Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Полиномиальные алгебры Ли, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 18–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:55:30

Полиномиальные алгебры Ли

© 2002. В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин

Введение

Настоящая работа посвящена теории и приложениям специального класса бесконечномерных алгебр Ли, которые представляют собой конечномерные модули над кольцом полиномов. Эти алгебры Ли мы называли *полиномиальными алгебрами Ли*. Они имеют каноническое (во многих важных случаях точное) представление в кольце линейных операторов на кольце полиномов. Показательный пример: рассмотрим трехмерный модуль L над $\mathbb{C}[x, y]$ с образующими $(1, \ell_1, \ell_2)$, где $\ell_1 = x^2\partial_x + y^2\partial_y$ и $\ell_2 = x^3\partial_x + y^3\partial_y$. Модуль L замкнут относительно операции коммутирования ($[\ell_2, \ell_1] = xy\ell_1 - (x+y)\ell_2$, $[\ell_1, x] = x^2, \dots$). В кольце всех линейных операторов на $\mathbb{C}[x, y]$ ему соответствует ассоциативная алгебра, порожденная операторами $\{1, x, y, \ell_1, \ell_2\}$.

Полиномиальные алгебры Ли естественно возникают в теории интегрируемых систем [12, 15], в теории особенностей [1] и в теории дублей алгебр Хопфа [2, 16, 18], которая включает теорию квантовых групп. В наших исследованиях по теории абелевых функций [4, 5] мы пришли к полиномиальным алгебрам Ли, решая задачу о структуре аннуляторного идеала σ -функции [6, 7]. Оказалось, что классический результат Вейерштрасса [19], описывающий эллиптическую сигма-функцию $\sigma(u, g_2, g_3)$ как степенной ряд по u , коэффициенты которого являются полиномами от параметров g_2 и g_3 эллиптической кривой $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$, сводится к построению представления образующих некоторой полиномиальной алгебры Ли в виде полиномиальных векторных полей, касающихся гиперповерхности $\Sigma = \{(u, g_2, g_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \sigma(u, g_2, g_3) = 0\}$. Задача об аннуляторном идеале σ -функций плоских алгебраических кривых, помимо непосредственного значения для теории абелевых функций, важна в современных исследованиях в квантовой теории [9, 10, 13]. Причина этого лежит в том, что τ -функции интегрируемых иерархий (например, КдФ) эволюционных уравнений, ограниченные на конечнозонные решения, выражаются через σ -функции соответствующих (например, гиперэллиптических) кривых.

В работе получен ряд классификационных результатов о структуре полиномиальных алгебр Ли. Ключом к ним является следующее утверждение (см. теорему 2.4): *полиномиальные векторные поля $L_k = \sum_q v_{k,q}\partial_q$, задающие каноническое представление данной полиномиальной алгебры Ли, касаются гиперповерхности $\det\{v_{k,q}\} = 0$* . Этот результат открыл глубокую связь полиномиальных алгебр Ли с теорией особенностей [1, 8, 14, 17, 20]. (В показательном примере $\Delta = \det\{v_{k,q}\} = -x^2y^2(x-y)$, $\ell_1(\Delta) = 3(x+y)\Delta$ и $\ell_2(\Delta) = (3(x+y)^2 - 5xy)\Delta$.)

В §1 дано определение полиномиальной алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ с полиномиальными структурными данными $C = \{c_{i,j}^k(\lambda)\}$ и $V = \{v_{i,q}(\lambda)\}$. Эти данные выдерживают масштабное преобразование $(C(\lambda), V(\lambda)) \mapsto (\beta C(\alpha\lambda), \frac{\beta}{\alpha} V(\alpha\lambda))$,

с помощью которого получены пределы с $C = \text{const}$ полиномиальных алгебр Ли в классе полиномиальных алгебр Ли. В §2 получено необходимое условие на невырожденную матрицу $V(\lambda)$ для того, чтобы существовала полиномиальная алгебра Ли $\mathfrak{a}(C(V), V)$; при этом $c_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k - \Gamma_{i,j}^k$, где $\Gamma_{i,j}^k$ — символы Кристоффеля связности без кручения неголономного подвижного репера, заданного матрицей $V(\lambda)$. (В показательном примере $\{\Gamma_{i,1}^k\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3xy \\ 3(x+y)^2 \end{pmatrix}$ и $\{\Gamma_{i,2}^k\} = \begin{pmatrix} -2xy & 2(x+y) \\ -3xy(x+y) & 3(x^2+xy+y^2) \end{pmatrix}$.) В §3 даны основные конструкции теории преобразований полиномиальных алгебр Ли. Показано, что если невырожденная матрица $V(\lambda)$ удовлетворяет упомянутому необходимому условию, то матрица $\det(V(\lambda))V(\lambda)$ задает полиномиальную алгебру Ли. §4 посвящен построению градуированных полиномиальных алгебр Ли с помощью производящих функций. Получено полное описание полиномиальных алгебр Ли, которые играют важную роль в теории гиперэллиптических абелевых функций и в теории особенностей (особенности типа A_μ). В §5 построен оператор симметризации и задаваемая им структура ассоциативной коалгебры на кольцах вида $k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$. В §6 в терминах структурных полиномов коумножения в этой коалгебре получено явное выражение матриц сворачивания инвариантов изолированных особенностей функций.

Авторы выражают благодарность В. М. Закалюкину, С. К. Ландо, С. П. Новикову и А. Н. Тюрину за полезные и стимулирующие обсуждения при подготовке этой работы к публикации.

§1. Определение и примеры

Пусть P — кольцо полиномов от переменных $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ над основным полем $\mathbb{C}$. Обозначим через L_P свободный левый P -модуль с образующими $\{1, \ell_0, \dots, \ell_n\}$. Элементы $p(\lambda) \cdot 1$, где $p(\lambda) \in P$, будем для краткости записывать как $p(\lambda)$.

Зададим кососимметрическую операцию $[\cdot, \cdot]$ на образующих $\ell_0, \dots, \ell_n$ и $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ с помощью структурных полиномов $v_{i,q}(\lambda)$ и $c_{i,j}^k(\lambda)$ из P :

$$[\ell_i, \ell_j] = \sum_{k=0}^n c_{i,j}^k(\lambda) \ell_k, \quad [\ell_i, \lambda_q] = v_{i,q}(\lambda), \quad [\lambda_q, \lambda_r] = 0.$$

Кососимметричность операции $[\cdot, \cdot]$ приводит только к условию $c_{i,j}^k(\lambda) = -c_{j,i}^k(\lambda)$. Используя тот факт, что $[\ell_i, \lambda_q] \in P$, распространим $[\cdot, \cdot]$ на все L_P по правилу Лейбница. В частности, для $p(\lambda) \in P$ получим $[\ell_i, p(\lambda)] = \sum_{q=0}^n v_{i,q} \frac{\partial}{\partial \lambda_q} p(\lambda)$.

Потребуем, чтобы операция $[\cdot, \cdot]$ удовлетворяла тождеству Якоби. Получаем

$$\sum_{q=0}^n v_{i,q} \frac{\partial c_{j,k}^m}{\partial \lambda_q} + v_{k,q} \frac{\partial c_{i,j}^m}{\partial \lambda_q} + v_{j,q} \frac{\partial c_{k,i}^m}{\partial \lambda_q} + c_{j,k}^q c_{i,q}^m + c_{i,j}^q c_{k,q}^m + c_{k,i}^q c_{j,q}^m = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum_{q=0}^n c_{i,j}^q v_{q,k} + v_{j,q} \frac{\partial v_{i,k}}{\partial \lambda_q} - v_{i,q} \frac{\partial v_{j,k}}{\partial \lambda_q} = 0. \quad (1.2)$$

При выполнении всех указанных условий мы получаем на L_P структуру алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$, где $C = \{c_{i,j}^k(\lambda)\}$ и $V = \{v_{i,q}(\lambda)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ будем называть *полиномиальными*.

В тексте мы будем использовать сокращение «п. алгебра Ли».

Решение $(C(\lambda), V(\lambda))$ системы уравнений (1.1)–(1.2) выдерживает масштабное преобразование $(C(\lambda), V(\lambda)) \mapsto (\beta C(\alpha\lambda), \frac{\beta}{\alpha} V(\alpha\lambda))$. Используем этот факт, чтобы выяснить, какие п. алгебры Ли отвечают постоянным частям $C(0)$ и $V(0)$ структурных полиномов. Необходимо рассмотреть два случая.

(1) Пусть $V(0) = 0$. Существует предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} V(\alpha\lambda)$, который равен либо нулевой матрице, либо линейной по λ матрице $V^{(1)}(\lambda)$. Положив $\beta = 1$, приходим либо к п. алгебре Ли $\mathfrak{a}(C(0), 0)$, либо к $\mathfrak{a}(C(0), V^{(1)}(\lambda))$.

(2) Пусть $V(0) \neq 0$; положим $\beta = \alpha$ и перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$. Получаем п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(0, V(0))$.

ПРИМЕР 1.2. Полиномы $v_{i,q}(\lambda)$ нулевые, а $c_{i,j}^k(\lambda)$ постоянные. Алгебра Ли $\mathfrak{a}(C, 0_{n+1})$ содержит $(n+1)$ -мерную алгебру Ли над кольцом $\mathbb{C}$ с образующими $\{\ell_j\}_{j=0,\dots,n}$.

ЛЕММА 1.3. Если $\{v_{i,q}(0)\} = 0$, то $\{c_{i,j}^k(0)\}$ являются структурными константами некоторой алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с образующими, скажем, $\ell_0^0, \dots, \ell_n^0$. Отображение $\ell_i \mapsto \ell_i^0$, $\lambda \mapsto 0$ задает гомоморфизм алгебр Ли.

ПРИМЕР 1.4. Полиномы $v_{i,q}(\lambda)$ постоянные, а $c_{i,j}^k(\lambda)$ нулевые. Произвольная матрица $V \in \text{Mat}(n+1, \mathbb{C})$ удовлетворяет системе уравнений (1.2). Наиболее важный пример такой п. алгебры Ли — это алгебра Ли $\mathfrak{a}(0, 1_{n+1})$, которая содержит $(2n+2)$ -мерную алгебру Гейзенберга, задаваемую следующими коммутационными соотношениями:

$$[\ell_i, \ell_j] = 0, \quad [\ell_i, \lambda_q] = \delta_{i,q}, \quad [\lambda_q, \lambda_r] = 0,$$

где $\delta_{i,q}$ — символ Кронекера. П. алгебра Ли $\mathfrak{a}(0, 1_{n+1})$ изоморфна канонической алгебре Ли $\mathcal{L}$ на свободном левом P -модуле с образующими $\{1, \partial_{\lambda_1}, \dots, \partial_{\lambda_n}\}$. Здесь и далее $\partial_{\lambda_i} = \partial/\partial\lambda_i$. Обозначим этот изоморфизм через ρ , так что $\rho(\ell_i) = \partial_{\lambda_i}$ и $\rho(p) = p$, $p \in P$.

ПРИМЕР 1.5. Если $c_{i,j}^k(\lambda)$ — постоянные полиномы, удовлетворяющие системе уравнений (1.1), то линейная по λ матрица $V(C) = \{v_{i,k} = \sum_{r=0}^n \lambda_r c_{i,q}^r\}$ задает решение системы (1.2). П. алгебра Ли $\mathfrak{a}(C, V(C))$ содержит $2(n+1)$ -мерную алгебру Ли, задаваемую следующими коммутационными соотношениями:

$$[\ell_i, \ell_j] = c_{i,j}^k \ell_k, \quad [\ell_i, \lambda_q] = \sum_{r=0}^n \lambda_r c_{i,q}^r, \quad [\lambda_q, \lambda_r] = 0.$$

Имеется представление $\rho : \mathfrak{a}(C, V(C)) \rightarrow \mathcal{L}$, $\rho(\ell_i) = \sum_q v_{i,q} \partial_{\lambda_q}$ и $\rho(p) = p$, $p \in P$.

ЛЕММА 1.6. Гомоморфизм P -модулей $\rho_V : L_P \rightarrow \mathcal{L}$, переводящий образующие ℓ_i в векторные поля L_i по формулам

$$\rho_V(\ell_j) = L_j = \sum_{q=0}^n v_{j,q}(\lambda) \partial_{\lambda_q}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

является гомоморфизмом алгебр Ли. Представление ρ_V п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ является точным тогда и только тогда, когда $\det V \neq 0$.

Обозначим через $\text{Der}(P)$ алгебру Ли дифференцирований кольца полиномов P .

СЛЕДСТВИЕ 1.7. *Данные (C, V) с постоянными $C = \{c_{i,j}^k\}$ задают п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ тогда и только тогда, когда*

(1) *структурные константы C задают структуру алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в $(n+1)$ -мерном пространстве с базисом $\ell_0, \dots, \ell_n$;*

(2) *матрица V задает представление $\gamma: \mathfrak{A} \rightarrow \text{Der}(P)$ по формулам $\gamma(\ell_j)\lambda_q = v_{j,q}$, $j, q = 0, \dots, n$.*

Обратим внимание, что универсальные обертывающие алгебры п. алгебр Ли $\mathfrak{a}(C, V)$, описанных в следствии 1.7 — это задаваемые милноровским действием [16] на кольце полиномов P операторные дубли алгебр Хопфа [2, 16, 18], мультипликативно порожденных примитивными элементами.

Приведем пример п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ с постоянными $c_{i,j}^k$ и нелинейными $v_{i,q}(\lambda)$.

ПРИМЕР 1.8. Данные (C, V) , где $C = \{c_{i,j}^k\}$ с ненулевыми $c_{i,j}^{i+j} = i - j$ при $i + j \leq n$ и $V = \{v_{i,q} = [\Lambda(t)^{i+2}]_{q-i}\}$, где $\Lambda(t) = 1 + \sum_{q=0}^n \lambda_q t^{q+1}$ и $[f(t)]_\alpha$ — коэффициент при t^α полинома $f(t)$, задают п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(C, V)$. Универсальные обертывающие алгебры таких п. алгебр Ли — это алгебры дифференциальных операторов на топологическом моноиде, определяемом правым регулярным представлением группы струй $J^{n+1}(1, 1)$ на кольце полиномов P (см. [3]). Для левого регулярного представления группы $J^{n+1}(1, 1)$ на кольце полиномов P получается п. алгебра Ли типа, описанного в примере 1.5.

§2. Невырожденные полиномиальные алгебры Ли

Положим $\Delta = \det V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Полиномиальные алгебры Ли $\mathfrak{a}(C, V)$ с $\Delta \neq 0$ будем называть *невырожденными*, сокращенно — «н.п. алгебры Ли».

Каждая н.п. алгебра Ли $\mathfrak{a}(C, V)$, согласно лемме 1.6, изоморфна алгебре Ли операторов на кольце полиномов P , порожденной операторами умножения на λ_i , $i = 0, \dots, n$, и полиномиальными векторными полями L_j , $j = 0, \dots, n$. При этом структурные полиномы $C = \{c_{i,j}^k(\lambda)\}$ в силу соотношений (1.2) однозначно определяются по матрице полиномов V , т.е. $C = C(V)$. Поэтому н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(C(V), V)$ естественно обозначать через $\mathfrak{a}(V)$.

Ввиду того, что в алгебре операторов решение $C(V)$ системы уравнений (1.2) автоматически удовлетворяет уравнениям (1.1), мы приходим к следующей задаче: *классифицировать матрицы $V(\lambda)$, для которых система уравнений (1.2) имеет полиномиальное решение $C(V)$.*

Заметим, что если $\Delta = \text{const} \neq 0$, то полиномиальное решение $C(V)$ заведомо существует. Это вытекает из следующего свойства системы (1.2): для любой матрицы $V(\lambda)$ с $\Delta \neq 0$ система (1.2) имеет решение $C(V)$ в кольце $P[t]/(t\Delta - 1)$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $V = \text{diag}(p_0, \dots, p_n)$, $p_i \in P$ и $p_0 \cdots p_n \neq \text{const}$. Из (1.2) получаем

$$c_{i,j}^k = \frac{1}{p_k} (\delta_{i,k} p_j \partial_{\lambda_j} p_i - \delta_{j,k} p_i \partial_{\lambda_i} p_j),$$

откуда легко следует, что, во-первых, ненулевые значения имеют только полиномы $c_{i,j}^j = -c_{j,i}^j$ и, во-вторых, $c_{i,j}^j$ принадлежат P тогда и только тогда, когда $p_i = \alpha_i q(\lambda)$, где $q \in P$, а $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\alpha_0 \cdots \alpha_n \neq 0$, и при этом $c_{i,j}^j = -\alpha_i \partial_{\lambda_i} q$.

Положим

$$c_i = \{c_{i,j}^k(V)\}, \quad j, k = 0, \dots, n, \quad v_i = (v_{i,0}, \dots, v_{i,n}), \quad \partial_\lambda = (\partial_{\lambda_0}, \dots, \partial_{\lambda_n})^t;$$

тогда

$$c_i = (V(\partial_\lambda v_i) - L_i(V))V^{-1}. \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $C(V) = \{c_{i,j}^k\}$ — решение системы (1.2) для некоторой матрицы V с $\Delta \neq 0$. Тогда

$$\sum_{k=0}^n c_{i,k}^k = -L_i(\log \Delta) + \sum_{q=0}^n \partial_{\lambda_q} v_{i,q}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. След матрицы c_i , согласно (2.1), выражается формулой (2.2). $\square$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть матрица V задает н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(V)$. Тогда

(1) $L_i(\Delta) = \phi_i \Delta$, где $\phi_i \in P$, $i = 0, \dots, n$;

(2) векторные поля L_i вдоль гиперповерхности $\Sigma = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Delta = 0\}$ касаются Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Перепишем равенства (2.2) в следующей форме:

$$L_i(\Delta) = \phi_i \Delta, \quad \text{где } \phi_i = \sum_{k=0}^n \partial_{\lambda_k} v_{i,k} - c_{i,k}^k, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.3)$$

В условиях теоремы функции ϕ_i принадлежат кольцу P .

(2) Операторы L_i , удовлетворяющие (2.2), задают дифференцирования локального кольца $P/(\Delta)$. $\square$

В случае $n = 1$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Невырожденная матрица $V = \begin{pmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} \end{pmatrix}$ над кольцом $P = \mathbb{C}[\lambda_0, \lambda_1]$ задает н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(V)$ тогда и только тогда, когда векторные поля $L_0 = v_{0,0}\partial_{\lambda_0} + v_{0,1}\partial_{\lambda_1}$ и $L_1 = v_{1,0}\partial_{\lambda_0} + v_{1,1}\partial_{\lambda_1}$ вдоль плоской кривой $\Sigma = \{(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{C}^2 \mid v_{0,0}v_{1,1} - v_{0,1}v_{1,0} = 0\}$ касаются Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ структуру п. алгебры Ли задают всего две структурные функции $c_{0,1}^0$ и $c_{0,1}^1$. Согласно формуле (2.2), имеем

$$c_{0,1}^0 = \frac{\partial v_{1,0}}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial v_{1,1}}{\partial \lambda_1} - L_1(\log \Delta), \quad c_{0,1}^1 = -\frac{\partial v_{0,0}}{\partial \lambda_0} - \frac{\partial v_{0,1}}{\partial \lambda_1} + L_0(\log \Delta). \quad (2.4)$$

Условие $L_i(\log \Delta) \in P$, являющееся условием касания, доказывает следствие. $\square$

ПРИМЕР 2.6. Пусть $V = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; тогда Σ — это множество нулей линейной функции $\Delta = \alpha\lambda_0 + \beta\lambda_1$. Векторные поля $L_0 = \lambda_0\partial_{\lambda_0} + \lambda_1\partial_{\lambda_1}$ и $L_1 = -\beta\partial_{\lambda_0} + \alpha\partial_{\lambda_1}$ касаются Σ , так как $L_0(\Delta) = \Delta$ и $L_1(\Delta) = 0$. Таким образом, V задает н.п. алгебру Ли. Из (2.4) получаем $c_{0,1}^0 = 0$ и $c_{0,1}^1 = 1$.

Следующий пример показывает, что при $n > 1$ необходимое условие $L_i(\log \Delta) \in P$ полиномиальности решения $C(V)$ системы (1.2) уже не является достаточным.

ПРИМЕР 2.7. Рассмотрим семейство матриц

$$V = \begin{pmatrix} v\lambda_0 & w\lambda_1 + x\lambda_0 & y\lambda_2 \\ w\lambda_1 + x\lambda_0 & z\lambda_2 & 0 \\ y\lambda_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -y^2 z \lambda_2^3, \quad (v, w, x, y, z) \in \mathbb{C}^5.$$

Наложим условия $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Имеем

$$L_0(\Delta) = 3y\Delta, \quad L_1(\Delta) = 0, \quad L_2(\Delta) = 0. \quad (2.5)$$

Решая систему уравнений (1.2), получаем

$$\begin{aligned} c_{0,1}^1 &= y - w - \frac{x(x\lambda_0 + w\lambda_1)}{z\lambda_2}, \\ c_{0,1}^2 &= \frac{x(x\lambda_0 + w\lambda_1)^2}{yz\lambda_2^2} + \frac{(2w - y)(x\lambda_0 + w\lambda_1) - vw\lambda_1}{y\lambda_2}, \\ c_{0,2}^1 &= -\frac{xy}{z}, \quad c_{0,2}^2 = y - v + \frac{x(x\lambda_0 + w\lambda_1)}{z\lambda_2}, \quad c_{1,2}^2 = -x; \end{aligned}$$

значения прочих $c_{i,j}^k$ при $i < j$ нулевые. Ввиду (2.5) из леммы 2.3 вытекает, что $\sum_k c_{i,k}^k$ лежит в P , хотя отдельные слагаемые в этой сумме не являются полиномами. При значениях параметров $x = 0$, $v = 2w - y$ и $x = 0$, $w = 0$ матрицы V задают н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$.

Полезными являются хорошо известные из классической дифференциальной геометрии (см., например, [11, ч. 1, §30, задача 5]) соотношения

$$c_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k - \Gamma_{i,j}^k \quad \text{и} \quad \Gamma_{i,j}^k = -\frac{1}{2}(c_{i,j}^k + g^{k,r} g_{i,q} c_{j,r}^q + g^{k,r} g_{j,q} c_{i,r}^q), \quad (2.6)$$

где $\Gamma_{i,j}^k$ — символы Кристоффеля связности без кручения неголономного подвижного репера $\{L_0, \dots, L_n\}$, согласованной с метрикой $g_{i,j} = \sum_{q=0}^n v_{i,q} v_{q,j}$. В формуле (2.6) $\{g^{k,r}\}$ — матрица, обратная к $\{g_{i,j}\}$, и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Положим $\Gamma_i = \{\Gamma_{j,i}^k\}$, $j, k = 0, \dots, n$. По определению символов Кристоффеля имеем

$$L_i(V) = \Gamma_i V. \quad (2.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть символы Кристоффеля $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{i,j}^k(V)$, соответствующие реперу $\{L_0, \dots, L_n\}$, полиномиальны. Тогда матрица V задает н.п. алгебру Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(V)$ будем называть *строго полиномиальной*, если символы Кристоффеля $\Gamma_{i,j}^k(V)$ полиномиальны.

ПРИМЕР 2.10. Пусть $V = \{v_{i,q} = \lambda_q^{i+1}\}$, $i, q = 0, \dots, n$. Зададим полиномы $e_1, \dots, e_{n+1}$ равенством $t^{n+1} - \sum_{k=0}^n e_k t^{n+1-k} = \prod_{q=0}^n (t - \lambda_q)$ и положим $Q = \{q_{i,j} = \delta_{i+1,j} + e_{n+1-j} \delta_{i,n}\}$, $i, j = 0, \dots, n$; тогда $\Gamma_k = \text{diag}(1, \dots, n+1) Q^k$,

$k = 0, \dots, n$. Таким образом, для всех положительных n алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$ строго полиномиальны. В частности, при $n = 2$ имеем

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3e_3 & 3e_2 & 3e_1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2e_3 & 2e_2 & 2e_1 \\ 3e_3e_1 & 3(e_3 + e_1e_2) & 3(e_1^2 + e_2) \end{pmatrix}.$$

§ 3. Преобразования полиномиальных алгебр Ли

Пусть $X = \{x_{i,j}(\lambda)\}$ — невырожденная матрица. Изучим преобразование $V \mapsto XV$. Для элементов структуры н.п. алгебр Ли — векторных полей, структурных полиномов и т. п. — будем явно указывать зависимость от задающей их матрицы, например, $L_j(XV)(\cdot)$ и $c_{i,j}^k(XV)$ для $\mathfrak{a}(XV)$.

ЛЕММА 3.1. (1) Структурные полиномы н.п. алгебр Ли $\mathfrak{a}(V)$ и $\mathfrak{a}(XV)$ связаны соотношениями

$$\sum_m c_{i,j}^m(XV)x_{m,k} - (L_j(XV)(x_{i,k}) - L_i(XV)(x_{j,k})) = \sum_{q,s} x_{i,q}x_{j,s}c_{q,s}^k(V). \quad (3.1)$$

(2) Пусть X — полиномиальная матрица и $\det X = \text{const} \neq 0$; тогда для каждой н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$ определена н.п. алгебра Ли $\mathfrak{a}(XV)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Будем говорить, что матрица X задает левое преобразование н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$, если матрица XV полиномиальна и система уравнений (3.1) относительно $\{c_{i,j}^m(XV)\}$ имеет полиномиальное решение.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть невырожденная матрица V такова, что

$$L_i(\log \Delta) = \varphi_i \in P \quad \text{для всех } i = 0, \dots, n;$$

тогда матрица ΔV задает н.п. алгебру Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X = \{x_{i,k} = \Delta\delta_{i,k}\}$, и пусть $\{a_{i,j}\} = \Delta V^{-1}$ — присоединенная матрица матрицы V . Возьмем в формуле (3.1) в качестве $\{c_{i,j}^k(V)\}$ решение системы (1.2). Как видно из (2.1), функции $\Delta c_{i,j}^k(V)$ — полиномы. Поскольку $L_i(XV)(\cdot) = \Delta L_i(V)(\cdot)$, то из условий теоремы получаем полиномы

$$c_{i,j}^k(\Delta V) = \Delta\varphi_j\delta_{i,k} - \Delta\varphi_i\delta_{j,k} + \sum_{q,r=0}^n a_{r,k}(v_{i,q}\partial_{\lambda_q}v_{j,r} - v_{j,q}\partial_{\lambda_q}v_{i,r}). \quad \square$$

Таким образом, для данной невырожденной полиномиальной матрицы V условие полиномиальности всех функций $L_i(\log \Delta)$ является необходимым для существования н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$ и достаточным для существования н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(\Delta V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Скажем, что н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V_1)$ и $\mathfrak{a}(V_2)$ левом-эквивалентны, если существует полиномиальная матрица X , такая, что $\det X = \text{const}$ и $V_2 = XV_1$. Группу невырожденных полиномиальных матриц X с $\det X = \text{const}$ будем называть группой левых эквивалентностей н.п. алгебр Ли.

Все н.п. алгебры Ли, задаваемые матрицами V с $\det V = \text{const}$, лево-эквивалентны н.п. алгебре Ли $\mathfrak{a}(1_{n+1})$; см. пример 1.4.

Символы Кристоффеля реперов, заданных матрицами V и XV , связаны формулой

$$\Gamma_i(XV) = L_i(XV)(X)X^{-1} + \sum_k x_{i,k}X\Gamma_k(V)X^{-1}, \quad (3.2)$$

которая прямо следует из (2.7). Таким образом, группа левых эквивалентностей действует на множестве строго полиномиальных алгебр Ли.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть н.п. алгебра Ли $\mathfrak{a}(V)$ не является строго полиномиальной. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{a}(\Delta V)$ строго полиномиальна.

Изучим теперь преобразования п. алгебр Ли, к которым приводят полиномиальные отображения $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$. Обозначим через J_f матрицу Якоби $J_f(z) = \partial(f_0, \dots, f_n)/\partial(z_0, \dots, z_n)$ отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Полиномиальное отображение f будем называть *согласованным* с полиномиальной матрицей V , если матрица $V(f(z))J_f(z)^{-1}$ полиномиальна.

ЛЕММА 3.7. Пусть $\mathfrak{a}(V(\lambda))$ — н.п. алгебра Ли со структурными полиномами $c_{i,j}^k(\lambda)$ и f — некоторое согласованное с V отображение. Тогда матрица $W(z) = V(f(z))J_f(z)^{-1}$ задает н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(W(z))$ со структурными полиномами $c_{i,j}^k(f(z))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Скажем, что н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V_1(\lambda))$ и $\mathfrak{a}(V_2(z))$ *право-эквивалентны*, если существует полиномиальное отображение $z \mapsto f(z)$ с матрицей Якоби $J_f(z)$, такое, что $\det J_f(z) = \text{const}$ и $V_1(f(z)) = V_2(z)J_f(z)$. Группу невырожденных полиномиальных отображений f с $\det J_f(z) = \text{const}$ будем называть группой *правых эквивалентностей* н.п. алгебр Ли.

Все н.п. алгебры Ли, задаваемые матрицами $V = J_f(z)^t$ с $\det V = \text{const}$, право-эквивалентны алгебре Ли $\mathfrak{a}(1_{n+1})$.

Приведем правило преобразования символов Кристоффеля, к которым приводят отображения $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$:

$$\Gamma_{i,j}^k(W(z)) = \Gamma_{i,j}^k(V(f(z))) + v_{i,r}v_{j,q}j^{q,p}(\partial_{z_p}j^{r,m})j_{m,s}v^{s,k},$$

где $W(z) = V(f(z))J_f(z)^{-1}$, $v_{i,q} = v_{i,q}(f(z))$, $V(f(z))^{-1} = \{v^{i,q}\}$, $J_f = \{j_{q,r}\}$, $J_f^{-1} = \{j^{q,r}\}$ и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Таким образом, группа правых эквивалентностей действует на множестве строго полиномиальных алгебр Ли.

ПРИМЕР 3.9. Матрица

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 2\lambda_1 & 3\lambda_2 \\ 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & \frac{1}{6}(\lambda_0^4 - 12\lambda_0^2\lambda_1 + 12\lambda_1^2 + 24\lambda_0\lambda_2) \\ 3\lambda_2 & \frac{1}{6}(\lambda_0^4 - 12\lambda_0^2\lambda_1 + 12\lambda_1^2 + 24\lambda_0\lambda_2) & \frac{1}{6}(\lambda_0^5 - 10\lambda_0^3\lambda_1 + 15\lambda_0^2\lambda_2 + 30\lambda_1\lambda_2) \end{pmatrix},$$

задает н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(V)$ со структурными полиномами (приводим только нетривиальные)

$$c_{0,1}^1 = 1, \quad c_{0,2}^2 = 2, \quad c_{1,2}^0 = \lambda_2 - \lambda_1\lambda_0 + \frac{1}{6}\lambda_0^3, \quad c_{1,2}^1 = \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_0^2, \quad c_{1,2}^2 = \lambda_0.$$

Нетрудно проверить, что символы Кристоффеля $\Gamma_{i,j}^k(V)$ не полиномиальны. Рассмотрим отображение, задающее λ в виде симметрических полиномов,

$$\lambda = f(z_0, z_1, z_2) = (z_0 + z_1 + z_2, \frac{1}{2}(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2), \frac{1}{3}(z_0^3 + z_1^3 + z_2^3)).$$

Отображение f согласовано с матрицей V , так как матрица $W(z) = V(f(z))J_f^{-1}$ полиномиальна. Точный ее вид $W = \{z_q^{i+1}\}$, $i, q = 0, 1, 2$. Из примера 2.10 следует, что алгебра Ли $\mathfrak{a}(W)$ строго полиномиальна.

В примере 3.9 мы встретились с набором потенциальных векторных полей. Поставим задачу описать полиномиальные отображения f , задающие н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(J_f(z)^t)$. В этой связи важным является следующее понятие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Скажем, что полиномиальное отображение $\varphi: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ согласовано с отображением f , если существует такая полиномиальная матрица V , что $J_f(z)^t J_\varphi(z) = V(\varphi(z))$.

ЛЕММА 3.11. Пусть полиномиальное отображение f задает н.п. алгебру Ли $\mathfrak{a}(J_f(z)^t)$ со структурными полиномами $c_{i,j}^k(z)$ и φ — согласованное с f отображение. Тогда

- (1) существуют такие полиномы $\chi_{i,j}^k$, что $c_{i,j}^k(z) = \chi_{i,j}^k(\varphi(z))$;
- (2) полиномы $\chi_{i,j}^k$ являются структурными полиномами н.п. алгебры Ли $\mathfrak{a}(V)$, где $V(\varphi(z)) = J_f(z)^t J_\varphi(z)$.

ПРИМЕР 3.12. Обозначим через $\Lambda(z)$ кольцо симметрических полиномов от переменных $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$. Положим, как обычно, $p_i = \sum_{k=0}^n z_k^i$, и пусть $p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. Хорошо известно, что $\Lambda(z) = \mathbb{C}[p]$. Обозначим через A отображение, заданное формулой $A(z) = (p_i/i)$, $i = 1, \dots, n+1$. Матрица Якоби $J_A(z)$ — это матрица Вандермонда со строками $(1, z_i, \dots, z_i^n)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Следующий важный факт проверяется непосредственно.

ЛЕММА 3.13. Матрица $J_A(z)^t$ задает структуру н.п. алгебры Ли с постоянными структурными полиномами $c_{i,j}^k(J_A(z)^t) = (j-i)\delta_{i+j,k}$.

Пусть $S: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ — отображение, действующее по формуле $S(z) = (s_0(z), \dots, s_n(z))$, где $\{s_i(z)\}$ — некоторый набор алгебраически независимых симметрических полиномов от z . Согласно классической теории симметрических полиномов, отображение S разлагается в композицию отображения A и однозначно определенного полиномиального отображения B_S .

ТЕОРЕМА 3.14. (1) Отображение A согласовано с S .

(2) Функции $c_{i,j}^k(z)$, удовлетворяющие системе уравнений (1.2) для $V(z) = J_S(z)^t$, являются симметрическими функциями от z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Имеем $S = B_S \circ A$; тогда $V(z) = X^t(p(z))J_A(z)^t$, где $X(p) = \{x_{i,k}\}$ — матрица Якоби отображения B_S , элементы которой являются полиномами от p . Пусть $Q = J_A(z)^t J_A(z)$. Имеем $Q = \{q_{i,j} = p_{i+j}\}$, $i, j = 0, \dots, n$, и, поскольку p_j при $j > n+1$ выражаются через p полиномиально, окончательно получаем $V(z)J_A(z) = X(p)Q(p)$, что и требовалось.

(2) Для вычисления $c_{i,j}^k(z)$ применим формулу (3.1). Имеем

$$\sum_m c_{i,j}^m(z) x_{m,k} - (L_j(x_{i,k}) - L_i(x_{i,k})) - \sum_{q+r=k} (r-q) x_{i,q} x_{j,r} = 0.$$

Для завершения доказательства заметим, что так как $s_k(z) \in \Lambda(z)$, то дифференциальные операторы $L_k = \sum_q (\partial_{z_q} s_k(z)) \partial_{z_q}$ являются дифференцированиями кольца $\Lambda(z)$. $\square$

§ 4. Градуированные полиномиальные алгебры Ли

Положим $\ell(x) = \sum_{k \geq 0} x^k \ell_k$ и $\lambda(x) = 1 + \sum_{q \geq 1} \lambda_q x^q$; тогда

$$[\ell(x), \ell(y)] = \sum_{i,j,k \geq 0} x^i y^j c_{i,j}^k(\lambda) \ell_k \quad \text{и} \quad [\lambda(x), \ell(y)] = - \sum_{q,p \geq 0} v_{p,q}(\lambda) x^q y^p.$$

С целью исследовать п. алгебры Ли, структурные полиномы $c_{i,j}^k$, которых не более чем линейны по $\{\lambda_q\}$, а $v_{p,q}$ — не выше второй степени, положим

$$\sum_{i,j,k \geq 0} x^i y^j c_{i,j}^k(\lambda) \ell_k = 2R_{x,y}(\lambda(y)\ell(x)) \quad \text{и} \quad \sum_{q,p \geq 0} v_{p,q}(\lambda) x^q y^p = -S_{x,y}(\lambda(y)\lambda(x)), \quad (4.1)$$

где $R_{x,y}$ — линейный кососимметрический оператор на $\mathbb{C}[x,y]$, т.е. $R_{x,y}(f(x,y)) = -R_{y,x}(f(y,x))$, и $S_{x,y}$ — линейный оператор на $\mathbb{C}[x,y]$, аннулирующий кососимметрические полиномы от x и y . Операторы $R_{x,y}$ и $S_{x,y}$ имеют естественное продолжение на $L_P[x,y]$, так что элементы $\{\ell_k\}$ и полиномы от $\{\lambda_q\}$ играют для них роль констант.

Тождества Якоби (1.1)–(1.2) в терминах (4.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \{1 + T_{x,y,z} + T_{x,y,z}^2\}(R_{x,y}(2R_{x,z} + S_{y,z})(\lambda(z)\lambda(y)\ell(x))) &= 0, \\ \{2R_{x,y}S_{z,x} - S_{z,x}(S_{x,y} + S_{z,y}) + S_{z,y}(S_{y,x} + S_{z,x})\}(\lambda(z)\lambda(y)\lambda(x)) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $T_{x,y,z}$ — оператор циклической перестановки, $T_{x,y,z}(F(x,y,z)) = F(z,x,y)$.

Пусть даны пары операторов $(R_{x,y}^{(1)}, S_{x,y}^{(1)})$ и $(R_{x,y}^{(2)}, S_{x,y}^{(2)})$, каждая из которых удовлетворяет тождествам (4.2). Будем называть пары $(R_{x,y}^{(1)}, S_{x,y}^{(1)})$ и $(R_{x,y}^{(2)}, S_{x,y}^{(2)})$ *совместимыми*, если их сумма $(R_{x,y}^{(1)} + R_{x,y}^{(2)}, S_{x,y}^{(1)} + S_{x,y}^{(2)})$ также удовлетворяет (4.2).

Лемма 4.1. *Пары $(R_{x,y}^{(1)}, S_{x,y}^{(1)})$ и $(R_{x,y}^{(2)}, S_{x,y}^{(2)})$ совместимы тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \{1 + T_{x,y,z} + T_{x,y,z}^2\}(\{R_{x,y}^{(1)}(2R_{x,z}^{(2)} + S_{y,z}^{(2)}) + R_{x,y}^{(2)}(2R_{x,z}^{(1)} + S_{y,z}^{(1)})\}(\lambda(z)\lambda(y)\ell(x))) &= 0, \\ \{2R_{x,y}^{(1)}S_{z,x}^{(2)} + 2R_{x,y}^{(2)}S_{z,x}^{(1)} - S_{z,x}^{(2)}(S_{x,y}^{(1)} + S_{z,y}^{(1)}) - S_{z,x}^{(1)}(S_{x,y}^{(2)} + S_{z,y}^{(2)}) \\ + S_{z,y}^{(2)}(S_{y,x}^{(1)} + S_{z,x}^{(1)}) + S_{z,y}^{(1)}(S_{y,x}^{(2)} + S_{z,x}^{(2)})\}(\lambda(z)\lambda(y)\lambda(x)) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти тождества представляют собой аналог обращения в нуль скобки Схоутена двух кососимметрических контравариантных тензоров ранга 2, задающих совместимые скобки Пуассона [12, 15].

ТЕОРЕМА 4.2. *Пары*

$$\begin{aligned} R_{x,y}^{(1)}(\cdot) &= \tau_{x,y}^- \circ (\partial_x - \partial_y) \circ \frac{x^2}{x-y}(\cdot), & R_{x,y}^{(2)}(\cdot) &= \tau_{x,y}^- \circ \partial_{x,y} \circ x^2(\cdot), \\ S_{x,y}^{(1)}(\cdot) &= \frac{x^2}{x-y} \circ (\partial_x - \partial_y) \circ \tau_{x,y}^+(\cdot), & S_{x,y}^{(2)}(\cdot) &= x^2 \circ \partial_{x,y} \circ \tau_{x,y}^+(\cdot), \end{aligned}$$

где $\tau_{x,y}^{\pm}$ — оператор (анти)симметризации, $\tau_{x,y}^{\pm}(F(x,y)) = (F(x,y) \pm F(y,x))/2$, удовлетворяют тождествам (4.3) и, по отдельности, тождествам (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно выполнить вычисления, согласно (4.2) и (4.3), считая $\lambda(x)$, $\ell(x)$ и т. д. символами функций, т. е. не расписывая их в виде рядов. $\square$

Получено семейство п. алгебр Ли $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}(c(x,y,z), v(x,y))$, структурные полиномы которого заданы производящими функциями:

$$c(x,y,z) = \sum_{i,j,k \geq 0} c_{i,j}^k(\lambda) x^i y^j z^k = \alpha (\partial_x - \partial_y) \left(\frac{\psi(x,y,z;\lambda)}{(x-y)} \right) + \beta \partial_{x,y}(\psi(x,y,z;\lambda)),$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x,y,z;\lambda) &= \frac{x^2(1-yz)\lambda(y) - y^2(1-xz)\lambda(x)}{(1-xz)(1-yz)}, \\ v(x,y) &= \sum_{p,q \geq 0} v_{p,q}(\lambda) x^q y^p = \alpha x^2 \frac{\lambda(x)\lambda'(y) - \lambda'(x)\lambda(y)}{x-y} - \beta x^2 \lambda'(x)\lambda'(y). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что $v_{p,0} = 0$ и $v_{p,1} = 0$ для всех $p \geq 0$, т. е. $[\ell(x), 1] = 0$, что естественно, и, кроме того, $[\ell(x), \lambda_1] = 0$. Таким образом, $\mathbb{C}[\lambda_1]$ принадлежит центру п. алгебры Ли $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}(c,v)$.

Положим $\deg x = \deg y = -2$ и $\deg(xz) = 0$; тогда из условий $\deg \ell(x) = 0$ и $\deg \lambda(x) = 0$ получаем $\deg \ell_i = \deg \lambda_i = 2i$. Согласно (4.4), имеем $\deg c(x,y,z) = \deg v(x,y) = 0$ и, следовательно, $\deg c_{i,j}^k = 2(i+j-k)$ и $\deg v_{p,q} = 2(p+q)$. Относительно такой градуировки п. алгебра Ли $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}(c,v)$ является градуированной.

Рассмотрим факторалгебру Ли $\mathfrak{a}_{n+1}(c,v)$ градуированной п. алгебры Ли $\mathfrak{a}_{\alpha,\beta}(c,v)$ по модулю соотношений $\{\ell_j = 0 \mid j > n\}$.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для того чтобы существовала градуированная п. алгебра Ли $\mathfrak{a}_{n+1}(c,v)$, необходимо и достаточно выполнение условий $\beta(n+2) - \alpha = 0$ и $\lambda_q = 0$ при $q > n+2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется проверить, что коммутационные соотношения, вытекающие из (4.4), согласованы с условием усечения $\ell_j = 0$ при $j > n$. Учитывая, что оператор $R_{x,y}$ сохраняет градуировку, необходимо и достаточно проверить, что $R_{x,y}(x^i y^j) = 0$ при $i+j > n$. $\square$

§5. Структура ассоциативной коалгебры на кольцах $k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Положим $[x]_j^0 = x$. Обозначим через $[x]_j^r$ вектор с координатами $\{x_m\}$ при $j+r < m \leq j+n$ и координатами x'_m при $j < m \leq j+r$, где индексы циклические по $\text{mod } n$. Положим

$$S_i(f(x)) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f([x]_i^r)$$

и зададим операции $\delta_i: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x, x']$ формулой

$$\delta_i f(x) = \frac{S_i(f(x)) - S_i(f([x]_{i-1}^1))}{x_i - x'_i}.$$

Сопоставим каждому набору полиномов $\mathfrak{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ матрицу $\Phi(\mathfrak{f})(x, x') = \{\varphi_{i,j}(x, x')\}$, где $\varphi_{i,j}(x, x') = \delta_i(f_j(x))$. Положим $H(\mathfrak{f})(x, x') = \det \Phi(\mathfrak{f})(x, x')$.

ЛЕММА 5.1. (1) Полином $H(\mathfrak{f})(x, x')$ симметричен, т.е. $H(\mathfrak{f})(x, x') = H(\mathfrak{f})(x', x)$.

(2) Для любого полинома $F(x, x')$ имеем

$$H(\mathfrak{f})(x, x')(F(x, x') - F(x', x)) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}(x), \mathfrak{f}(x')}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Следует из определения.

(2) Ввиду разложения $F(x, x') - F(x', x) = \sum (x_i - x'_i)\phi_i(x, x')$, $\phi_i(x, x') \in \mathbb{C}[x, x']$, достаточно доказать лемму для $F(x, x') = x_1$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{i,j}(x, x')(x_i - x'_i) = f_j(x) - f_j(x').$$

Таким образом, первую строку в матрице $\Phi(\mathfrak{f})(x, x')$ можно заменить строкой $\{(f_j(x) - f_j(x'))/(x_1 - x'_1)\}$. Раскладывая определитель $H(\mathfrak{f})(x, x')(x_1 - x'_1)$ по первой строке, получаем $\sum_j H_{1,j}(f_j(x) - f_j(x'))$. $\square$

ПРИМЕР 5.2. Пусть $n = 1$; тогда $\mathfrak{f}(x) = f(x)$ и $H(f)(x, x') = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$.

Пусть $n = 2$; тогда $\mathfrak{f}(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ и

$$H(f_1, f_2) = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{cc} \frac{f_1(x_1, x_2) - f_1(x'_1, x_2)}{x_1 - x'_1} + \frac{f_1(x_1, x'_2) - f_1(x'_1, x'_2)}{x_1 - x'_1} & \frac{f_2(x_1, x_2) - f_2(x'_1, x_2)}{x_1 - x'_1} + \frac{f_2(x_1, x'_2) - f_2(x'_1, x'_2)}{x_1 - x'_1} \\ \frac{f_1(x_1, x_2) - f_1(x_1, x'_2)}{x_2 - x'_2} + \frac{f_1(x'_1, x_2) - f_1(x'_1, x'_2)}{x_2 - x'_2} & \frac{f_2(x_1, x_2) - f_2(x_1, x'_2)}{x_2 - x'_2} + \frac{f_2(x'_1, x_2) - f_2(x'_1, x'_2)}{x_2 - x'_2} \end{array} \right|.$$

Рассмотрим кольцо $A = k[x_1, \dots, x_n]/(\mathfrak{f})$, где k — коммутативное кольцо с единицей.

ТЕОРЕМА 5.3. k -линейное отображение $D: A \rightarrow A \otimes_k A$, действующее по формуле $D_x^{x'}(q(x)) = q(x)H(\mathfrak{f})(x, x')$, задает в A структуру ассоциативной коммутативной коалгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутативность вытекает из леммы 5.1. Ассоциативность проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} (D_{x''}^{x'} D_x^{x'} - D_x^{x'} D_{x''}^{x'})q(x) \\ = q(x)H(\mathfrak{f})(x, x')\{H(\mathfrak{f})(x', x'') - H(\mathfrak{f})(x, x'')\} = 0 \pmod{\mathfrak{f}(x), \mathfrak{f}(x'), \mathfrak{f}(x'')} \end{aligned} \quad \square$$

ПРИМЕР 5.4. Пусть $A = \mathbb{C}[x]/(x^3)$. Выберем в A базис $(1, x, x^2)$.

Имеем $D(1) = x^2 + xx' + x'^2$, $D(x) = x^2x' + xx'^2$, $D(x^2) = x^2x'^2$.

Как показывает этот пример, в построенных выше коалгебрах нет коединицы.

§6. Матрицы сворачивания

Богатый запас полиномиальных матриц $V(\lambda) = \{v_{i,j}(\lambda)\}$, для которых векторные поля $L_i = \sum_k v_{i,k} \partial_{\lambda_k}$ касаются гиперповерхности $\Sigma = \{\lambda \mid \det V(\lambda) = 0\}$, дает теория особенностей. Это так называемые *матрицы сворачивания* инвариантов [1].

Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — росток голоморфной функции с изолированной особенностью в $x = 0$ и числом Милнора μ . Обозначим через $\mathcal{E} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \partial_i$

оператор Эйлера, такой, что $\mathcal{E}(f(x)) = 0$. Пусть $Q = \mathbb{C}[x]/(\nabla_x f(x))$ — локальное кольцо особенности $f(x)$ и $e(x) = \{e_{i_k}(x)\}$, $k = 1, \dots, \mu$, — мономиальный базис кольца Q , занумерованный в порядке убывания весов, заданных оператором Эйлера. Веса принимают значения в $I = \{i_1, \dots, i_\mu = 0\}$. Положим $d = \deg f(x)$; тогда $F(x) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_{d-i} e_i$ — миниверсальная деформация особенности $f(x)$.

Каждой особенности $f(x)$ соответствует группа отражений G_f , действующая на пространстве $\mathbb{C}^\mu$. Отображение Виета $\mathcal{V}_\mu: \mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}^\mu/G_f \cong \mathbb{C}^\mu$ сопоставляет орбите $G_f z$ точки $z = (z_1, \dots, z_\mu)$ точку с координатами $\lambda = (\lambda_{d-i_1}, \dots, \lambda_{d-i_\mu})$, $i_k \in I$, т.е. параметры λ миниверсальной деформации реализуются как некоторые симметрические функции от z . Евклидово скалярное произведение градиентов $\langle \nabla_z \lambda_i, \nabla_z \lambda_j \rangle$ оказывается полиномом от λ , т.е. в смысле определения 3.10 отображение Виета *согласовано с собой*, и задает операцию сворачивания $\lambda_i * \lambda_j \in P$. Матрица $V = \{v_{i,j}(\lambda) = \lambda_i * \lambda_j\}$ называется полной матрицей сворачивания.

Положим $F_\alpha(x) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)F(x)$. Рассмотрим семейства билинейных форм

$$H_\alpha(e(x), e(x')) = \sum_{i,j \in I} h_{i,j}(\lambda, \alpha) e_i(x) e_j(x'),$$

$$\Phi_\alpha(e(x), e(x')) = \sum_{i,j \in I} \phi_{i,j}(\lambda, \alpha) e_i(x) e_j(x'),$$

заданные формулами

$$H_\alpha(e(x), e(x')) = H(\nabla_x F_\alpha(x))(x, x') \mod (\nabla_x F_\alpha(x), \nabla_{x'} F_\alpha(x')),$$

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(e(x), e(x')) &= \mathcal{E}(F(x)) H(\nabla_x F_\alpha(x))(x, x') \mod (\nabla_x F_\alpha(x), \nabla_{x'} F_\alpha(x')) \\ &= \mathcal{E}(F(x)) H_\alpha(e(x), e(x')) \mod \nabla_x F_\alpha(x). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Для данной особенности $f(x)$ матрица полного сворачивания $V(\lambda)$ совпадает с матрицей билинейной формы Φ_0 , $\{v_{i,j}(\lambda)\} = \{\phi_{i,j}(\lambda, 0)\}$, а матрица линеаризованного сворачивания $V^{(1)}(\lambda)$ совпадает с матрицей билинейной формы Φ_1 , $\{v_{i,j}^{(1)}(\lambda)\} = \{\phi_{i,j}(\lambda, 1)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см., например, [8]), для вычисления матрицы полного сворачивания следует вычислить, основываясь на теореме В. М. Закалюкина [14], матрицу $S = \{s_{i,j}(\lambda)\}$ коэффициентов векторных полей $S_i = \sum_j s_{i,j}(\lambda) \partial_{\lambda_j}$ касающихся дискриминанта, т.е. множества $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid \text{существует } x \in \mathbb{C}^n, \text{ такой, что } F(x) = 0, \nabla_x F(x) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu \mid \det S(\lambda) = 0\}$. Коэффициенты $s_{i,j}(\lambda)$, $i, j \in I$, находят из однозначно определенного разложения

$$e_i(x) \mathcal{E}(F(x)) = \sum_{j=1}^n g_{i,j}(x, \lambda) \partial_{x_j} F(x) + \sum_{k \in I} s_{i,k}(\lambda) e_k(x). \quad (6.1)$$

Далее, взяв линейные комбинации строк с полиномиальными коэффициентами, не нарушающие условий однородности матричных элементов в градуировке $\deg \lambda_k = k$, симметризуем матрицу S . Полученная симметрическая матрица V и есть матрица полного сворачивания.

Из (6.1) следует что S — матрица билинейной формы

$$\sum_{i \in I} e_i(x) e_{i_1-i}(x') \mathcal{E}(F(x)) \mod \nabla_x F(x)$$

(напомним, что $i_1 = \max I$). По лемме 5.1 билинейные формы $\Phi_\alpha(e(x), e(x')) = H_\alpha(e(x), e(x')) \mathcal{E}(F(x)) \mod \nabla_x F_\alpha(x)$ симметричны.

Остается проверить, что $\deg H_\alpha(e(x), e(x')) = i_1$. Заметим, что

$$i_1 = \sum_{i=1}^n \deg(\partial_{x_i} f(x)) - \deg x_i,$$

а это по определению совпадает с весом полинома $H(\nabla_x F_\alpha(x))(x, x')$, причём его старшие мономы имеют постоянные коэффициенты: $H_0(e(x), e(x')) = \sum_{i \in I} e_i(x) e_{i_1-i}(x')$. $\square$

Из полученного результата и теоремы 5.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.2. (1) *Имеет место соотношение*

$$v_{r,s}(\lambda) = \sum_{m \in I} (d - m) \lambda_{d-m} d_{r,s}^m(\lambda),$$

где $r, s \in I$ и $d_{i,j}^k(\lambda)$ являются структурными полиномами коумножения в кольце $P[x]/(\nabla F(x))$ в базисе $e(x) = (e_{i_1}(x), \dots, e_{i_\mu}(x))$, т. е. для $k \in I$ имеем $D_x^{x'} e_k(x) = \sum_{i,j \in I} d_{i,j}^k(\lambda) e_i(x) e_j(x')$, где $d_{i,j}^k(\lambda) = d_{j,i}^k(\lambda)$.

(2) *Имеет место соотношение $v_{r,s}^{(1)}(\lambda) = \sum_{m \in I} (d - m) \lambda_m d_{r,s}^m(0)$, где $r, s \in I$ и $d_{i,j}^k(0)$ — структурные константы коумножения в кольце $P[x]/(\nabla f(x))$ в выбранном базисе.*

Рассмотрим случай $n = 1$ подробнее. Пусть $f(x) = x^d$; тогда число Милнора μ равно $d - 1$, оператор Эйлера имеет вид $\mathcal{E} = 1 - \frac{1}{d} x \partial_x$ и $F(x) = x^d + \sum_{i=0}^{d-2} \lambda_{d-i} x^i$. Это — простые особенности, связанные с группами отражений A_μ . По формуле из примера 5.2 для $n = 1$ имеем $H(F'(x))(x, x') = \frac{F'(x) - F'(x')}{x - x'}$. Вычислим матрицу полного сворачивания. Вычисление $D_x^{x'} \mathcal{E}(F(x))$ можно выполнить явно:

$$\sum_{i,j=0}^{d-2} v_{d-i,d-j}(\lambda) x^j x'^i = \frac{F'(x) \mathcal{E}(F(x')) - F'(x') \mathcal{E}(F(x))}{x - x'}.$$

Свяжем с полученной матрицей $V(\lambda)$ векторные поля $\ell_i = \sum_{k=2}^d v_{i-2,k} \partial_{\lambda_k}$ и зададим производящую функцию $L(x) = \sum_{i=0}^{d-2} x^{d-2-i} \ell_i$. Тогда

$$[L(x), F(x')] = \frac{F'(x) F(x') - F(x) F'(x')}{x - x'} - \frac{1}{d} F'(x) F'(x').$$

Сравним полученный результат с результатами §4, а именно с формулой (4.4) для $v(\xi, \xi')$. Выполним замену переменных $(x, x') = (1/\xi, 1/\xi')$ и положим $L(x) = \xi^{2-d} \ell(\xi)$ и $F(x') = \xi'^{-d} \lambda(\xi')$. В правой части получаем $\xi'^{-d} \xi^{2-d} v(\xi, \xi')$, согласно (4.4), где $\beta = 1/d$, $\alpha = 1$ и $\lambda_1 = 0$, в то время как в левой части имеем $\xi'^{-d} \xi^{2-d} [\ell(\xi), \lambda(\xi')]$.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Группе отражений A_μ соответствует градуированная п. алгебра Ли $\mathfrak{a}_\mu(c, v)$, структурные полиномы которой даются формулами (4.4) при $\lambda_1 = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 1/(\mu + 1)$. Группе $A_\infty = \varinjlim A_\mu$ соответствует градуированная п. алгебра Ли $\mathfrak{a}_\infty(c, v) = \mathfrak{a}_{1,0}(c, v)|_{\lambda_1=0}$.

Для группы A_μ выражения для $\lambda_2, \dots, \lambda_{\mu+1}$ как функций от $z_1, \dots, z_\mu$ даются соотношением $F(x) = (x - (z_1 + \dots + z_\mu)) \prod_{i=1}^\mu (x + z_i)$. Обозначим через $\mathcal{V}_\mu$ заданное таким образом отображение. По построению $V(\lambda) = J_{\mathcal{V}_\mu}^t(z) J_{\mathcal{V}_\mu}(z)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. П. алгебра Ли $\mathfrak{a}(J_{\mathcal{V}_\mu}^t(z))$ строго полиномиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \{z_i^j\}$, $i, j = 1, \dots, \mu$. Заметим, что $J_{\mathcal{V}_\mu}^t(z) = KZ$, где K — полиномиальная матрица с $\det K = \text{const}$, элементы которой — симметрические функции от z . Таким образом, п. алгебра Ли $\mathfrak{a}(J_{\mathcal{V}_\mu}^t(z))$ левоеквивалентна п. алгебре Ли $\mathfrak{a}(Z)$. Как показано в примере 2.10, п. алгебра Ли $\mathfrak{a}(Z)$ строго полиномиальна. Требуемое утверждение вытекает из формулы (3.2) для преобразования символов Кристоффеля. $\square$

В случае групп A_μ формула для $\lambda_i * \lambda_j$ была получена Д. Б. Фуксом (см. [1]).

Для особенностей типа B_μ и C_μ выражения для λ_i как функций от $z_1, \dots, z_\mu$ совпадают и задаются соотношением $1 + \sum_{i=1}^\mu \lambda_{2i} x^{2i} = \prod_{j=1}^\mu (1 + z_j^2 x^2)$ (см. [8], там же даны явные формулы сворачивания). С помощью методов §4 опишем соответствующую п. алгебру Ли. Зададим оператор $\pi_{x,y}^+ : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ формулой $\pi_{x,y}^+(\phi(x, y)) = \frac{1}{4}(\phi(x, y) + \phi(x, -y) + \phi(-x, y) + \phi(-x, -y))$ для любого полинома $\phi(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, $\pi_{x,y}^+ \circ \pi_{x,y}^+(\cdot) = \pi_{x,y}^+(\cdot)$. Нетрудно проверить, что операторы

$$R_{x,y}^+(\cdot) = 4\pi_{x,y}^+ \circ R_{x,y}^{(1)} \circ \pi_{x,y}^+(\cdot) \quad \text{и} \quad S_{x,y}^+(\cdot) = 4\pi_{x,y}^+ \circ S_{x,y}^{(1)} \circ \pi_{x,y}^+(\cdot),$$

где $R_{x,y}^{(1)}$ и $S_{x,y}^{(1)}$ — операторы из теоремы 4.2, удовлетворяют тождествам Якоби (4.2). При проверке тождеств удобно сразу положить $\pi_{x,y}^+(\lambda(x)) = \tilde{\lambda}(x^2)$ и т. п. Пара $(R_{x,y}^{(2)}, S_{x,y}^{(2)})$ не приводит к новой алгебре, так как область значений операторов $R_{x,y}^{(2)} \circ \pi_{x,y}^+$ и $S_{x,y}^{(2)} \circ \pi_{x,y}^+$ лежит в ядре оператора $\pi_{x,y}^+$. В задаваемой парой $(R_{x,y}^+, S_{x,y}^+)$ по формулам (4.1) градуированной п. алгебре Ли $\mathfrak{a}^+(c, v)$ центр Z составляют линейные комбинации вида $q_1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} q_j \ell_{2j-1}$ с коэффициентами $q_j \in \mathbb{C}[\lambda_1, \lambda_3, \dots]$. Градуированная п. алгебра Ли $\mathfrak{b}_\infty(c, v) = \mathfrak{a}^+(c, v)/Z$ отвечает прямым пределам групп $B_\infty = \varinjlim B_\mu$ и $C_\infty = \varinjlim C_\mu$. П. факторалгебры Ли $\mathfrak{b}_\mu(c, v)$ п. алгебры Ли $\mathfrak{b}_\infty(c, v)$ по соотношениям $\{\ell_{2k-2} = 0, \lambda_{2k} = 0 \mid k > \mu\}$ соответствуют группам отражений B_μ и C_μ .

Для групп серии D_μ базис составляют $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{2\mu-2}$, такие же, как в случае группы B_μ , и $\hat{\lambda}_\mu = z_1 \cdots z_\mu$. Соответствующая п. алгебра Ли $\mathfrak{d}_\mu(\hat{c}, \hat{v})$ получается из п. алгебры Ли $\mathfrak{b}_\mu(c, v)$ композицией подстановки $\lambda_{2\mu} = \hat{\lambda}_\mu^2$ и левого преобразования (3.1), заданного матрицей $X = \text{diag}(1, \dots, 1, 1/(2\hat{\lambda}_\mu))$.

Для других простых особенностей ситуация сложнее. Рассмотрим особенность типа E_μ с числом Милнора $\mu = 6$. Имеем $f(x, y) = y^3 + x^4$. Оператор Эйлера $\mathcal{E} = 1 - \frac{1}{3}y\partial_y - \frac{1}{4}x\partial_x$ задает градуировку $\deg x = 3$, $\deg y = 4$. Зафиксируем базис локального кольца Q в виде $e(x, y) = \{yx^2, yx, x^2, y, x, 1\}$. Тогда $F(x, y) = y^3 + x^4 + \lambda_2 yx^2 + \lambda_5 yx + \lambda_6 x^2 + \lambda_8 y + \lambda_9 x + \lambda_{12}$. Множество весов базисных мономов

$I = \{10, 7, 6, 4, 3, 0\}$ содержит вместе с числом i также и число $i_1 - i = 10 - i$. Матрица сворачивания $V(\lambda)$ вычисляется с помощью формулы из примера 5.2 при $n = 2$. Свяжем с ней векторные поля $\ell_i = \sum_{k \in I} v_{i,k} \partial_{\lambda_{k+2}}$, $i \in I$, и зададим производящую функцию $L(x, y) = \sum_{i \in I} e_{10-i}(x, y) \ell_i$. Положим

$$\begin{aligned} \xi(x, y, z, w) &= \frac{F_y(x, y)F(z, y)L(x, w) - F_w(x, w)F(z, w)L(x, y)}{(y - w)(x - z)} \\ &\quad + \frac{F_w(z, w)F(x, w)L(z, y) - F_y(z, y)F(x, y)L(z, w)}{(y - w)(x - z)}, \\ \eta(x, y, z, w) &= \frac{F_x(x, y)F(z, y)L(x, w) - F_x(x, w)F(z, w)L(x, y)}{(y - w)(x - z)} \\ &\quad + \frac{F_z(z, w)F(x, w)L(z, y) - F_z(z, y)F(x, y)L(z, w)}{(y - w)(x - z)}. \end{aligned}$$

Следующая формула дает структурные полиномы $C = \{c_{i,j}^k(\lambda)\}$, $i, j, k \in I$, п. алгебры Ли $\mathfrak{e}_6(C, V)$, связанной с группой E_6 :

$$\begin{aligned} &[L(x, y), L(z, w)] \\ &= (\partial_x - \partial_z)\xi(x, y, z, w) + (\partial_y - \partial_w)\eta(x, y, z, w) \mod (\nabla F(x, y), \nabla F(z, w)). \end{aligned}$$

Матрица полного сворачивания для особенности типа E_6 была вычислена в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. ФАЗИС, М., 1996.
2. Buchstaber V. M. Semigroups of maps into groups, operator doubles and complex cobordisms. In: Topics in topology and mathematical physics, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 170. Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 9–35.
3. Бухштабер В. М. Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова. УМН, **54**, вып. 4, 161–162 (1999).
4. Бухштабер В. М., Лейкин Д. В. Алгебры Ли, ассоциированные с σ -функциями, и версальные деформации. УМН, **57**, вып. 3, 145–146 (2002).
5. Бухштабер В. М., Лейкин Д. В. Градуированные алгебры Ли, задающие гиперэллиптические σ -функции. Докл. РАН, **385**, №5 (2002).
6. Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. Hyperelliptic Kleinian functions and applications. In: Solitons, geometry, and topology: on the crossroad, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 179. Amer. Math. Soc., Providence, 1997, pp. 1–34.
7. Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications. Rev. Math. Math. Phys., **10**, No. 2, 3–120 (1997).
8. Гивенталь А. Б. Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанных с простыми особенностями функций. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 4–14 (1980).
9. Givental A. B. Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. MMJ, **1**, No. 4, 551–568 (2001).
10. Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lect. Notes in Math., Vol. 1620, Springer-Verlag, Berlin, 1996, pp. 120–348.
11. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Наука, М., 1979.

12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория. УМН, **44**, вып. 6, 29–98 (1989).
13. *Dubrovin B., Zang Y.* Frobenius manifold and Virasoro constraints. Selecta Math. (N.S.), **5**, No. 4, 423–466 (1999).
14. *Закалюкин В. М.* Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра. Функц. анализ и его прил., **10**, вып. 2, 69–70 (1976).
15. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. Наука, М., 1991.
16. *Новиков С. П.* Различные удвоения алгебр Хопфа. Алгебры операторов на квантовых группах, комплексные кобордизмы. УМН, **47**, вып. 5, 189–190 (1992).
17. *Saito K.* Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. Math., **27**, 263–291 (1980).
18. *Semenov-Tian-Shansky M. A.* Poisson Lie groups, quantum duality principle and the quantum double. Contemp. Math., **175**, 219–248 (1994).
19. *Weierstrass K.* Zur Theorie der elliptischen Funktionen. Mathematische Werke, Vol. 2. Teubner, Berlin, 1894, pp. 245–255.
20. New developments in singularity theory (Siersma D., Wall C. T. C., Zakalyukin V. eds.), NATO Science Series, II, Vol. 21., 2001.

Математический институт им. В. А. Стеклова
e-mail: buchstab@mendeleevo.ru

Институт магнетизма, Киев, Украина
dile@imag.kiev.ua

Поступило в редакцию
5 мая 2002 г.