Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Дектярев, Новое понятие дефекта для голоморфных кривых и их последовательностей, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 35–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:17:08

Новое понятие дефекта для голоморфных кривых и их последовательностей*

© 2002. И. М. ДЕКТЯРЕВ

Рассмотрим любую алгебраическую кривую F в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ и любую точку $a \in \mathbb{P}^n$. Очевидно, что справедливо следующее равенство:

$$\deg F_a + (\Pi_a, F) = \deg F,$$

где F_a — проекция кривой F из точки a на гиперплоскость, $\deg F_a$ и $\deg F$ — степени кривых F_a и F , Π_a — общая гиперплоскость, проходящая через точку a , и (Π_a, F) — кратность пересечения кривой F и гиперплоскости Π_a в точке a .

Для более общих кривых справедливы более общие формулы этого типа, но не для всех точек a , а почти для всех, — возникает некоторый дефект, как в теории Неванлинны и ее классическом обобщении — многомерной теории распределения значений голоморфных отображений. Статья посвящена этой ситуации.

Мы будем изучать последовательности рациональных кривых в проективном пространстве, а также отдельные трансцендентные кривые, и будем предполагать, что они невырождены в том смысле, что образ любой из рассматриваемых кривых не содержится целиком ни в одной гиперплоскости. Для этого случая будет продемонстрирован новый подход к понятиям дефектов в смысле Неванлинны и Валирона и получен некий аналог классического соотношения дефектов. Существенно новым будет то, что мы будем рассматривать дефекты отдельных точек в отличие от классической теории голоморфных кривых, где изучаются дефекты дивизоров. Это, разумеется, потребует изменения основных концепций, поскольку, если дефектными считать те значения, которые принимаются сравнительно редко, то дефектными придется признать почти все точки. Для каждой точки проективного пространства мы будем рассматривать проекцию изучаемой кривой на полярную к этой точке гиперплоскость и докажем, что для почти всех точек скорость роста этой проекции в определенном смысле компенсирует редкое расположение их прообразов. Дефектными же будем считать те значения, для которых эта компенсация недостаточна. О классической теории голоморфных кривых см., например, монографию [1] и имеющуюся там библиографию. Современное состояние многомерной теории распределения значений отражено в обзоре [2], а подходы к теории последовательностей рациональных кривых изложены в работах [3, 4].

Итак, пусть $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$ — невырожденная кривая в n -мерном ($n \geq 2$) проективном пространстве, которое мы рассматриваем как проективизацию $(n+1)$ -мерного унитарного пространства L . «Поднятие» кривой до не принимающего

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 01-01-00499.

значения нуль голоморфного отображения $\mathbb{C} \rightarrow L$ мы будем обозначать той же буквой, что и саму кривую. Из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь. Точку из $\mathbb{P}^n$ будем обозначать строчной буквой, а представляющий ее элемент в L — соответствующей заглавной буквой. Расстояние $\rho(a, b)$ в $\mathbb{P}^n$ определим как $\arccos \frac{|\langle A, B \rangle|}{\|A\| \|B\|}$. Если в L задать ортонормированный базис и координаты $(u_0, \dots, u_n)$ в этом базисе принять в качестве однородных координат пространства $\mathbb{P}^n$, то кэлерова форма ω (вернее, определяющая ее форма на L), соответствующая этому расстоянию, равна $\frac{1}{4} dd^c \ln(|u_0|^2 + \dots + |u_n|^2)$.

Для каждой кривой F на пространстве Φ финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций в плоскости $\mathbb{C}$ мы определим функционал T_F , задав его формулой $T_F(\varphi) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} \varphi F^* \omega$. На этом пространстве зададим норму, определив ее для функции φ как $\max_z \{|\Delta \varphi| (1 + |z|^2)^2\}$. Относительно этой нормы построенный функционал в случае рациональных кривых непрерывен. Действительно, зададим кривую F в однородных координатах в виде $(f_0 : f_1 : \dots : f_n)$, где $f_0, \dots, f_n$ — полиномы, не имеющие общих нулей. Дважды применяя формулу Стокса и учитывая финитность функции φ , получим

$$T_F(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \varphi dd^c \ln \left(\sum_i |f_i|^2 \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln \left(\sum_i |f_i|^2 \right) dd^c \varphi.$$

Последний же интеграл равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (1 + |z|^2)^{-2} \ln \left(\sum_i |f_i|^2 \right) \Delta \varphi (1 + |z|^2)^2 dx \wedge dy.$$

Пусть a — точка из $\mathbb{P}^n$. Обозначим через $\mathbb{P}_a$ полярную этой точке гиперплоскость и через π_a проекцию на эту гиперплоскость из точки a множества $\mathbb{P}^n \setminus a$. Через ω_a обозначим ограничение формы ω на гиперплоскость $\mathbb{P}_a$. Если точка a не принадлежит образу носителя функции φ , то, подобно тому, как это было сделано выше, можно определить величину $T_{\pi_a F}(\varphi)$.

Лемма 1. *Для любой невырожденной кривой F и любого $R > 0$ существуют такие константы K и m , что при всех достаточно малых s и всех $A \in L$, имеющих единичную норму, площадь множества тех $z \in \{|z| < R\}$, для которых выполнено неравенство $\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2 < s$, не превосходит $Ks^{1/m}$.*

Доказательство. Пусть ψ — произвольная функция, голоморфная в круге радиуса, большего, чем R , с центром в нуле и не обращающаяся в нуль на окружности радиуса R . Обозначим через μ минимум модуля функции ψ на этой окружности, а через M число, большее, чем максимум модуля ее производной на той же окружности. Количество N (с учетом кратности) точек в прообразе любой из точек w круга радиуса μ , содержащихся в круге радиуса R , не зависит от w , и это количество не превосходит величины $MR/(2\pi\mu)$. Для каждого $w \in \{|w| < \mu\}$ все $z_k \in \psi^{-1}(w) \cap \{|z| < R\}$ являются корнями многочлена $g(w, u) = u^N + a_1(w)u^{N-1} + \dots + a_N(w)$, коэффициенты a_i которого — элементарные симметрические функции от $\{z_k\}$, взятые с соответствующими знаками, и, значит, голоморфные функции от w на круге радиуса μ . Эти коэффициенты на круге радиуса μ ограничены по модулю константой K_1 , зависящей только от N и R , а их производные на круге радиуса $\mu/2$ ограничены по модулю константой K_2 , зависящей только от N , R и μ .

Пусть теперь какое-нибудь $z'_k \in \psi^{-1}(w') \cap \{|z| < R\}$ отстоит от всех $z''_i \in \psi^{-1}(0) \cap \{|z| < R\}$ на расстояние, большее, чем α . Тогда

$$\alpha_N < |(z'_k - z''_1) \cdots (z'_k - z''_N)| = |g(0, z'_k)| = |g(0, z'_k) - g(w', z'_k)|.$$

Последнее равенство получается из того, что $g(w', z'_k) = 0$. Из оценок на коэффициенты полинома $g(w, u)$ и их производные получаем, что для некоторого K , зависящего только от N , R и μ (или, что то же, только от M , R и μ), прообраз круга радиуса s при любом $s < \mu/2$ может быть покрыт системой из N кругов радиуса $Ks^{1/N}$.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Для нормированного вектора A_0 таким образом выберем нормированный вектор B_0 , ортогональный вектору A_0 , и число $R_0 > R$, что функция $\psi_0 = \langle F, B_0 \rangle$ на окружности радиуса R_0 не обращается в нуль. Тогда для каждого A , достаточно близкого к A_0 , можно выбрать такой ортогональный ему вектор B , что функция $\psi = \langle F, B \rangle$ обладает тем же свойством, и ограничивающую снизу модуль функции ψ константу μ можно выбрать одну и ту же для всех A . Применяя проведенные выше рассуждения к построенным нами функциям ψ и учитывая, что $\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2 = \|F - \langle F, A \rangle A\|^2 \|B\|^2 \geq |\langle F, B \rangle|^2$ (векторы A и B взаимно ортогональны), мы получаем доказательство леммы для всех A , достаточно близких к A_0 . Остается из получившегося покрытия выбрать конечное подпокрытие.

ЛЕММА 2. *Для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной функции φ функция $T_{\pi_a F}(\varphi)$ равномерно непрерывно зависит от a при a , пробегающем дополнение к образу носителя функции φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция π_a в пространстве L соответствует проекция в направлении вектора A на ортогональную этому вектору гиперплоскость L_A . Будем считать, что $\|A\| = 1$. Тогда величина $T_{\pi_a F}(\varphi)$ равна интегралу

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \varphi dd^c \ln(\|F - \langle F, A \rangle A\|^2),$$

который мы, раскрывая скалярное произведение, дважды используя формулу Стокса и учитывая финитность функции φ , приводим к виду

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln(\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2) \Delta \varphi dx \wedge dy.$$

Обозначая через M величину $(4\pi)^{-1} \max |\Delta \varphi|$ и через $v(r)$ площадь множества $Q(A, r)$ тех z из носителя функции φ , которые удовлетворяют неравенству $\|F(z)\|^2 - |\langle F(z), A \rangle|^2 < r$, получаем

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{Q(A, r)} \ln(\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2) \Delta \varphi dx \wedge dy \right| \leq M \left| \int_0^r \ln(s) dv(s) \right|.$$

Из полученной в лемме 1 оценки для величины $v(s)$ и правила интегрирования по частям, примененного к последнему интегралу, следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что интеграл от $\ln(\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2) \Delta \varphi$, взятый по множеству $Q_A = Q(A, \delta_1)$, по абсолютной величине не превосходит ε . Точно так же построим множество Q_B (δ_1 и ε можно взять теми же самыми). Выберем теперь число $\eta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{4\pi} |\ln(1 - \eta/\delta_1)| \int_{\mathbb{C}} |\Delta \varphi| dx \wedge dy < \varepsilon$. Наконец, число $\delta > 0$ выберем из следующего

условия: если нормы векторов A и B равны единице и если $\arccos |\langle A, B \rangle|$ меньше, чем δ (т.е. $\rho(a, b) < \delta$), то при всех z , принадлежащих носителю функции φ , выполнено неравенство $||\langle F(z), A \rangle|^2 - |\langle F(z), B \rangle|^2| < \eta$.

Предположим, что $\rho(a, b) < \delta$, и перейдем к оценке величины

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_{\mathbb{C}} (\ln(\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2) - \ln(\|F\|^2 - |\langle F, B \rangle|^2)) \Delta \varphi \, dx \wedge dy \right|,$$

которая равна $|T_{\pi_a F}(\varphi) - T_{\pi_b F}(\varphi)|$. Разобьем область интегрирования на множество $Q_A \cap Q_B$ и дополнение к нему. Модуль интеграла по $Q_A \cap Q_B$ в силу определения этого множества не превосходит 2ε , а в каждой точке носителя функции φ , не принадлежащей пересечению $Q_A \cap Q_B$, хотя бы одна из функций $\|F(z)\|^2 - |\langle F(z), A \rangle|^2$ и $\|F(z)\|^2 - |\langle F(z), B \rangle|^2$ будет не меньше, чем δ_1 . Пусть, например, это будет вторая из функций. Тогда модуль разности их логарифмов в этой точке представим в виде

$$\left| \ln \left(1 + \frac{|\langle F(z), B \rangle|^2 - |\langle F(z), A \rangle|^2}{\|F(z)\|^2 - |\langle F(z), B \rangle|^2} \right) \right|,$$

что не превосходит $|\ln(1 - \eta/\delta_1)|$. Из выбора величин δ_1 и η и оценки интеграла по пересечению $Q_A \cap Q_B$ теперь следует, что $|T_{\pi_a F}(\varphi) - T_{\pi_b F}(\varphi)|$ не превосходит 3ε . Лемма доказана.

Функция, полученная продолжением по непрерывности функции $T_{\pi_a F}(\varphi)$ на все $a \in \mathbb{P}^n$, будет играть ту же роль, что и функция $N(r, a)$ в теории Неванлинны, и мы примем для нее обозначение $N_F(a)(\varphi)$.

Посмотрим, что представляет собой величина $N_F(a)(\varphi)$ в случае, когда точка a принадлежит образу носителя функции φ . Для этого заметим, что в лемме 2 была фактически доказана непрерывность по всем $a \in \mathbb{P}^n$ выражения $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln(\|F\|^2 - |\langle F, A \rangle|^2) \Delta \varphi \, dx \wedge dy$, которому и равна функция $N_F(a)(\varphi)$.

Проекция $F - \langle F, A \rangle A$ в L кривой F на подпространство L_A , ортогональное вектору A , в некоторых точках проходит через нуль. Построим голоморфную функцию $g(z)$, определенную с точностью до нигде не обращающегося в нуль множителя, которая во всех таких точках (и только таких точках) имеет нуль такого порядка, что кривая $G = (F - \langle F, A \rangle A)/g$ в L_A не проходит через нуль и задается голоморфными функциями. Этой кривой соответствует кривая в пространстве $\mathbb{P}_a$, которая в точках, не принадлежащих носителю функции φ , совпадает с кривой $\pi_a F$. Поэтому мы используем для нее то же обозначение. Таким образом, мы имеем равенство $N_F(a)(\varphi) = T_{\pi_a F}(\varphi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln |g|^2 \Delta \varphi \, dx \wedge dy$. Кратность нуля функции g в точке z будем называть кратностью значения a кривой F в этой точке. Так определенная кратность совпадает с кратностью пересечения кривой F с «общей» гиперплоскостью, проходящей через точку $F(z)$. Легко показать, что второе слагаемое в полученной формуле равно $\sum \varphi(z_k)$, где сумма распространяется на все нули функции g , т.е. прообразы точки a , причем каждый прообраз засчитывается столько раз, какова его кратность. Это служит дополнительным доводом в пользу обозначения $N_F(a)(\varphi)$. Окончательно $N_F(a)(\varphi) = T_{\pi_a F}(\varphi) + \sum \varphi(z_k)$.

Введем еще функцию $m_F(a)(\varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta \varphi \ln \frac{1}{\sin^2 \rho(a, F(z))} \, dx \wedge dy$. Если точка a не принадлежит образу носителя функции φ , то, дважды применяя формулу Стокса и учитывая финитность функции φ , мы после несложных преобразований

получаем равенство

$$T_F(\varphi) = N_F(a)(\varphi) + m_F(a)(\varphi),$$

которое по аналогии с теорией Неванлинны будем называть *первой основной теоремой*. Это же равенство по непрерывности выполняется и для остальных a .

Теория Неванлинны, если говорить весьма приблизительно, состоит в сравнительном изучении поведения введенных величин при изменении тех или иных параметров. Мы рассмотрим в этом направлении два вопроса: во-первых, их поведение для последовательностей рациональных кривых при стремлении к бесконечности последовательности степеней этих кривых и, во-вторых, их поведение для трансцендентных голоморфных кривых, когда система пробных функций определяется исчерпанием.

Итак, пусть $F_1, \dots, F_k, \dots$ — последовательность невырожденных рациональных кривых $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$, и пусть $d_1, \dots, d_k, \dots$ — последовательность их степеней. Из первой основной теоремы и задания нормы на пространстве Φ следует, что для любой кривой F и любой точки $a \in \mathbb{P}^n$ норма разности $T_F - N_F(a)$ функционалов T_F и $N_F(a)$ не превосходит величины $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \ln \frac{1}{\sin^2 \rho(a, F(z))} (1 + |z|^2)^{-2} dx \wedge dy$, которую мы обозначим через $m(F, a)$. Заметим, что $(1 + |z|^2)^{-2} dx \wedge dy$ — это элемент площади плоскости $\mathbb{C}$ в сферической метрике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величину $\liminf_{k \rightarrow \infty} m(F_k, a)/d_k$ обозначим через $\delta_N(a)$ и назовем ее *неванлинновским дефектом значения a* . Аналогично определим *валлироновский дефект* $\delta_V(a)$ как $\limsup_{k \rightarrow \infty} m(F_k, a)/d_k$. Значения, дефект которых отличен от нуля, будем называть *дефектными*.

Мы покажем, что множество дефектных значений является очень редким. Для точной характеристики того, что мы понимаем под словами «редкое множество», воспользуемся понятием h -меры Хаусдорфа (см., например, [5, с. 244]). Мы будем использовать функцию h , удовлетворяющую следующим условиям: интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{h(s)}{s} ds$ сходится (обозначим его через c_1) и существует такая константа c_2 , что при всех $r \in [0, \pi/6]$ выполнено соотношение $h(3r) < c_2 h(r)$.

ЛЕММА 3. Пусть функция h обладает перечисленными выше свойствами. Тогда существует такая константа c , что для любой кривой F и константы K множество $\Delta(F, K)$ тех точек $a \in \mathbb{P}^n$, для которых выполнено соотношение $m(F, a) > K$, можно покрыть системой геодезических шаров, радиусы которых удовлетворяют неравенству $\sum h(r_i) < c/K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $v(r, a)$ площадь (в сферической метрике) той части плоскости $\mathbb{C}$, которая при отображении F попадает в геодезический шар радиуса r пространства $\mathbb{P}^n$ с центром в точке a . Тогда для $a \in \Delta(F, K)$ выполняется неравенство $\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\sin^2 r} dv(r, a) > K$, или (после интегрирования по частям) $\int_0^{\pi/2} \frac{v(r, a)}{r} \frac{r}{\tan r} dr > 2\pi K$, или, наконец, $\max_{h(r)} \frac{v(r, a)}{h(r)} > \frac{2\pi K}{c_1}$. Таким образом, для каждой точки $a \in \Delta(F, K)$ найдется радиус r_a , для которого $h(r_a) < \frac{c_1}{2\pi K} v(r_a, a)$.

Набор точек $\Omega \subset \Delta(F, K)$ будем называть правильным, если шары с центрами в $a \in \Omega$ и радиусами, равными r_a , не пересекаются и для любой точки $a \in \Omega$ и точки $b \in \Delta(F, K)$, не принадлежащей объединению шаров с центрами в точках $a \in \Omega$ и радиусами, равными $3r_a$, выполнено неравенство $r_b < 2r_a$. Множество таких наборов образует упорядоченную по включению систему, к которой можно

применить лемму Цорна. Следовательно, существует максимальный набор, скажем Ω_0 . Если бы объединение Δ_0 шаров с центрами в точках $a \in \Omega_0$ и радиусами, равными $3r_a$, не покрывало полностью все множество $\Delta(F, K)$, то, добавив к Ω_0 такую точку b_0 из дополнения к Δ_0 , что $r_{b_0} > \sup(r_b/2)$, где супремум берется по всем b из этого дополнения, мы получили бы большее правильное множество.

Поскольку шары радиусов r_a с центрами в точках $a \in \Omega_0$ не пересекаются, не пересекаются и области из $\mathbb{C}$, являющиеся их прообразами, а площади этих областей (в сферической метрике) равны соответственно $v(r_a)$. Таким образом, $\sum_{a \in \Omega_0} v(r_a, a) \leq \pi$, а значит,

$$\sum_{a \in \Omega_0} h(3r_a) < c_2 \sum_{a \in \Omega_0} h(r_a) < \frac{c_1 c_2}{2\pi K} \sum_{a \in \Omega_0} v(r_a, a) \leq \frac{c_1 c_2}{2K} = \frac{c}{K},$$

где константа c зависит только от функции h . С другой стороны, объединение шаров с центрами в точках $a \in \Omega_0$ и радиусами, равными $3r_a$, покрывает все множество $\Delta(F, K)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если последовательность кривых $F_1, \dots, F_k, \dots$ такова, что ряд $\sum d_k^{-1}$, где d_k — степень кривой F_k , сходится, то множество Δ значений, дефектных по Валирону (и, тем более, дефектных в смысле Неванлинны), имеет нулевую h -меру Хаусдорфа для любой функции h , удовлетворяющей указанным выше условиям.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем стремящуюся к нулю последовательность s_k так, чтобы ряд $\sum_k s_k^{-1} d_k^{-1}$ все еще сходил, и рассмотрим последовательность множеств $\Delta(F_k, s_k d_k)$ (см. лемму 3). Если значение a дефектно, то для некоторого $\eta > 0$ найдется бесконечное множество значений k , для которых выполнено неравенство $m(F_k, a)/d_k > \eta$ и, тем более, неравенство $m(F_k, a) > s_k d_k$, т. е. для всех этих k выполнено включение $a \in \Delta(F_k, s_k d_k)$. Значит, при любом q множество Δ содержится в объединении $\bigcup_{k>q} \Delta(F_k, s_k d_k)$. Но каждое из множеств $\Delta(F_k, s_k d_k)$ можно покрыть системой шаров, радиусы которых удовлетворяют неравенству $\sum_i h(r_{i,k}) < \frac{c}{s_k d_k}$, и в силу сходимости ряда $\sum_k s_k^{-1} d_k^{-1}$ для любого заданного ε число q можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{k>q} \sum_i h(r_{i,k}) < \varepsilon$.

ПРИМЕР. Рассмотрим последовательность кривых, задаваемых в однородных координатах формулами $F_k = (1 : z : \dots : z^{n-1} : z^{k^2})$, а в качестве a возьмем точку с однородными координатами $(0 : 0 : \dots : 0 : 1)$. В этом случае

$$\sin^{-2} \rho(a, F(z)) = \frac{1 + |z|^2 + \dots + |z|^{2(n-1)} + |z|^{2k^2}}{1 + |z|^2 + \dots + |z|^{2(n-1)}},$$

т. е. при $|z| > 1$ выполняется соотношение $\ln \frac{1}{\sin^2 \rho(a, F(z))} > (k^2 - n + 1) \ln |z|^2$ (и при всех z соотношение $\ln \frac{1}{\sin^2 \rho(a, F(z))} > 0$). Очевидно, что значение a является дефектным со значением дефекта $\frac{1}{4\pi} \int_{|z|>1} \frac{\ln |z|^2}{(1+|z|^2)^2} dx \wedge dy$.

Нетрудно построить последовательности рациональных кривых со счетным количеством дефектных значений.

Перейдем к рассмотрению индивидуальных трансцендентных кривых. Здесь, как и в случае классической теории, мы воспользуемся функцией исчерпания

$\ln |z|^2$. Построим зависящее от параметров r и ε , $r > 1$, $0 < \varepsilon < r$, семейство финитных функций $\tau_{r,\varepsilon}(z)$, равных $\frac{1}{2}(\ln r^2 - \ln |z|^2)$ внутри кольца $1 < |z| < r - \varepsilon$ и нулю вне круга радиуса r . Внутри круга единичного радиуса положим их равными $\frac{1}{2} \ln r^2 + \frac{1}{4}|z|^4 - |z|^2 + \frac{3}{4}$ с тем, чтобы они оказались дважды непрерывно дифференцируемыми в окрестности этого круга, а в кольце $r - \varepsilon < |z| < r$ определим эти функции как $\chi_{r,\varepsilon}(|z|)$, где монотонные функции $\chi_{r,\varepsilon}(\rho)$ подобраны так, чтобы функции $\tau_{r,\varepsilon}$ оказались дважды непрерывно дифференцируемыми всюду. Через $\tau_r(z)$ обозначим предел в топологии равномерной сходимости последовательности функций $\tau_{r,\varepsilon}(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

К произвольной кривой F и этой системе пробных функций при $\varepsilon > 0$ применимы все предыдущие рассуждения вплоть до первой основной теоремы включительно. Посмотрим, что происходит при переходе к пределу, когда ε стремится к нулю. Функционалы T_F и $N_F(a)$ корректно определены на $\tau_r(z)$, и их значения на этой функции равны пределу значений на функциях $\tau_{r,\varepsilon}(z)$. Обозначим эти предельные значения через $T_F(r)$ и $N_F(r, a)$. Что касается функционала $m_F(a)$, то определяющий его интеграл представляется в виде суммы трех интегралов: по единичному кругу, по внутреннему кольцу и по внешнему кольцу. Первый из них представляется в виде непрерывной по $a \in \mathbb{P}^n$ и не зависящей от r функции, которая есть, следовательно, $O(1)$. Второй интеграл равен нулю (функция $\ln |z|^2$ гармонична). Для изучения интеграла по внешнему кольцу заметим, что в полярных координатах выражение $\Delta \chi_{r,\varepsilon}(|z|) dx \wedge dy$ с учетом того, что $\chi_{r,\varepsilon}$ от φ не зависит, записывается в виде

$$\left(\rho \frac{d^2 \chi_{r,\varepsilon}}{d\rho^2} + \frac{d\chi_{r,\varepsilon}}{d\rho} \right) d\rho \wedge d\varphi = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\chi_{r,\varepsilon}}{d\rho} \right) d\rho \wedge d\varphi.$$

Отсюда легко следует, что предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $m_F(a)\tau_{r,\varepsilon}$ равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sin^{-2} \rho(a, F(re^\varphi)) d\varphi.$$

Этот интеграл обозначим по аналогии с классической теорией через $m_F(r, a)$.

Первая основная теорема приобретает следующий вид. При всех $a \in \mathbb{P}^n$ выполнено соотношение

$$T_F(r) = N_F(r, a) + m_F(r, a) + O(1),$$

где символ $O(1)$ относится к параметру r и приведенная оценка равномерна по a . Обозначим точную верхнюю грань модуля разности $T_F(r) - (N_F(r, a) + m_F(r, a))$ через c_F . Заметим, что функции $T_F(r)$ и $N_F(r, a)$ монотонно стремятся к бесконечности при $r \rightarrow \infty$.

Введем теперь понятие дефекта значения a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Величину $\liminf_{r \rightarrow \infty} (1 - N_F(r, a)/T_F(r))$ обозначим через $\delta_N(a)$ и назовем ее *неванлинновским дефектом* значения a . Аналогично определим *валироновский дефект* как $\limsup_{r \rightarrow \infty} (1 - N_F(r, a)/T_F(r))$ и обозначим его через $\delta_V(a)$. Значения, дефект которых отличен от нуля, будем называть *дефектными*. Значение a будем называть *слабо дефектным (по Валирону)*, если существует такое положительное $\alpha < 1/2$, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{N_F(r, a)}{T_F(r)} \right) T_F(r)^\alpha \right) > 0.$$

ЛЕММА 4. Пусть функция h такова, что интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{h(s)}{s} ds$ сходится и равен c_1 , и пусть для некоторого c_2 при всех $t \in [0, \pi/6]$ выполнено соотношение $h(3t) < c_2 h(t)$. Тогда существует такая константа c , что для любой кривой F , любого r и любой константы K множество $\Delta(F, K)$ тех точек $a \in \mathbb{P}^n$, для которых выполнено соотношение $m_F(r, a) > K$, можно покрыть системой геодезических шаров, радиусы которых удовлетворяют неравенству $\sum h(\rho_i) < c/K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является почти дословным повторением доказательства леммы 3. Отличие только в том, что здесь в качестве $v(t)$ нужно брать угловую меру того множества на окружности радиуса r , которое при отображении F попадает в геодезический шар радиуса ρ с центром в точке a .

ТЕОРЕМА 2. Для любой голоморфной кривой F множество значений, слабо дефектных (а значит, и просто дефектных) по Валирону (и, тем более, дефектных в смысле Неванлинны), имеет нулевую h -меру Хаусдорфа для любой функции h , удовлетворяющей условиям леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем последовательность чисел $\{r_k\}$ таким образом, чтобы значение $T_F(r_k)$ равнялось k^2 . Пусть число r заключено между $\{r_k\}$ и $\{r_{k+1}\}$. Тогда в силу монотонности функций $T_F(r)$ и $N_F(r, a)$ верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} m_F(r, a) &\leq T_F(r) - N_F(r, a) + c_F < T_F(r_{k+1}) - N_F(r_k, a) + c_F \\ &= T_F(r_{k+1}) - T_F(r_k) + T_F(r_k) - N_F(r_k, a) + c_F \\ &= 2k + 1 + m_F(r_k, a) + 2c_F. \end{aligned}$$

С другой стороны, если точка a слабо дефектна по Валирону, то для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности значений r при некоторых $\alpha < 1/2$ и $\beta > 0$ выполнено неравенство $m_F(r, a) > \beta T_F(r)^{1-\alpha}$, а правая часть при достаточно больших r превосходит величину $T_F(r)^{1/2} \ln^2 T_F(r)$. Для r , больших, чем $\{r_k\}$, последняя величина превосходит $2k \ln_2 k$.

Комбинируя этот факт с предыдущими неравенствами, получаем, что для слабо дефектной по Валирону точки a найдется такая последовательность значений r_k , что $m_F(r_k, a_k) > 2k \ln_2 k - (2k + 1) - 2c_F$. Выражение, стоящее справа, обозначим через d_k . Итак, мы показали, что каждое слабо дефектное по Валирону значение a содержится в бесконечной последовательности множеств $\Delta(F, d_k)$ (обозначение см. в формулировке леммы 4). Каждое из этих множеств можно покрыть системой геодезических шаров, радиусы которых удовлетворяют неравенству $\sum h(\rho_i) < c/d_k$. Если по заданному ε выбрать такое q , что $\sum_{k>q} c/d_k < \varepsilon$, то получим, что множество всех слабо дефектных по Валирону значений можно покрыть системой геодезических шаров, радиусы которых удовлетворяют неравенству $\sum h(\rho_i) < \varepsilon$, а это составляет утверждение теоремы.

Для значений, дефектных в смысле Неванлинны, можно доказать гораздо более тонкий результат. Для этого параллельно с проведенными построениями рассмотрим следующую конструкцию. Проективное пространство $\mathbb{Q}^n$ будем считать пространством, параметризующим семейство гиперплоскостей пространства $\mathbb{P}^n$, рассматривая $\mathbb{Q}^n$ как проективизацию пространства L_1 , двойственного к L . Таким образом, точка $q \in \mathbb{Q}^n$ с однородными координатами $(v_0, \dots, v_n)$ задает гиперплоскость посредством уравнения $v_0 u_0 + \dots + v_n u_n = 0$. В прямом произведении $\mathbb{C} \times \mathbb{Q}^n$ построим многообразие X , состоящее из таких пар $(z \in \mathbb{C},$

$q \in \mathbb{Q}^n$), что гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$, соответствующая точке q , проходит через $F(z)$. Проекцию многообразия X на первый сомножитель обозначим через π_1 , а на второй — через G . Пусть X_r — это $\pi_1^{-1}\{|z| \leq r\}$. Обозначим через μ форму $(2n-2)$ -мерного объема на пространстве $\mathbb{Q}^n$, определяемую метрикой Фубини–Штуди и нормированную так, чтобы объем гиперплоскости равнялся единице. Построим еще отображение $\zeta: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, ставящее точке $q \in \mathbb{Q}^n$ в соответствие точку $p \in \mathbb{P}^n$, полярную гиперплоскости, соответствующей точке q .

Содержание леммы 15 работы [6] состоит в том, что величина

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial X_r} \ln \cos^{-2} \rho(\zeta(G(x)), a) G^* \mu \wedge d^c \pi_1^* \ln |z|$$

лишь на ограниченную величину отличается от $m_F(r, a)$.

Построим, кроме того, на пространстве $\mathbb{Q}^n$ форму объема ω , определяемую метрикой Фубини–Штуди и нормированную так, чтобы объем всего $\mathbb{Q}^n$ равнялся единице, и определим функцию η на X с помощью равенства $G^* \omega = \eta G^* \mu \wedge d\pi_1^* \ln |z| \wedge d^c \pi_1^* \ln |z|$.

ЛЕММА 5. *Для любой кривой F и любого набора различных точек $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{P}^n$ выполнено соотношение*

$$\int_{\partial X_r} \ln \left(\eta \prod_{j=1}^k \cos^{-2} \rho(\zeta(G(x)), a_j) \right) G^* \mu \wedge d^c \pi_1^* \ln |z| < c_1 \ln \frac{d^2}{dr^2} T^\#(r) + c_2,$$

где через $T^\#(r)$ обозначена некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $T^\#(r) \leq c_3 T_F(r) + c_4 \ln r$.

Левую часть неравенства, доказываемого в этой лемме, будем обозначать через $S(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, по существу, составляет содержание теоремы 11 работы [6]. Следует только иметь в виду, что наша функция $T_F(r)$ отличается от функции, использованной в работе [6], на величину, пропорциональную $\ln r$.

Для точной формулировки окончательного результата введем некоторые определения. Точку $z \in \mathbb{C}$ будем называть точкой ветвления кривой F , если кратность значения $F(z)$ в этой точке больше единицы. Индексом ветвления в этой точке будем называть число, на единицу меньшее, чем кратность значения. Точка z_0 тогда и только тогда будет точкой ветвления кривой F , когда векторы $F(z_0)$ и $F'(z_0)$ будут коллинеарны, причем индекс ветвления в этой точке тогда и только тогда будет равен k , когда векторы $F(z_0), F'(z_0), \dots, F^{(k)}(z_0)$ будут взаимно коллинеарны, а вектор $F^{(k+1)}(z_0)$ не коллинеарен им. Полным индексом ветвления кривой F назовем величину $\theta_F = \liminf_{r \rightarrow \infty} (\sum \tau_r(z_k)) / T_F(r)$, где суммирование ведется по всем точкам, являющимся точками ветвления кривой F , причем кратность, с которой учитывается каждая точка, равна индексу ветвления этой точки.

ТЕОРЕМА 3. *Для невырожденной трансцендентной кривой F и набора различных точек $a_1, \dots, a_q$ пространства $\mathbb{P}^n$ выполняется следующее соотношение дефектов:*

$$\sum_{i=1}^q \delta_N(a_i) + \theta_F \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем для каждой точки a_i соотношение первой основной теоремы и просуммируем эти соотношения. Получим

$$qT_F(r) - \sum_{i=1}^q N_F(r, a_i) = \sum_{i=1}^q m_F(r, a_i) + O(1).$$

В соответствии с построениями, предшествующими лемме 5, правую часть преобразуем к виду $(4\pi)^{-1}S(r) - (4\pi)^{-1} \int_{\partial X_r} \ln \eta G^* \mu \wedge d^c \pi_1^* \ln |z| + O(1)$.

Что касается выражения $S(r)$, то оценки леммы 5 с помощью стандартных рассуждений приводят к утверждению, что вне интервалов конечной суммарной логарифмической длины оно ведет себя как $o(T_F(r))$. (Напомним, что мы рассматриваем трансцендентные кривые, а это, в частности, означает, что $\ln r = o(T_F(r))$.)

Для оценки интеграла, входящего во вторую составляющую правой части, вычислим значение функции η в какой-нибудь фиксированной точке q слоя над, скажем, z_0 . Для этого таким образом выберем в пространствах L и L_1 взаимно двойственные базисы, что вектор $F(z_0)$ записывается в виде $(0 : \dots : 0 : f_n(z_0))$, а однородные координаты вблизи точки q имеют вид $(1 : v_1 : \dots : v_n)$, так что для точки q имеем $q = (1 : 0 : \dots : 0)$. Оставшимся произволом в выборе базисов воспользуемся так, чтобы проекция касательного в точке $F(z_0)$ к нашей кривой вектора $F'(z_0)$ на любой из остальных ортов равнялась нулю. В качестве локальных координат в окрестности точки (z_0, q) возьмем $(z, v_1, \dots, v_{n-1})$, а в окрестности проекции этой точки в пространстве $\mathbb{Q}^n$ выберем $(v_1, \dots, v_n)$. Отображение G задается формулой

$$(z, v_1, \dots, v_{n-1}) \rightarrow (v_1, \dots, v_{n-1}, -(f_0 + v_1 f_1 + \dots + v_{n-1} f_{n-1})/f_n).$$

Непосредственные выкладки, с учетом обращения в нуль координат $(v_1, \dots, v_n)$ и функций $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ в рассматриваемой точке, теперь показывают, что функция η с точностью до нормирующих постоянных множителей равна $|f'_0|^2/|f_n|^2$, или в инвариантной (не зависящей от выбора ортонормированных базисов) форме имеет вид $\|F\|^{-4}(\|F\|^2\|F'\|^2 - |\langle F, F' \rangle|^2)|z|^2$.

Таким образом, функция η зависит только от z , и, принимая во внимание нормировку формы μ , мы получаем с точностью до слагаемых вида $O(\ln r)$ для второго интеграла выражение (с учетом знака)

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|F(re^{i\varphi})\|^4}{\|F(re^{i\varphi})\|^2\|F'(re^{i\varphi})\|^2 - |\langle F(re^{i\varphi}), F'(re^{i\varphi}) \rangle|^2} d\varphi.$$

Если перейти к координатному представлению кривой F , мы получим, что знаменатель равен $\sum |f_i f'_j - f_j f'_i|^2$. Умножив и разделив его на квадрат модуля функции $g(z)$, имеющей нули нужного порядка в тех и только тех точках, где все функции $f_i f'_j - f_j f'_i$ обращаются в нуль, приведем его к виду $|g(z)|^2 \sum |h_{i,j}|^2$, причем сумма квадратов модулей голоморфных функций $h_{i,j}$ нигде не обращается в нуль. Значит,

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sum |h_{i,j}(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq -\frac{1}{2} \ln \sum |h_{i,j}(0)|^2$$

(функция $\ln \sum |h_{i,j}(z)|^2$ субгармонична).

Нули функции $g(z)$ и порядки этих нулей — это в точности точки ветвления кривой F и их индексы. Поэтому величина $\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\varphi})|^2 d\varphi$, равная по теореме Иенсена $\ln |c_\lambda| + \lambda \ln r + \sum_{k=1}^\nu (\ln r - \ln |z_k|)$, отличается от числителя, участвующего в определении полного индекса ветвления, на слагаемое порядка $O(\ln r)$. Здесь λ — это показатель, с которого начинается разложение в нуле функции $g(z)$, c_λ — коэффициент при z^λ в этом разложении, а $z_1, \dots, z_\nu$ — отличные от нуля точки ветвления кривой F , причем каждая точка засчитывается столько раз, каков ее индекс.

Наконец, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|F(re^{i\varphi})\|$ — это один из вариантов классической функции $T_F(r)$ (см., например [7]), отличающийся от нашей функции $T_F(r)$ на величину порядка $O(\ln r)$.

Подведем итоги:

$$\sum_{i=1}^q (T_F(r) - N_F(r, a_i)) + \sum_{i=1}^\nu \tau_r(z_i) \leq 2T_F(r) + S(r) - \frac{1}{2} \ln \sum |h_{i,j}(0)|^2 + O(\ln r).$$

Чтобы получить окончательный результат, нужно поделить это соотношение на $T_F(r)$, перейти в левой части к нижнему пределу и, выкинув исключительные интервалы, участвующие в оценке величины $S(r)$, перейти к пределу в правой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б. В. Распределение значений голоморфных отображений. Наука, М., 1982.
2. Noguchi J. Value distribution theory of holomorphic mappings. *Contemp. Math.*, **222**, 109–129 (1999).
3. Russakovsky A., Shiffman B. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, **46**, 897–932 (1997).
4. Дектярев И. М. Равнораспределенность дивизоров для последовательностей голоморфных кривых. *Функц. анализ и его прил.*, **34**, вып. 3, 17–25 (2000).
5. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. Наука, М., 1966.
6. Dektyarev I. M. Multivariable Value Distribution Theory. Applications to Holomorphic Curves. *J. Math. Sci.*, **92**, No. 2, 3685–3711 (1998).
7. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений. В кн.: Виттмах Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960, с. 263–300.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило в редакцию
12 февраля 2002 г.