерывное вложение F в $\Lambda(\mathcal{R}, E)$.

2. Предварительные сведения. Напомним определения основных классов симметричных пространств. Выпуклая четная функция Φ , $\Phi(0) = 0$, определяет пространство Орлича L_Φ с нормой

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 \Phi\left(\frac{f(t)}{\lambda}\right) dt \leq 1 \right\}.$$

Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ — возрастающая вогнутая функция, $\varphi(0) = 0$. Пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ — это пространство всех измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 f^*(t) d\varphi(t).$$

Пусть $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ — возрастающая функция, $\phi(0) = 0$, причем $\phi(t)/t$ убывает. Пространство Марцинкевича определяется нормой

$$\|f\|_{M(\phi)} = \sup_{0 < t < 1} \frac{1}{\phi(t)} \int_0^t f^*(s) ds.$$

3. $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_∞ . Рассмотрим функцию $\phi_1(t) = \ln^{-1}(e/t)$ и квазилинейный оператор Q ,

$$Qf(t) = \left(\frac{1}{\phi_1(t)} \int_0^t (f^*(s))^2 d\phi_1(s) \right)^{1/2}.$$

Каждое симметричное функциональное пространство E порождает симметричное пространство последовательностей $q(E)$ с нормой

$$\|(c_n)\|_{q(E)} = \left\| \sum c_n^* \chi_{(0, 2^{-n+1})} \right\|_E,$$

где (c_n^*) — перестановка последовательности $(|c_n|)$ в убывающем порядке (см. [5] и [6]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть E — симметричное пространство, в котором оператор $Q: E \rightarrow E$ является ограниченным. Тогда нормы $\|\sum c_n r_n\|_E$ и $\|(c_n)\|_{q(E)}$ эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 1 дает возможность записывать норму в пространстве $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ в следующем эквивалентном виде:

$$\|f\|_{\Lambda} = \sup \left\{ \|fg\|_E : g = \sum c_n r_n \in E, \|(c_n)\|_{q(E)} \leq 1 \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественно возникает вопрос: будет ли условие ограниченности оператора Q в E необходимым для эквивалентности норм $\|\sum c_n r_n\|_E$ и $\|(c_n)\|_{q(E)}$? Следующий результат принадлежит С. В. Асташкину и Е. М. Семёнову [1].

Пусть E — симметричное пространство, интерполяционное относительно пары (L_{∞}, G) . Оператор Q ограничен в E тогда и только тогда, когда нормы $\|\sum c_k r_k\|_E$ и $\|(c_n)\|_{q(E)}$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E — симметричное пространство, в котором оператор $Q: E \rightarrow E$ является ограниченным. Тогда пространство $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_{∞} .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [4] был установлен следующий, более слабый, вариант утверждения теоремы 2. Пусть E — симметричное пространство, в котором оператор $Tf(t) = \ln^{1/2}(e/t) \int_0^t f^*(s) d(\ln^{-1/2}(e/s))$ является ограниченным; тогда $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_{∞} . Сопоставление этого утверждения с утверждением теоремы 2 определяет необратимое неравенство $Qf(t) \leq \sqrt{2}Tf(t)$.

Теорема 2 и результаты работы [1] позволяют привести примеры классов пространств E , для которых $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ изоморфно L_{∞} .

СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda(\phi_{\beta})$ с $\phi_{\beta}(t) = \ln^{-1/\beta}(e/t)$. Если $\beta > 2$, то пространство $\Lambda(\mathcal{R}, \Lambda(\phi_{\beta}))$ изоморфно L_{∞} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть E — симметричное пространство, в котором оператор $Q: E \rightarrow E$ является ограниченным. Тогда имеют место вложения $L_{\infty} \subseteq E \subsetneq L_{\Phi_2}$.

4. Изоморфизм между пространствами $\Lambda(\mathcal{R}, E)$ и симметричными пространствами, отличными от L_{∞} . Мы рассмотрим сначала пространства Орлича $E = L_{\Phi_q}$ для $\Phi_q(t) = \exp|t|^q - 1$ и $0 < q < 2$. Для этого случая $[r_n]_E$ изоморфно ℓ_2 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть L_{Φ_q} — пространство Орлича, где $\Phi_q(t) = \exp|t|^q - 1$ и $0 < q < 2$. Тогда $\Lambda(\mathcal{R}, L_{\Phi_q})$ изоморфно пространству $L_{\Phi_{\alpha}}$, где $\alpha = 2q/(2 - q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полное описание поведения мультипликаторов в пространствах L_{Φ_q} дает следующая формула:

$$\Lambda(\mathcal{R}, L_{\Phi_q}) \approx \begin{cases} L_{\Phi_{\alpha}} & \text{для } 0 < q < 2, \text{ причем } \alpha = 2q/(2 - q), \\ L_{\infty} & \text{для } q \geq 2. \end{cases}$$

Учитывая совпадение пространств Орлича и Марцинкевича для быстро растущих функций [2, с. 248], этот результат можно переписать в терминах пространств Марцинкевича. Пусть $\psi_{\beta}(t) = t \ln^{1/\beta}(e/t)$; тогда

$$\Lambda(\mathcal{R}, M(\psi_{\beta})) \approx \begin{cases} M(\psi_{\gamma}) & \text{для } 0 < \beta < 2, \text{ причем } 1/\gamma = 1/\beta - 1/2, \\ L_{\infty} & \text{для } \beta \geq 2. \end{cases}$$

В завершение мы дадим достаточные условия на симметричные пространства F и E , гарантирующие непрерывное вложение F в $\Lambda(\mathcal{R}, E)$.

Предложение 2. Пусть E и F — симметричные пространства и

$$\omega_F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\ln^{1/2}(e/s)}{\varphi_F(s)} ds.$$

Если $\omega_F(t)$ принадлежит E , то F непрерывно вложено в $\Lambda(\mathcal{R}, E)$.

Замечание 5. В предположениях предложения 2 пространство Марцинкевича $M(t\omega_F(t))$ непрерывно вложено в E .

Замечание 6. Упомянутое выше вложение может превратиться в изоморфизм: пусть $F = M(\psi_\gamma)$ и $E = M(\psi_\beta)$ для $\psi_q(t) = t \ln^{1/q}(e/t)$ и $1/\gamma = 1/\beta - 1/2$, где $0 < \beta < 2$. Тогда из замечания 4 следует, что $F \approx \Lambda(\mathcal{R}, E)$.

Замечание 7. Если рассматривать симметричные пространства, интерполяционные относительно пары (L_1, L_∞) , то условие $\omega_F(t) \in E$ можно заменить на условие $\ln^{1/2}(e/t)/\varphi_F(t) \in E$.

Авторы выражают благодарность профессорам Е. М. Семенову и С. В. Асташкину за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асташкин С. В., Семенов Е. М. ДАН, **375**, №1, 7–9 (2000).
2. Андриенко В. Ф. В сб.: Математический анализ, 1970, Итоги науки, ВИНТИ, М., 1971, с. 203–262.
3. Curbera G. P. Proc. Edinb. Math. Soc., **40**, No. 1, 119–126 (1997).
4. Curbera G. P., Rodin V. A. In: Intern. Conf. for Geometry and Analysis, Sec. 2, Rostov Limanchick, 2000, pp. 178–179.
5. Родин В. А., Семенов Е. М. Труды матем. факультета ВГУ, **10**, 88–96 (1973).
6. Rodin V. A., Semenov E. M. Anal. Math., **1**, 207–222 (1975).

Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas
e-mail: curbera@cica.es

Воронежский институт МВД России
e-mail: rodin_v@mail.ru

Поступило в редакцию
9 ноября 2000 г.

УДК 512.77

Новая M -кривая степени 8*

© 2002. С. Ю. ОРЕВКОВ

Вещественная алгебраическая кривая в $\mathbb{RP}^2$ называется M -кривой, если она имеет максимально возможное число $(m-1)(m-2)/2+1$ компонент связности, где m — степень кривой. В настоящей заметке мы строим M -кривую степени 8, расположенную с точностью до изотопии, как на рис. 1, где $\langle n \rangle$ обозначает n овалов, лежащих вне друг друга в соответствующей области. Реализуемость этого расположения была ранее неизвестна. После этого результата (вместе с недавними результатами [1, 3] и более ранними результатами Фидлера, Виро, Корчагина, Шустина и др., см. обзоры [2, 3]) остается 6 расположений 22 овалов, реализуемость которых неизвестна.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00602.