Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шувалов, О пределах подалгебр Мищенко–
Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр
Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, вы-
пуск 4, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa219>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:08:38

УДК 512.813.4

О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли*

© 2002. В. В. ШУВАЛОВ

Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная алгебра Ли, а $\mathcal{P}\mathfrak{g}$ — ее алгебра Пуассона. Элементы алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{g}$ обычно рассматриваются как функции на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Однако в нашем случае удобно отождествить алгебру $\mathfrak{g}$ и двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ с помощью инвариантной билинейной формы и рассматривать элементы алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{g}$ как функции на самой алгебре $\mathfrak{g}$, что мы и будем делать в дальнейшем. Известен способ построения коммутативных (относительно скобки Пуассона) подалгебр алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{g}$, имеющих максимальную степень трансцендентности, равную $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$, — так называемый *метод сдвига инвариантов*, задаваемый формулой Манакова [4]. Этот способ состоит в следующем: для каждого регулярного полупростого элемента $a \in \mathfrak{g}$ подалгебра $F(a) \subset \mathcal{P}\mathfrak{g}$, порожденная производными (здесь и далее, говоря «производные», мы подразумеваем производные всех порядков, включая и производную нулевого порядка, т.е. саму функцию) инвариантов присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль вектора a , коммутативна и имеет нужную степень трансцендентности (см., например, [5]). Эти подалгебры названы в [2] *подалгебрами Мищенко–Фоменко*. Известно, что производные базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ (здесь и далее, говоря «инварианты алгебры», мы подразумеваем инварианты присоединенного представления этой алгебры) вдоль вектора a свободно порождают алгебру $F(a)$. Набор степеней этих порождающих можно описать следующим образом: это набор высот, увеличенных на 1, всех положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, к которому добавлено еще $\operatorname{rk} \mathfrak{g}$ единиц.

Замечание. В названии работы фигурируют полупростые алгебры Ли, а здесь и далее мы рассматриваем редуктивные алгебры Ли. Это сделано по чисто техническим соображениям: даже если исходная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, в рассматриваемых ниже конструкциях могут возникнуть редуктивные подалгебры с нетривиальным центром.

С помощью предельного перехода из подалгебр Мищенко–Фоменко можно получать другие коммутативные подалгебры. Уточним, что здесь понимается под предельным переходом. Пусть $a(t)$ — такой сходящийся (в окрестности нуля) степенной ряд с коэффициентами из алгебры $\mathfrak{g}$, что элемент $a(t)$ регулярен и полупрост при всех достаточно малых $t \neq 0$. Рассмотрим соответствующие подалгебры $F(a(t))$. Все эти подалгебры являются градуированными, причем размерность градуирующего подпространства $F(a(t))_k \subset \mathcal{P}\mathfrak{g}$ не зависит от t . Далее,

*Работа была поддержана грантом CRDF RM1-2088 и грантом Программы поддержки ведущих научных школ 00-15-96128.

коэффициенты производных базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль вектора $a(t)$ являются сходящимися рядами от t . Отсюда следует, что плюккеровы координаты подпространства $F(a(t))_k$ также являются сходящимися рядами от t ; поэтому для каждого $k \geq 0$ существует предел $F_k = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))_k$ в соответствующем грассмановом многообразии. Ясно, что $F = \bigoplus F_k$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{g}$, которую мы будем обозначать $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ и называть *предельной подалгеброй Мищенко–Фоменко* или просто *предельной подалгеброй*. Заметим, что степень трансцендентности алгебры $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ равна $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$. В самом деле, степень трансцендентности градуированной алгебры определяется ее рядом Пуанкаре (и равна порядку полюса этого ряда в точке 1), а ряд Пуанкаре подалгебры $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ такой же, как и у «допредельных» подалгебр, имеющих степень трансцендентности $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g})$. Таким образом, подалгебра $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ имеет максимальную степень трансцендентности. Полезно, однако, иметь более явное описание предельных подалгебр; например, желательно описать их образующие, выяснить, являются ли эти подалгебры свободными, и т. д.

В данной работе рассматривается случай, когда все коэффициенты ряда $a(t)$ принадлежат фиксированной картановской подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае удастся достаточно явно описать структуру предельных подалгебр. Эти алгебры оказываются свободными, а их свободные порождающие оказываются кратными производными инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль коэффициентов ряда $a(t)$. Чтобы сформулировать точное утверждение, введем некоторые обозначения и определим.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — картановская подалгебра, а Δ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно подалгебры $\mathfrak{h}$. Конечную последовательность $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots, a_l)$, $a_i \in \mathfrak{h}$, назовем *регулярной*, если $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_0) \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_1) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_l) = \mathfrak{h}$. Другими словами, последовательность $\mathcal{A}$ регулярна, если ни один корень из системы Δ не обращается в нуль на всех элементах $a_0, a_1, \dots, a_l$. Легко видеть, что последовательность $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ регулярна тогда и только тогда, когда соответствующий ряд $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l$ регулярен в смысле работы Винберга [2], т. е. тогда и только тогда, когда элемент $a(t)$ регулярен при малых $t \neq 0$. В этом случае можно рассмотреть соответствующую предельную подалгебру $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Нашей целью будет более явное описание этой подалгебры. Для этого рассмотрим следующую конструкцию.

Положим $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_i)$ ($i = 0, \dots, l$), $\mathfrak{z}_{-1} = \mathfrak{g}$. Определим подалгебры $F_k \subset \mathcal{P}\mathfrak{g}$ следующим образом:

- $F_0 = F(a_0)$;
- F_k ($k = 1, \dots, l$) есть подалгебра, порожденная подалгеброй F_{k-1} и производными инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_{k-1}$ вдоль вектора a_k . (Пользуясь каноническим вложением $\mathcal{P}\mathfrak{z}_{k-1} \subset \mathcal{P}\mathfrak{g}$, мы отождествляем здесь и далее элементы алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{z}_{k-1}$ с их образами в алгебре $\mathcal{P}\mathfrak{g}$ при этом вложении.)
- F_{l+1} есть подалгебра, порожденная подалгеброй F_l и инвариантами подалгебры $\mathfrak{z}_l = \mathfrak{h}$ (т. е., говоря проще, элементами пространства $\mathfrak{h}^*$).

Положим $F_{\mathcal{A}} = F_{l+1}$. В силу построения алгебра $F_{\mathcal{A}}$ имеет систему порождающих, состоящую из производных базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{z}_{-1} = \mathfrak{g}$ вдоль

вектора a_0 , производных базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_0$ вдоль $a_1, \dots$, производных базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_{l-1}$ вдоль a_l и базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_l = \mathfrak{h}$. Конечно, не все эти элементы алгебраически независимы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная алгебра Ли и $\mathcal{A}$ — регулярная последовательность. Тогда

1) $F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$;

2) алгебра $F_{\mathcal{A}}$ свободна; в качестве ее свободных порождающих можно взять объединение некоторых наборов производных базисных инвариантов алгебр $\mathfrak{z}_{k-1}$ вдоль a_k ($k = 0, \dots, l$) и произвольного базиса пространства $\mathfrak{h}^*$.

Предельные подалгебры устроены несколько проще, чем исходные подалгебры Мищенко–Фоменко. Возможно, их квантования могут представлять интерес для теории представлений. Во всяком случае, квантование простейшей предельной подалгебры Мищенко–Фоменко в $\mathcal{P}\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, порожденной центрами алгебр Пуассона цепочки подалгебр $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{gl}_{n-1}(\mathbb{C}) \supset \dots$, приводит к базису Гельфанда–Цетлина для представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Разным регулярным последовательностям (рядам) может, конечно, соответствовать одна и та же предельная подалгебра. Пользуясь этим, можно сделать описание предельных подалгебр более эффективным. А именно, следуя работе Винберга [2], введем следующие определения.

Регулярную последовательность $\mathcal{A}$ (и соответствующий ряд $a(t)$) будем называть *канонической* (*каноническим*), если для любого $i = 0, \dots, l$ выполнены следующие два условия:

(C1) элемент a_i лежит в полупростой части подалгебры $\mathfrak{z}_{i-1}$;

(C2) проекция элемента a_i на каждую простую компоненту подалгебры $\mathfrak{z}_{i-1}$ отлична от нуля.

Рассмотрим теперь две канонические регулярные последовательности $\mathcal{A} = (a_0, \dots, a_l)$ и $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_m)$. Положим $\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_i)$, $\tilde{\mathfrak{z}}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\tilde{a}_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\tilde{a}_i)$. Назовем последовательности $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ (и соответствующие ряды $a(t)$ и $\tilde{a}(t)$) *эквивалентными*, если $l = m$ и для любого $i = 0, \dots, l$ выполнены следующие два условия:

(E1) $\mathfrak{z}_i = \tilde{\mathfrak{z}}_i$;

(E2) проекции элементов a_i и $\tilde{a}_i$ на каждую простую компоненту подалгебры $\mathfrak{z}_{i-1}$ пропорциональны.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная алгебра Ли.

1) Для всякой регулярной последовательности $\mathcal{A}$ существует такая каноническая регулярная последовательность $\mathcal{A}_c$, что $F_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{A}_c}$.

2) Если $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ — две канонические регулярные последовательности, то $F_{\mathcal{A}} = F_{\tilde{\mathcal{A}}}$ тогда и только тогда, когда последовательности $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ. Для всякого конечного регулярного ряда $a(t)$ существует такой канонический регулярный ряд $a_c(t)$, что $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} F(a_c(t))$. Если $a(t)$ и $\tilde{a}(t)$ — два канонических регулярных ряда, то $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} F(\tilde{a}(t))$ тогда и только тогда, когда ряды $a(t)$ и $\tilde{a}(t)$ эквивалентны.

Конечность ряда $a(t)$ в первом утверждении следствия на самом деле несущественна. Действительно, пусть $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l + \dots$ — бесконечный регулярный ряд. Выберем число l так, что соответствующая частичная сумма $\tilde{a}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l$ также является регулярным рядом; пусть $\tilde{\mathcal{A}} = (a_0, a_1, \dots, a_l)$. Слегка модифицируя доказательство теоремы 1, легко показать, что $\lim_{t \rightarrow 0} F(\tilde{a}(t)) = F_{\tilde{\mathcal{A}}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Таким образом, можно заменить бесконечный регулярный ряд на его частичную сумму.

В §1 развивается техника, необходимая для доказательства теоремы 1 (хорошие вложения редутивных алгебр). Следующий параграф посвящен доказательству теоремы 1. В §3 проводится доказательство теоремы 2. В качестве основного поля всюду рассматривается поле комплексных чисел.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе (а порой и помощь в ней). Автор также благодарен Д. А. Тимашеву за полезные обсуждения.

§1. Хорошие вложения редутивных алгебр

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — редутивные алгебры Ли, G и H — соответствующие группы Ли. Вложение $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ назовем *хорошим*, если индуцированный им гомоморфизм алгебр инвариантов присоединенного представления $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H$ является сюръективным. Другими словами, вложение является хорошим, если все инварианты присоединенного представления алгебры $\mathfrak{h}$ являются ограничениями (на $\mathfrak{h}$) некоторых инвариантов присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, имеет смысл говорить о хороших точных линейных представлениях: точное представление $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ будем называть хорошим, если вложение $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ является хорошим.

ПРИМЕРЫ. 1. Простейшие линейные представления алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ являются хорошими (это проверяется непосредственно).

2. Простейшие линейные представления исключительных алгебр Ли E_6 , E_7 , E_8 , F_4 и G_2 являются хорошими [3, §2, п. 2].

3. Простейшее линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ не является хорошим: ее алгебра инвариантов содержит пфаффиан pf_n , который не может быть получен с помощью ограничения инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая простая комплексная алгебра Ли имеет хорошее вложение либо в алгебру $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$, либо в алгебру $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ (при подходящих k и m).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех простых алгебр, кроме $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$, это утверждение следует из приведенных выше примеров. Поэтому достаточно доказать, что алгебра $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ обладает хорошим линейным вложением в алгебру Ли вида $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$.

Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — стандартные координаты на картановской подалгебре алгебры $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$. Рассмотрим вложение $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{gl}_{2n-1}(\mathbb{C})$, соответствующее сумме простейшего представления $\rho: \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C})$ и полуспинорного представления $\varphi: \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_{2n-1}(\mathbb{C})$ со старшим весом $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$. Покажем, что это вложение является хорошим. Алгебра инвариантов присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ имеет n свободных образующих; в качестве

них можно взять функции $F_k(A) = \text{tr } A^k$, $k = 2, 4, \dots, 2n - 2$, и пфаффиан pf_n . Ограничения этих функций на картановскую подалгебру имеют вид

$$F_k = 2(\varepsilon_1^k + \dots + \varepsilon_n^k), \quad \text{pf}_n = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n.$$

Веса полуспинорного представления имеют вид $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \dots \pm \varepsilon_n)$, причем берутся лишь выражения с четным числом минусов. Ограничение на картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ инварианта $G_n = \text{tr } A^n$, соответствующего полуспинорному представлению, имеет вид

$$\frac{1}{2^n} \sum (\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \dots \pm \varepsilon_n)^n,$$

причем в сумму включаются только слагаемые, для которых выражение в скобках содержит четное число минусов. Если n нечетно, то эта сумма равна $\frac{1}{2} \text{pf}_n$. Если же n четно, то получается выражение вида $\frac{1}{2} \text{pf}_n + H(\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_n^2)$, где H — некоторый многочлен. Ясно, что второе слагаемое выражается через инварианты F_i , $i \leq n$. Поскольку инварианты $F_2, \dots, F_{2n-2}$ получаются из простейшего представления, в обоих случаях (независимо от четности n) можно получить недостающую образующую — пфаффиан pf_n .

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая редуктивная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет хорошее вложение в алгебру Ли вида $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_{n_k}(\mathbb{C})$.*

Действительно, если $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2$ — хорошие вложения, то вложение $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ также является хорошим; осталось применить предложение 1 и заметить, что центр можно рассматривать как алгебру $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенных выше примеров следует, что для всех простых алгебр, кроме $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$, существует хорошее неприводимое линейное представление (и, более того, простейшее представление является хорошим). Было бы интересно узнать, существует ли хорошее представление для алгебры $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ при нечетном n (при четном n ответ на этот вопрос отрицателен, как показывает следствие из предложения 2, см. ниже). В работе [3] показано, что полуспинорное представление алгебры $\mathfrak{so}_{10}(\mathbb{C})$ со старшим весом $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)$ является хорошим. Возможно, что и при других нечетных n такое представление является хорошим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — свободная конечно порожденная градуированная алгебра и $F_1, \dots, F_n$ — набор однородных элементов, порождающих алгебру $\mathcal{A}$. Тогда из этих элементов можно выбрать набор свободных порождающих алгебры $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что во всякой конечно порожденной градуированной алгебре имеется набор однородных свободных порождающих. Рассмотрим однородные порождающие алгебры $\mathcal{A}$, имеющие наименьшую степень d_1 . Обозначим их количество через m_1 . Эти порождающие выражаются через $F_1, \dots, F_n$, причем элементы степеней меньше d_1 реально не участвуют в этом выражении, так как в алгебре $\mathcal{A}$ нет элементов степеней, меньших, чем d_1 . Поэтому в действительности все эти порождающие линейно выражаются через $F_1, \dots, F_n$, так что из этих элементов можно выбрать подмножество $F_{i_1}, \dots, F_{i_{m_1}}$ алгебраически независимых элементов степени d_1 . Пусть следующая (по возрастанию) степень образующих алгебры $\mathcal{A}$ равна d_2 , а количество образующих такой степени равно m_2 . Все эти образующие могут быть выражены через $F_{i_1}, \dots, F_{i_{m_1}}$ и элементы

степени, не меньшей, чем d_2 (элементы степеней, меньших, чем d_2 , выражаются через $F_{i_1}, \dots, F_{i_{m_1}}$). Поэтому можно выбрать элементы $F_{j_1}, \dots, F_{j_{m_2}}$ степени d_2 так, что все элементы $F_{i_1}, \dots, F_{i_{m_1}}, F_{j_1}, \dots, F_{j_{m_2}}$ алгебраически независимы. Продолжая так, мы в конце концов выберем из элементов $F_1, \dots, F_n$ систему свободных порождающих алгебры $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — хорошее вложение редутивных алгебр, $F_1, \dots, F_l$ — (однородные) базисные инварианты алгебры $\mathfrak{g}$ и $p: \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H$ — отображение ограничения. Тогда из многочленов $p(F_1), \dots, p(F_l)$ можно выбрать систему (однородных) свободных порождающих алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^H$.

Это следствие показывает, в частности, что у алгебры $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ при четном n не существует хорошего линейного представления. В самом деле, у этой алгебры имеется два базисных инварианта степени n , а в алгебре $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$ все базисные инварианты имеют разную степень.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — хорошее вложение, а $x \in \mathfrak{h}$ — полупростой элемент. Тогда вложение $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(x) \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$ также является хорошим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{g}$ — редутивная алгебра, а $x \in \mathfrak{g}$ — полупростой элемент. Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру, порожденную ограничениями на $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$ производных инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль вектора x , а через $\mathcal{B}$ — алгебру инвариантов алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (Э. Б. Винберг). Пусть S — этальный слайс в точке x . Соответствующее слайс-представление есть присоединенное представление централизатора $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$. Пусть $\mathcal{C}$ — алгебра ограничений инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ на слайс S . По теореме Луны об этальном слайсе $\widehat{\mathcal{B}}_x = \widehat{\mathcal{C}}_x$. Очевидно, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$; поэтому $\widehat{\mathcal{A}}_x = \widehat{\mathcal{B}}_x$. Но алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ градуированные; поэтому из совпадения пополнений следует совпадение самих алгебр. Лемма доказана.

Пусть $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]_x^G$ (соответственно $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_x^H$) обозначает алгебру, порожденную сдвигами инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{h}$) на элемент x . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{g}]_x^G & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_x^H \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \mathbb{C}[\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)]^{Z_G(x)} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(x)]^{Z_H(x)} \end{array}$$

(здесь φ и ψ — отображения алгебр функций, индуцированные вложениями $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(x) \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$, p и q — отображения ограничения). Из условия следует, что отображение φ сюръективно, а по лемме отображение q сюръективно; поэтому композиция $q \circ \varphi = \psi \circ p$ тоже сюръективна. Значит, ψ сюръективно, что и требовалось доказать.

§2. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 будет доказана в два этапа. Сначала мы покажем, что справедливо включение $F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$, а затем установим, что имеет место равенство $F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ (и попутно докажем, что алгебра $F_{\mathcal{A}}$ свободна). Включение

$F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ сначала будет доказано для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (лемма 1), а затем для произвольной редуktивной алгебры Ли (лемма 2). Но для начала мы отметим следующее полезное соображение:

ЛЕММА 0. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуktивная алгебра Ли, $a \in \mathfrak{g}$ — полупростой элемент и $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Тогда $F(a) = F(a + z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование вдоль элемента z переводит инварианты алгебры $\mathfrak{g}$ в инварианты. Отсюда следует, что производные инвариантов вдоль вектора $a + z$ выражаются через производные инвариантов вдоль вектора a , так что $F(a + z) \subset F(a)$. Меняя a и $a + z$ местами, получим обратное включение. Лемма доказана.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ — регулярная последовательность элементов картановской подалгебры алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ и $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l$ — соответствующий степенной ряд. Тогда $F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что все порождающие элементы алгебры $F_{\mathcal{A}}$ лежат в алгебре $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. По определению алгебра $F_{\mathcal{A}}$ имеет систему порождающих, состоящую из производных базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ вдоль вектора a_0 , производных базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_0$ вдоль $a_1, \dots$, производных базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_{l-1}$ вдоль a_l и инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_l = \mathfrak{h}$. Покажем, что все элементы этой системы порождающих лежат в алгебре $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Будем считать, что картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ — это подалгебра диагональных матриц.

Дальнейшие рассуждения основаны на следующем соображении. Пусть имеется произвольный многочлен от производных инвариантов вдоль вектора $a(t)$. Запишем его в виде ряда от переменной t : $P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots$, где $P_i \in \mathcal{P}\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Если $P_0 = \dots = P_k = 0$, $P_{k+1} \neq 0$, то $P_{k+1} \in \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. В частности, очевидно, что все производные базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ вдоль вектора a_0 лежат в алгебре $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$.

Рассмотрим теперь подалгебру $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})}(a_0)$. Перенумеровав при необходимости базисные векторы пространства $\mathbb{C}^n$, можно считать, что элемент a_0 имеет вид $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ попарно различны. Тогда подалгебра $\mathfrak{z}_0$ имеет вид $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_{n_k}(\mathbb{C})$ (здесь n_i — количество чисел λ_i на диагонали) и вложена в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ в виде блочно-диагональных матриц.

В качестве базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ можно взять многочлены $P_1, \dots, P_n$, где P_i — сумма главных миноров порядка i . В качестве базисных инвариантов подалгебры $\mathfrak{z}_0$ можно взять объединение базисных инвариантов компонент $\mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{C})$ для $i = 1, \dots, k$, а именно, сумм главных миноров соответствующих подматриц. Покажем, что все эти инварианты и их производные вдоль a_1 лежат в алгебре $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Рассмотрим компоненту $\mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{C})$. Положим $a^{(i)}(t) = (a_0 - \lambda_i E) + a_1 t + \dots + a_l t^l$, где E — единичная матрица. Заметим, что $F(a(t)) = F(a^{(i)}(t))$ при любом малом $t \neq 0$ (в силу леммы 0). Пусть H — базисный инвариант рассматриваемой компоненты $\mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{C})$, который является суммой главных миноров порядка r . Тогда, как легко видеть, $H = D_{a_0 - \lambda_i E}^q P_{r+q}$, где $q = n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i+1} + \dots + n_k$, а P_{r+q} — базисный инвариант исходной алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. При этом следующая производная многочлена P_{r+q} вдоль вектора $a_0 - \lambda_i E$ равна нулю; поэтому $D_{a^{(i)}(t)}^{k+l} P_{r+q} = t^l D_{a_1}^l (D_{a_0 - \lambda_i E}^k P_{r+q}) + \dots = t^l D_{a_1}^l H + \dots$, где остальные члены содержат t в большей степени. Значит (в силу

соображения, которое приведено выше), все производные инварианта H вдоль a_1 лежат в подалгебре $\lim_{t \rightarrow 0} F(a^{(i)}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$.

Для производных базисных инвариантов подалгебр $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots$ рассуждение аналогично. Действительно, каждый следующий централизатор есть прямая сумма своих пересечений с компонентами предыдущего централизатора, а для каждого такого пересечения можно рассмотреть аналогичную конструкцию. Конечно, при этом придется «подправлять» уже следующие члены ряда $a(t)$; скажем, для подалгебры $\mathfrak{z}_1$ нужно рассматривать ряды вида $a^{(i,j)}(t) = (a_0 - \lambda_i E) + (a_1 - \mu_j E)t + \dots + a_l t^l$, где μ_j — числа, стоящие на диагонали матрицы a_1 . В остальном рассуждение остается без изменений.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли, $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots)$ — регулярная последовательность элементов картановской подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$ и $a(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l$ — соответствующий степенной ряд. Тогда $F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$.

Доказательство. Мы покажем вначале, что если $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ — хорошее вложение редуктивных алгебр Ли и доказываемое утверждение верно для алгебры $\mathfrak{g}$, то оно верно и для алгебры $\mathfrak{s}$.

Рассмотрим регулярную последовательность $\mathcal{A} = (a_0, a_1, \dots, a_l)$ элементов алгебры $\mathfrak{s}$. С точки зрения алгебры $\mathfrak{g}$ эта последовательность может не быть регулярной; в этом случае дополним ее до регулярной последовательности $\tilde{\mathcal{A}} = (a_0, a_1, \dots, a_l, a_{l+1})$ так, чтобы элемент $a_{l+1} \in \mathfrak{g}$ был ортогонален картановской подалгебре алгебры $\mathfrak{s}$. Пусть $\tilde{a}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_l t^l + a_{l+1} t^{l+1}$ — соответствующий регулярный ряд. Условимся обозначать через $F_{\tilde{\mathcal{A}}}$ и $F(\tilde{a}(t))$ подалгебры алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{g}$, построенные с помощью последовательности $\tilde{\mathcal{A}}$ и ряда $\tilde{a}(t)$, а через $F_{\mathcal{A}}$ и $F(a(t))$ подалгебры алгебры $\mathcal{P}\mathfrak{s}$, построенные по последовательности $\mathcal{A}$ и ряду $a(t)$ соответственно. Также положим $\tilde{\mathfrak{z}}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{s}}(a_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{s}}(a_i)$, $\tilde{\mathfrak{z}}_i = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_0) \cap \dots \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a_i)$.

По предположению имеем $F_{\tilde{\mathcal{A}}} \subset F(\tilde{a}(t))$. Применим к этому включению отображение ограничения $p: \mathcal{P}\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{P}\mathfrak{s}$. Поскольку все вложения $\tilde{\mathfrak{z}}_i \subset \mathfrak{z}_i$ ($i = 0, \dots, l$) являются хорошими (многократно применяем предложение 3 из §1), ясно, что $p(F_{\tilde{\mathcal{A}}}) = F_{\mathcal{A}}$ (производные инвариантов алгебры $\tilde{\mathfrak{z}}_i$ вдоль вектора a_{l+1} , как легко видеть, переходят в нуль при отображении p).

С другой стороны, $F(a(t)) = p(F(\tilde{a}(t)))$; поэтому

$$p\left(\lim_{t \rightarrow 0} F(\tilde{a}(t))\right) \subset \lim_{t \rightarrow 0} p(F(\tilde{a}(t))) = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t)).$$

Следовательно,

$$F_{\mathcal{A}} = p(F_{\tilde{\mathcal{A}}}) \subset p\left(\lim_{t \rightarrow 0} F(\tilde{a}(t))\right) \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t)),$$

т. е. $F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что любая редуктивная алгебра может быть хорошо вложена в алгебру вида $\mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_{n_k}(\mathbb{C})$ (см. следствие предложения 1 из §1), для которой доказываемое утверждение верно (в силу леммы 1 и следующего очевидного соображения: если утверждение леммы 2 верно для алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, то оно верно и для алгебры $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$).

Первый этап доказательства завершен. Остается показать, что всегда имеет место равенство $F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Для этого напомним следующий результат А. В. Браилова:

ТЕОРЕМА [1]. В обозначениях из введения пусть $a \in \mathfrak{h}$ — произвольный элемент и $\Delta_a \subset \Delta$ — подсистема корней, обращающихся в нуль на элементе a . Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ — система простых корней системы корней Δ , согласованная с подсистемой Δ_a (это означает, что некоторое подмножество $\Pi_a \subset \Pi$ является системой простых корней для Δ_a), и $e = \sum e_{\alpha_i}$ — соответствующий главный нильпотентный элемент. В алгебре $F(a)$ можно выбрать однородные элементы $P_1, \dots, P_k$, $k = \frac{1}{2} \dim[a, \mathfrak{g}]$, со следующими свойствами:

(1) проекции градиентов функций P_i в точке e на подпространство $[a, \mathfrak{g}]$ вдоль $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a)$ линейно независимы;

(2) набор степеней элементов P_i есть набор высот, увеличенных на 1, положительных корней из $\Delta \setminus \Delta_a$.

В качестве таких элементов можно взять некоторые производные базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$ вдоль вектора a .

Из свойства (1) следует, что элементы $P_1, \dots, P_k$ алгебраически независимы. Более того, если имеется произвольное семейство алгебраически независимых функций $Q_1, \dots, Q_m \subset \mathcal{P}_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a)}$, то все функции $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_m$ алгебраически независимы. В самом деле, существует такое непустое открытое (по Зарисскому) подмножество $X_0 \subset \mathfrak{g}$, что для любой точки $x \in X_0$ проекции градиентов функций $P_1, \dots, P_k$ в точке x на подпространство $[a, \mathfrak{g}]$ линейно независимы. С другой стороны, во всех точках некоторого непустого открытого (по Зарисскому) подмножества $X_1 \subset \mathfrak{g}$ градиенты функций $Q_1, \dots, Q_m$ линейно независимы (и лежат в подпространстве $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(a)$). Поэтому в любой точке пересечения $X_0 \cap X_1$ градиенты всех функций $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_m$ линейно независимы.

Из этого легко вывести, пользуясь индукцией, что в алгебре $F_{\mathcal{A}}$ можно указать набор алгебраически независимых однородных элементов, набор степеней которых есть набор высот, увеличенных на 1, всех положительных корней из Δ , к которому добавлено еще $\text{rk } \mathfrak{g}$ единиц. В самом деле, при построении алгебры $F_{\mathcal{A}}$ (см. введение) на первом шаге появляются элементы, соответствующие корням, не равным нулю на a_0 , на втором шаге — элементы, соответствующие корням, равным нулю на a_0 , но не равным нулю на a_1 , и т. д.; перед последним шагом имеются уже элементы, соответствующие всем корням, и на последнем шаге добавляются еще $\text{rk } \mathfrak{g}$ элементов первой степени (базис пространства $\mathfrak{h}^*$).

Рассмотрим подалгебру $F'_{\mathcal{A}} \subset F_{\mathcal{A}}$, порожденную этими элементами. В силу сказанного выше степени образующих этой свободной алгебры такие же, как и у подалгебр Мищенко–Фоменко; поэтому эти алгебры имеют один и тот же ряд Пуанкаре. С другой стороны, предельная подалгебра $\lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ имеет тот же ряд Пуанкаре, что и подалгебры Мищенко–Фоменко. Итак, $F'_{\mathcal{A}} \subset F_{\mathcal{A}} \subset \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$, причем первая и третья алгебры имеют один и тот же ряд Пуанкаре. Следовательно, на самом деле $F'_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$. Таким образом, равенство $F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ доказано. Поскольку $F'_{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{A}}$, алгебра $F_{\mathcal{A}}$ свободна. Чтобы закончить доказательство второго утверждения теоремы 1, достаточно вновь сослаться на теорему Браилова, согласно которой при выборе в алгебре $F_{\mathcal{A}}$ алгебраически независимых элементов мы можем на

каждом шаге брать некоторые производные базисных инвариантов алгебры $\mathfrak{z}_{k-1}$ вдоль a_k .

Теорема 1 полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Докажем первое утверждение теоремы 2. Прежде всего, по лемме 0 из § 2 подалгебра $F_{\mathcal{A}}$ не изменится, если каждый элемент a_i заменить его проекцией на полупростую часть подалгебры $\mathfrak{z}_{i-1}$, так что условие (C1) будет выполнено. Покажем теперь, что можно добиться выполнения условия (C2). Мы будем обеспечивать его выполнение по очереди для каждого i . Продемонстрируем это на примере $i = 0$. Пусть a_0 имеет нулевые проекции на какие-то простые компоненты алгебры $\mathfrak{g}$. Выберем для каждой такой компоненты наименьший номер j , для которого a_j имеет ненулевую проекцию на эту компоненту, вычтем соответствующую компоненту из a_j и прибавим к a_0 . Легко видеть, что при этом алгебра $F_{\mathcal{A}}$ не изменится (достаточно следить отдельно за инвариантами каждой простой компоненты алгебры $\mathfrak{g}$; «перенесение» не влияет на инварианты остальных компонент, а для рассматриваемой компоненты лишь изменяет номер шага, на котором происходит первое дифференцирование, не изменяя последующих дифференцирований). Продолжая так, мы постепенно добьемся выполнения условия (C2) на всех шагах (возможно, ненужные последние элементы надо будет выкинуть) и получим искомую каноническую регулярную последовательность $\mathcal{A}_c$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы 2. Если последовательности $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ эквивалентны, то равенство $F_{\mathcal{A}} = F_{\tilde{\mathcal{A}}}$ непосредственно следует из определения. Обратно, пусть последовательности $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ не эквивалентны. Тогда соответствующие предельные подалгебры $F_{\mathcal{A}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(a(t))$ и $F_{\tilde{\mathcal{A}}} = \lim_{t \rightarrow 0} F(\tilde{a}(t))$ имеют разные пересечения с пространством $\mathcal{P}_2 \mathfrak{g}$ (см. [2]) и потому различны.

Теорема 2 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браилов А. В. Некоторые свойства вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Дисс. к. ф.-м. н., М., 1984.
2. Винберг Э. Б. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры. Изв. АН СССР, сер. матем., **54**, № 1, 3–25 (1990).
3. Доан Куинь. Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **14**, 33–93 (1968).
4. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела. Функциональный анализ и его прил., **10**, вып. 4, 93–94 (1976).
5. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, **19**, 3–94 (1979).