Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пушницкий, М. В. Ружанский, Функция спектрального сдвига оператора Шрёдингера в пределе большой константы связи, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 3, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:10:39

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевалье Б. Функц. анализ и его прил., **36**, вып. 1, 90–93 (2002). **2.** Korchagin A. B. The first part of Hilbert's sixteenth problem: history and main results. Math. Series, Texas Tech University, Vol. 19, 1997, pp. 85–140. **3.** Orevkov S. Yu. Classification of Flexible M -curves of Degree 8 up to Isotopy. Geom. Funct. Anal. (to appear). **4.** Shustin E. I. Алгебра и анализ, **11**, вып. 5, 221–249 (1999). **5.** Вуро О. Я. Вещественные алгебраические многообразия с предписанными топологическими свойствами. Дисс. д.ф.-м.н., Ленинград, 1983; Patchworking real algebraic varieties, <http://www.math.uu.se/~oleg>. **6.** Вуро О. Я. Алгебра и анализ, **1**, вып. 5, 1–73 (1990).

Laboratoire E. Picard, UFR MIG, Université Paul Sabatier
Математический институт РАН им. В.А.Стеклова
e-mail: orevkov@picard.ups-tlse.fr, orevkov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
1 октября 2001 г.

УДК 517.43

Функция спектрального сдвига оператора Шрёдингера в пределе большой константы связи

© 2002. А. Б. Пушницкий, М. В. Ружанский

1. Введение. Пусть H_0 и H — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Если разность $H - H_0$ является ядерным оператором, то существует функция $\xi \in L^1(\mathbb{R})$, такая, что справедлива формула следа И. М. Лифшица и М. Г. Крейна

$$\mathrm{Tr}(\phi(H) - \phi(H_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) \phi'(\lambda) d\lambda, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Функция $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$ называется функцией спектрального сдвига (ФСС) для пары H_0, H . Подробное изложение теории ФСС имеется в книге [9]; см. также обзор [3].

Рассмотрим теперь (самосопряженный) оператор Лапласа Δ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и пусть $H_0 = h(-\Delta)$, где функция $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} h \in C^2([0, +\infty)), \quad h(0) = 0, \quad h'(r) > 0 \text{ для любого } r > 0, \\ \text{существует предел } \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-m} h(r) = h_\infty > 0, \quad m > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, пусть возмущение V — оператор умножения на вещественный потенциал $V(x)$, удовлетворяющий оценке

$$|V(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^l}, \quad l > d. \quad (2)$$

Положим $H = H_0 + V$. Наиболее важен случай оператора Шрёдингера, соответствующий выбору $h(r) = r$; однако рассмотрение достаточно широкого класса функций h позволит нам продемонстрировать зависимость получаемых результатов от символа (псевдо)дифференциального оператора H_0 .

Хотя разность $H - H_0$ и не ядерна, при условии (2) разность достаточно высоких степеней резольвент операторов H и H_0 оказывается ядерной, что позволяет

определить ФСС $\xi(\lambda; H, H_0)$ на основе «принципа инвариантности» (см., например, [3]).

Известны различные результаты о высокоэнергетических ($\lambda \rightarrow +\infty$) и квазиклассических ($h(r) = h_\infty r$, $h_\infty \rightarrow 0$) асимптотиках ФСС указанной пары операторов. В настоящей работе мы рассматриваем вопрос об асимптотике ФСС $\xi(\lambda; H_0 + \alpha V, H_0)$ в пределе большой константы связи: $\alpha \rightarrow +\infty$.

2. Формулировка результатов. Оказывается, что характер обсуждаемой асимптотики существенно зависит от знака возмущения V . Для неположительных возмущений имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция h удовлетворяет условиям (1). Пусть $H_0 = h(-\Delta)$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и предположим, что потенциал $V \leq 0$ удовлетворяет оценке (2) при $l > \max\{d, 2m\}$. Тогда для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \xi(\lambda; H_0 + \alpha V, H_0) &= -\alpha^{d/(2m)} C_1 (1 + o(1)), \quad \alpha \rightarrow +\infty, \\ C_1 &= (2\pi)^{-d} h_\infty^{-d/(2m)} \operatorname{vol}\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\} \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{d/(2m)} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Перейдем к случаю неотрицательных возмущений. В этом случае приходится рассматривать потенциалы со степенной асимптотикой на бесконечности. Пусть $\mathbb{S}^{d-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^d$; предположим, что для некоторой неотрицательной функции $\Psi \in C(\mathbb{S}^{d-1})$ выполнено соотношение

$$\sup_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} |V(\rho\omega) - \Psi(\omega)\rho^{-l}| = o(\rho^{-l}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция h удовлетворяет условиям (1). Пусть $H_0 = h(-\Delta)$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и предположим, что потенциал $V \geq 0$ ограничен и удовлетворяет условию (4) с некоторой функцией $\Psi \in C(\mathbb{S}^{d-1})$, $\Psi \geq 0$, и $l > d$. Тогда для всех $\lambda > 0$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \xi(\lambda; H_0 + \alpha V, H_0) &= \alpha^{d/l} C_2 (1 + o(1)), \quad \alpha \rightarrow +\infty, \\ C_2 &= (2\pi)^{-d} d^{-1} \int_{h(|p|^2) < \lambda} (\lambda - h(|p|^2))^{-d/l} dp \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi^{d/l}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1 при $h(r) = r$ была доказана первым автором в [5]. Общий случай легко получить, комбинируя технику работ [5] и [6]. Теорема 2 является совместным результатом авторов [6].

Основные составляющие доказательства теоремы 2 суть представление для функции спектрального сдвига из работы [4], асимптотическая формула для спектра псевдодифференциальных операторов отрицательного порядка из работ [1, 2], техника вариационных отношений, а также некоторые факты о граничных задачах для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. Все трудности доказательства возникают уже при рассмотрении случая $h(r) = r$; обобщение на случай произвольных функций h не вызывает затруднений.

3. Обсуждение. 1. При $\lambda < 0$ в условиях теоремы 1 ФСС $\xi(\lambda)$ совпадает (со знаком минус) с количеством собственных значений оператора $H_0 + \alpha V$ в интервале $(-\infty, \lambda)$. Таким образом, при $\lambda < 0$, $V \leq 0$ и $h(r) = r$ формула (3)

переходит в известную асимптотическую формулу Вейля для считающей функции спектра оператора Шрёдингера (см., например, [7, теорема XIII.80]).

2. Из формулы (3) видно, что порядок главного члена асимптотики ФСС зависит от асимптотики символа h на бесконечности, но не зависит от поведения потенциала V . При $V \geq 0$ ситуация в какой-то мере обратная, т.е. роли пространственной и импульсной переменной меняются местами.

3. Асимптотические коэффициенты C_1 и C_2 допускают интерпретацию в терминах фазового объема. А именно, легко видеть, что

$$C_1 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-d/(2m)} \text{vol}\{(x, p) \in \mathbb{R}^{2d} \mid h(|p|^2) + \alpha V(x) < \lambda < h(|p|^2)\},$$

$$C_2 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-d/l} \text{vol}\{(x, p) \in \mathbb{R}^{2d} \mid h(|p|^2) < \lambda < h(|p|^2) + \alpha V(x)\}.$$

4. В работе [5] имеется некоторое утверждение (теорема 1.7) относительно случая потенциала V переменного знака. Более точные результаты можно получить, комбинируя технику работ [5, 6, 8]. Кратко можно отметить, что в случае потенциала V переменного знака при $l \neq 2m$ главный член асимптотики ФСС имеет вид $C\alpha^\nu$, где $\nu = \max\{d/(2m), d/l\}$, а константа C явно выражается через потенциал V .

5. Отметим, что условие (1) можно ослабить в различных направлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Вестник ЛГУ, **13**, мат., мех., астр., №3, 13–21 (1977).
2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Вестник ЛГУ, **13**, мат., мех., астр., №3, 5–10 (1979).
3. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р. Алгебра и анализ, **4**, вып. 5, 1–44 (1992).
4. Пушницкий А. Б. Алгебра и анализ, **9**, вып. 6, 197–213 (1997).
5. Pushnitski A. Comm. Partial Differential Equations, **25**, Nos. 3–4, 703–736 (2000).
6. Pushnitski A., Ruzhansky M. Spectral Shift Function of the Schrödinger Operator in the Large Coupling Constant Limit, II. Positive Perturbations, Preprint 01/07, Loughborough University, 2001.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 4: Анализ операторов. Мир, М., 1982.
8. Safronov O. J. Funct. Anal., **182**, No. 1, 151–169 (2001).
9. Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния. Общая теория. СПбГУ, 1994.

Loughborough University
e-mail: A.B.Pushnitski@lboro.ac.uk
Imperial College, University of London
e-mail: ruzh@ic.ac.uk

Поступило в редакцию
21 мая 2001 г.