Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:37:02

Линейные отношения, дифференциальные включения и вырожденные полугруппы*

© 2002. А. Г. БАСКАКОВ, К. И. ЧЕРНЫШОВ

Пусть X — комплексное банахово пространство. *Линейным отношением* на X называется линейное подпространство $A \subset X \times X$. Введем в рассмотрение основные понятия из теории линейных отношений и в связи с этим упомянем о двух недавно вышедших монографиях [1, 2], где имеется обширная библиография. В определении линейного отношения мы следуем А. Аренсу [3] и не всегда придерживаемся терминологии из [1, 2] (в частности, избегаем использовать термин «многозначный оператор»). Отметим, что приложения теории бинарных отношений в гильбертовом пространстве к теории дифференциальных операторов рассмотрены в [4].

Подпространство $D(A) = \{x \in X \mid \text{существует } y \in X, \text{ такой, что } (x, y) \in A\}$ из X называется *областью определения* отношения $A \subset X \times X$. Через Ax , где $x \in D(A)$, обозначается множество $\{y \in X \mid (x, y) \in A\}$, $\text{Ker } A = \{x \in D(A) \mid 0 \in Ax\}$ — *ядро* отношения A и $\text{Im } A = \{y \in X \mid \text{существует } x \in D(A), \text{ такой, что } (x, y) \in A\}$ — область его значений. Если линейное отношение $A \subset X \times X$ является графиком некоторого линейного оператора $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset X \rightarrow X$, то в дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ A . Если $A \subset X \times X$ — линейное отношение, то отношение $A^{-1} \subset X \times X$ определяется равенством $A^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in A\}$.

Резольвентным множеством линейного отношения $A \subset X \times X$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых отношение $(A - \lambda I)^{-1} \subset X \times X$ принадлежит банаховой алгебре $\text{End } X$ линейных ограниченных операторов, действующих в X . Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* отношения A . Обычным образом доказывается, что множество $\rho(A)$ открыто, спектр $\sigma(A)$ замкнут, а его резольвента $R(\cdot) = R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } X$, $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, является псевдорезольвентой в общепринятом смысле, причем $A0 = \text{Ker } R(\lambda_0, A)$ для любого $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Если $B \in \text{End } X$ — квазинильпотентный оператор, то линейное отношение $B^{-1} \subset X \times X$ имеет пустой спектр. Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра линейного отношения, далее используется следующее понятие.

Расширенным спектром (линейного) отношения $A \subset X \times X$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(A)$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(A)$, если $A0 = \{0\}$ (т.е. A — линейный оператор), резольвента $R(\cdot, A)$ отношения A допускает голоморфное расширение в точку ∞ и $R(\infty, A) = 0$. В противном случае полагается $\tilde{\sigma}(A) = \sigma(A) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(A) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(A)$ называется *расширенным резольвентным множеством* отношения A . Отметим, что если $X \neq \{0\}$, то $\tilde{\sigma}(A) \neq \emptyset$ для любого отношения $A \subset X \times X$, причем $\infty \in \tilde{\sigma}(A)$, если $\dim A0 \geq 1$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 01-01-00408.

Линейные отношения могут возникать при исследовании линейных дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной, разрешимость которых естественным образом сводится к дифференциальному включению с линейным отношением $A \subset X \times X$. Например, построение решений в [2] велось с использованием полугруппы линейных операторов, генератором которой служило отношение A . Однако ограничения на A из [2] не позволяли рассматривать важные классы дифференциальных включений даже в конечномерном пространстве X (см. замечание 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \subset X \times X$ — линейное отношение. Тогда

$$\tilde{\sigma}(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \tilde{\sigma}(A)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $A \subset X \times X$ — линейное отношение и $\mu \in \rho(A)$, то $\sigma(R(\mu, A)) = \{(\mu - \lambda)^{-1}, \lambda \in \tilde{\sigma}(A)\}$.

Утверждение следствия 1 было получено в [1, Theorem V.4.2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A \subset X \times X$ — линейное отношение. Тогда $\tilde{\sigma}(A) = \{\infty\}$ в том и только в том случае, когда $A^{-1} \in \text{End } X$ — квазинильпотентный оператор (при этом A^{-1} — нильпотентный оператор, если $R(\cdot, A)$ — многочлен).

СЛЕДСТВИЕ 3. Для линейного отношения $A \subset X \times X$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $A \in \text{End } X$;
- 2) $\infty \notin \tilde{\sigma}(A)$;
- 3) $0 \notin \sigma(A^{-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любая псевдорезольвента $\mathcal{R}: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End } X$, определенная на открытом множестве U из $\mathbb{C}$, является резольventой линейного отношения $A = (\mathcal{R}(\lambda_0))^{-1} + \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \in U$, причем $\rho(A) \supset U$ и отношение A не зависит от выбора числа λ_0 . Кроме того, для любого числа $\mu_0 \in \mathbb{C}$ любой оператор $B \in \text{End } X$ может быть представлен в виде $B = R(\mu_0, B^{-1} + \mu_0 I)$.

Доказательство теоремы 3.6 в [5] может быть основано на утверждении из замечания 1.

Далее считается выполненным

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Резольventное множество $\rho(A)$ линейного отношения $A \subset X \times X$ непусто.

ТЕОРЕМА 2. Для линейного отношения $A \subset X \times X$ следующие условия эквивалентны:

- 1) точка ∞ является полюсом порядка $m - 2$ функции $R(\cdot, A)$;
- 2) $A^{m-1}0 \subset A^m 0 = A^{m+1}0$, $D(A^{m-1}) \supset D(A^m) = D(A^{m+1})$ для некоторого $\lambda_0 \in \rho(A)$ (включения строгие);
- 3) пространство X представимо в виде прямой суммы $X_0 \oplus X_\infty$ инвариантных относительно A замкнутых подпространств X_0, X_∞ , причем сужение A_0 отношения A на X_0 принадлежит $\text{End } X_0$, $\sigma(A_0) = \sigma(A)$ и, кроме того, $\tilde{\sigma}(A_\infty) = \{\infty\}$, $A_\infty^{-1} \in \text{End } X_\infty$, $(A_\infty^{-1})^m = 0$ для сужения A_∞ отношения A на X_∞ , причем $(A_\infty^{-1})^{m-1} \neq 0$.

Отметим, что если выполнено условие 2), то фигурирующие в исследовании подпространства имеют вид $X_\infty = A^m 0$, $X_0 = D(A^m)$, причем $D(A^m) = \text{Im } R(\lambda_0, A)^m$ для любого $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Рассмотрим дифференциальное операторное включение

$$\dot{x}(t) \in A x(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \in D(A), \quad (2)$$

где $A \subset X \times X$ — линейное отношение. Дифференцируемая функция $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которой $x(0) = x_0$, $x(t) \in D(A)$ для любого $t > 0$, называется *решением* задачи Коши (1)–(2), если она удовлетворяет включению (1).

Замыкание множества начальных условий вида (2), для которых существует решение задачи (1)–(2), назовем *фазовым пространством* дифференциального включения (1) и обозначим его символом Φ_A .

ТЕОРЕМА 3. *Если отношение $A \subset X \times X$ удовлетворяет одному из условий теоремы 2, то каждое решение $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ задачи (1)–(2) с $x_0 \in X_0$ определяется с помощью аналитической группы операторов $\{\exp A_0 t, t \in \mathbb{R}\}$ и имеет вид $x(t) = (\exp A_0 t)x_0$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. $\Phi_A = X_0$.*

Далее построение фазового пространства Φ_A будем осуществлять в условиях следующего предположения относительно отношения A .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Существует число $m \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{\lambda_n\} \subset \rho(A)$, такие, что

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$;
- 2) $\sup_{n \geq 1} \{|\lambda_n^m| \cdot \|(R(\lambda_n, A))^m\|\} < \infty$.

Предположение 2, например, выполнено, если имеет место одно из условий теоремы 2.

В условиях предположения 2 введем в рассмотрение ограниченную последовательность операторов

$$\mathcal{A}_n = I - (-\lambda_n R(\lambda_n, A))^m, \quad n \geq 1,$$

из алгебры $\text{End } X$ и (замкнутое) подпространство

$$\tilde{X} = \left\{ x \in X : \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n x \right\}.$$

Это подпространство инвариантно относительно A , и поэтому можно рассмотреть сужение $\tilde{A}$ отношения A на $\tilde{X}$.

ЛЕММА 1. *Подпространство $\tilde{X}$ в условиях предположения 2 допускает прямое разложение вида*

$$\tilde{X} = X_m \oplus X^{(m)}, \quad (3)$$

где X_m , $X^{(m)}$ — замкнутые инвариантные относительно A подпространства, $X_m = A^m 0$, и

$$\tilde{A} = A_m \oplus A^{(m)},$$

где A_m , $A^{(m)}$ — сужения отношения $\tilde{A}$ на X_m , $X^{(m)}$ соответственно, $\tilde{\sigma}(A_m) = \{\infty\}$, $A_m^{-m} = 0$ и $A^{(m)}$ — линейный замкнутый оператор со спектром $\sigma(A^{(m)}) = \sigma(\tilde{A})$.

Обозначим через X^* сопряженное к X банахово пространство и через $A^* \subset X^* \times X^*$ сопряженное к A линейное отношение (см. [2, Sec. 1.5]).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнено предположение 2. Для того чтобы выполнялось равенство $\tilde{A} = A$ (т. е. $\tilde{X} = X$), необходимо и достаточно, чтобы векто-*

ры из подпространства $X_m = A^m 0$ разделяли функционалы из подпространства $X_m^* = (A^*)^m 0$. В частности, $\tilde{X} = X$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) X — рефлексивное банахово пространство;
- 2) $R(\lambda_0, A) \in \text{End } X$ — слабо компактный оператор при некотором $\lambda_0 \in \rho(A)$;
- 3) $\dim X_m = \dim X_m^* < \infty$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Существуют такие числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\text{Re } \lambda > \omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки (типа Хилле–Филлипса–Иосиды)

$$\|(R(\lambda, A))^{mn}\| \leq \frac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)^{mn}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если выполнено предположение 3, то предположение 2 справедливо для любой последовательности (λ_n) из $\mathbb{R}_+$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Сильно непрерывную полугруппу линейных операторов $\{T(t); t \geq 0\}$ из алгебры $\text{End } X$ назовем *вырожденной* полугруппой операторов класса C_0 (C_0 -полугруппой), если $T(0) \neq I$. В этом случае определение полугруппы влечет за собой равенство $T(0) = P_1$, где P_1 — проектор на подпространство $X_1 = \text{Im } P_1$. Сужение полугруппы T на X_1 определяет C_0 -полугруппу операторов $\{T_1(t); t \geq 0\}$ из $\text{End } X_1$ и поэтому существуют постоянные $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, такие, что $\|T(t)\| \leq M \exp \omega t$, $t \geq 0$. Функция

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \text{Re } \lambda > \omega,$$

является псевдорезольвентой, и, следовательно, существует единственное линейное отношение $A \subset X \times X$, резольвентой которого является функция R . Это линейное отношение назовем *генератором* вырожденной полугруппы $\{T(t); t \geq 0\}$. Нетрудно видеть, что $\text{Ker } T(0) = A0$.

Обратимся к включению (1). Пусть выполнено предположение 2 (или, в частности, предположение 3), причем $\dim A0 \geq 1$, т. е. $A \subset X \times X$ — линейное отношение, не являющееся линейным оператором. Вырожденную полугруппу операторов $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ из алгебры $\text{End } \tilde{X}$ назовем *разрешающей* вырожденной полугруппой для включения (1) на подпространстве $X^{(m)}$ из $\tilde{X}$, если выполнены следующие два условия:

- 1) $x(t) = \tilde{T}(t)x_0$, $t \in \mathbb{R}_+$, — решение включения (1) при любом векторе x_0 из некоторого плотного в $X^{(m)}$ подпространства;
- 2) $\tilde{T}(0) = P^{(m)}$, где $P^{(m)} \in \text{End } \tilde{X}$ — проектор, отвечающий разложению (3) подпространства $\tilde{X}$ (т. е. $\text{Im } P^{(m)} = X^{(m)}$ и $\text{Ker } P^{(m)} = X_m$).

Непосредственно из этого определения следует, что генератором сужения полугруппы $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ на $X^{(m)}$ служит сужение $A^{(m)}$ отношения A на $X^{(m)}$, которое, согласно лемме 1, является линейным замкнутым оператором. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено предположение 3 и $\dim A0 \geq 1$. Тогда $\Phi_A \cap \tilde{X} = X^{(m)}$ и существует единственная разрешающая полугруппа операторов $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\} \subset \text{End } \tilde{X}$ для включения (1) на подпространстве $\tilde{X}$, генератором

которой служит сужение $A^{(m)}$ отношения A на $X^{(m)}$. Если векторы из подпространства $X_m = A^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $X_m^* = (A^*)^m 0 \subset X^*$, то $\{\tilde{T}(t); t \geq 0\}$ — вырожденная разрешающая полугруппа операторов на банаховом пространстве $X = \tilde{X}$. В частности, если $A^m 0$ — конечномерное подпространство из X , то $\Phi_A = X^{(m)}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено предположение 2 и существуют числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, такие, что для всех $x \in X^{(m)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\|(R(\lambda, A))^n x\| \leq \frac{M \|x\|}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}.$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 5.

Линейное отношение $A \subset X \times X$ называется *секториальным* или *m -секториальным* (ср. [6]), если для некоторых $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, $M \geq 1$ сектор $\Omega = \Omega_{a, \theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \theta, \lambda \neq a\}$ содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ отношения A и существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\|(R(\lambda, A))^m\| \leq M |\lambda - a|^{-m} \quad \text{для любого } \lambda \in \Omega_{a, \theta}. \quad (4)$$

Отметим, что для гильбертовых пространств соответствующее определение дано в статье [7]; там же были получены некоторые свойства секториальных отношений. Данное нами определение секториального отношения отличается знаком от общепринятого определения секториального оператора в гильбертовом пространстве [8].

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Отношение $A \subset X \times X$ является секториальным.

Выберем жорданов контур γ , окружающий $\sigma(A)$, так, чтобы он при достаточно больших значениях $|\lambda|$ лежал на лучах $|\arg \lambda| = \theta_1 = \theta - \varepsilon \in (\pi/2, \pi)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Введем рассмотрение полугруппу операторов $\{T(t); t > 0\}$ с помощью формулы

$$T(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda. \quad (5)$$

Корректность определения в (5) вытекает из оценки $\|R(\lambda, A)\| \leq M_1 |\lambda - a|^{m-2}$ для любого $\lambda \in \Omega_{a, \theta}$ с $M_1 > 0$, которая следует из (4) после m -кратного интегрирования правой части формулы (5) и замены $\lambda = \mu t$.

Отметим, что для секториального отношения $A \subset X \times X$ выполнено предположение 2, и поэтому можно рассматривать замкнутое подпространство $\tilde{X}$ и разложение $\tilde{X} = X_m \oplus X^{(m)}$. Также верна теорема 4 об условиях, обеспечивающих выполнение равенства $\tilde{X} = X$.

ТЕОРЕМА 7. В условиях предположения 4 справедливы следующие утверждения:

- 1) $X^{(m)} = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +0} T(t)x = x\}$, $X_m = \bigcap_{t > 0} \operatorname{Ker} T(t)$;
- 2) сужение $\{T^{(m)}(t); t \geq 0\}$ полугруппы $\{T(t); t \geq 0\}$ на подпространство $X^{(m)}$ является сильно непрерывной при $t \geq 0$ полугруппой, $T(0) = I^{(m)}$ — тождественный оператор в $X^{(m)}$, причем $\{T^{(m)}(t)\}$ допускает голоморфное расширение в некоторый сектор, содержащий $\mathbb{R}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задача Коши $x(0) = x_0 \in X$ для линейного дифференциального уравнения

$$F\dot{x} = Gx, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

с парой линейных замкнутых (в частности, ограниченных) операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , при $\text{Ker } F \neq \{0\}$ стандартным образом сводится к дифференциальному включению вида (1), где $A = F^{-1}G \subset X \times X$, и такой прием систематически используется в монографии [2] (см. также [9]).

В [2] в отличие от сделанных нами предположений 2–4 считались выполненными аналоги этих предположений при $m = 1$ (см., например, §3 гл. 1 и §1 гл. 3). Отметим, что условие $m = 1$ не позволяет рассматривать дифференциальное уравнение вида (6) даже в конечномерном пространстве X , если, например, предположение 2 выполнено с $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \dim A^k 0 = \dim A^{k+1} 0\} > 1$. Кроме того, в [2] отсутствуют условия (кроме условия рефлексивности исходного пространства), обеспечивающие выполнение равенства $\tilde{X} = X$. Отметим, что это равенство для гильбертова пространства получено в статье [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Случай $m > 1$ изучался в [9] методами n -интегрированных полугрупп, причем основные результаты приведены при априорном требовании $X = X_m \oplus X^{(m)}$ (в обозначениях из леммы 1).

В заключение отметим, что результаты настоящей заметки базируются на проведенных авторами исследованиях [10–14] по эргодической теории и разрешимости дифференциальных уравнений вида (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cross R. Multivalued linear operators. M. Dekker, New York, 1998.
2. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 215. M. Dekker. New York, 1998.
3. Arens R. Pacific J. Math., **11**, 9–23 (1961).
4. Ахизер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 2. Изд-во Харьк. гос. ун-та, Харьков, 1978.
5. Arendt W. Tübinger Berichte für Funktionalanalysis, **9**, 33–46 (1999/2000).
6. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Мир, М., 1985.
7. Рофе-Бекетов Ф. С. ДАН СССР, **255**, №5, 1054–1058 (1980).
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Мир, М., 1972.
9. Мельникова И. В., Гладченко А. В. Докл. РАН, **361**, №6, 736–739 (1998).
10. Баскаков А. Г. Изв. вузов, сер. матем., №11 (318), 3–11 (1988).
11. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Изв. РАЕН. МММИУ, **2**, №3, 39–69 (1998).
12. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Изв. РАЕН. МММИУ, **3**, №3, 5–24 (1999).
13. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Докл. РАН, **371**, №3, 295–298 (2000).
14. Baskakov A. G., Chernyshov K. I. In: Spectral and Evolution Problems, Vol. 11 (Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Math. School), Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol, 2001, pp. 136–143.

Воронежский государственный университет
e-mail: pmmmmio@main.vsu.ru

Воронежская государственная лесотехническая академия
e-mail: chern@vsau.ru

Поступило в редакцию
1 ноября 2001 г.