Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Костов, Конфигурации корней для гиперболических многочленов степени 3, 4 и 5, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 71–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 07:57:44

УДК 512.622

Конфигурации корней для гиперболических многочленов степени 3, 4 и 5

© 2002. В. П. Костов

Посвящается памяти моей матери

1. Введение. Вещественный многочлен степени n одной вещественной переменной называется *гиперболическим* (соответственно *строго гиперболическим*), если все его корни вещественные (соответственно вещественные и разные). Производные всех порядков, не превосходящих $n - 1$, (строго) гиперболического многочлена (строго) гиперболически. Если коэффициенты многочлена зависят от параметров, то множество наборов значений параметров, для которых многочлен имеет только вещественные корни, называется *областью гиперболичности*. Обозначим через x_j^i корни i -й производной гиперболического многочлена степени n , $x_1^i \leq \dots \leq x_{n-i}^i$. Из стандартной теоремы Ролля вытекает, что для $k > i$, $j = 1, \dots, n - k$ имеют место неравенства

$$x_j^i \leq x_j^k \leq x_{j+k-i}^i \quad (1)$$

со строгими неравенствами для строго гиперболического многочлена. Рассматривается вопрос, какие *невыврожденные конфигурации* (т. е. конфигурации, удовлетворяющие условию (1) без равенств вида $x_{j_1}^{i_1} = x_{j_2}^{i_2}$ для каких-либо $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$) реализуются корнями гиперболического многочлена и его производных. Для $n = 1, 2$ или 3 все такие конфигурации реализуемы, но для $n = 4$ две из 12 конфигураций не реализуются гиперболическими многочленами, см. разд. 2 (но они реализуются негиперболическими многочленами степени выше 4).

ТЕОРЕМА 1. *Имеются ровно 116 невырожденных конфигураций, которые реализуются корнями гиперболического многочлена степени 5 и его производных порядка не выше 4.*

Эта теорема и остальные результаты настоящей заметки доказаны в [5].

С другой стороны, имеются 286 невырожденных конфигураций, удовлетворяющих условию (1) (для любого n это число равняется $(C_{n+1}^2)! \frac{1!2!\dots(n-1)!}{1!3!\dots(2n-1)!}$, см. [11] или [12]). Отсутствие некоторых конфигураций тесно связано с присутствием *переопределенных стратов* в любом семействе общего положения многочленов степени ≥ 4 со старшим коэффициентом 1 (см. разд. 3).

В [8] показано, что все конфигурации, удовлетворяющие условию (1), состоящие из корней гиперболического многочлена и одной из его производных, реализуются. Это неверно для конфигураций, состоящих из корней двух производных гиперболического многочлена (см. замечание 3). Изучение гиперболических многочленов было начато в работах [2–4, 6, 7]. Некоторые результаты были получены параллельно в статьях [9] и [10]; случай $n = 4$ упоминается в [1]. Рассматриваемые здесь проблемы сформулированы В. И. Арнольдом и Б. З. Шапиро; они же привлекли к этим проблемам внимание автора. Автор выражает им свою самую искреннюю благодарность.

2. Случай $n = 2$ и 3. Рассмотрим семейство общего положения многочленов $P(x, a) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Обозначим через Π^* его область

гиперболичности. Можно положить $a_1 = 0$, чего можно добиться сдвигом переменной x . Следовательно, P будет гиперболическим лишь при $a_2 \leq 0$ и при $a_2 = 0$ он будет гиперболическим, только если $a_2 = \dots = a_n = 0$. Положим (для $t \in \mathbb{R}$) $\tilde{a}_j = e^{jt} a_j$. Имеет место равенство $P(e^t x, \tilde{a}) = e^{nt} P(x, a)$. Вот почему изучение Π^* сводится к изучению $\Pi = \Pi^*|_{a_1=0, a_2=-1}$. Чтобы изучить возможные невырожденные конфигурации корней многочлена P и его производных, можно изучить *дискриминанты* $D(i, j) = \{(a_2, \dots, a_n) \in \Pi \mid \text{Res}(P^{(i)}, P^{(j)}) = 0\}$. Для $n = 4$ и 5 это сделано в [5].

Для $n \leq 5$ обозначим корни многочлена P (соответственно $P', P'', P''', P^{(4)}$) через $x_1 \leq \dots \leq x_5$ (соответственно через $f_1 \leq \dots \leq f_4, s_1 \leq s_2 \leq s_3, t_1 \leq t_2, l$). Для $n = 3$ рассмотрим семейство $P(x, a) = x^3 - x + a$. Тогда $\Pi = [-2\sqrt{3}/9, 2\sqrt{3}/9]$, $D(0, 1) = \{\pm 2\sqrt{3}/9\}$, $D(0, 2) = \{0\}$. Для $a < 0$, $a \in \Pi$ (соответственно $a > 0$, $a \in \Pi$) справедливы неравенства $x_1 < f_1 < x_2 < s_1 < f_2 < x_3$ (соответственно $x_1 < f_1 < s_1 < x_2 < f_2 < x_3$).

1 $(0, f, 0, s, f, t, s, 0, f, 0)$,	6 $(0, f, 0, s, t, f, s, 0, f, 0)$,
2 $(0, f, 0, s, f, t, 0, s, f, 0)$,	7 $(0, f, s, 0, t, f, s, 0, f, 0)$,
3 $(0, f, s, 0, f, t, 0, s, f, 0)$,	8 $(0, f, s, 0, t, f, 0, s, f, 0)$,
4 $(0, f, 0, s, f, 0, t, s, f, 0)$,	9 $(0, f, s, t, 0, f, s, 0, f, 0)$,
5 $(0, f, s, 0, f, 0, t, s, f, 0)$,	10 $(0, f, s, t, 0, f, 0, s, f, 0)$,

Рис. 1. Случай $n = 4$

Рассмотрим для $n = 4$ семейство $P(x, a, b) = x^4 - x^2 + ax + b$, $x, a, b \in \mathbb{R}$. Областью гиперболичности Π семейства P является замыкание внутренности криволинейного треугольника DEA , имеющего точки возврата D и E , см. рис. 1. Конфигурации корней многочленов P, P', P'', P''' (обозначенных соответственно через $0, f, s, t$) указаны возле рисунка; совпадающие корни указаны в квадратных скобках. Согласно общей формуле, приведенной во введении, имеются 12 невырожденных конфигураций, удовлетворяющих (1). Отсутствие двух конфигураций связано с тем, что $D(1, 3)$ проходит через точку пересечения двух прямых, из которых состоит $D(0, 2)$.

3. Переопределенные страты. Обозначим через $\text{Pol}_n^{\mathbb{C}}$ (соответственно Pol_n) пространство всех многочленов степени n с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 (соответственно всех гиперболических многочленов степени n со старшим коэффициентом 1). Множество всевозможных наборов многочленов $(P_n, \dots, P_1)$, где $P_i \in \text{Pol}_i^{\mathbb{C}}$ (соответственно $P_i \in \text{Pol}_i$), можно отождествить с пространством $\tilde{X}$ корней этих многочленов (мы обозначаем корни многочлена P_i через x_j^i ; в случае Pol_n выполняются неравенства $x_1^i \leq \dots \leq x_{n-i}^i$). Стратифицируем $\tilde{X}$. Страт коразмерности k — это подмножество пространства $\tilde{X}$, определяемое k независимыми равенствами вида $x_{j_1}^{i_1} = x_{j_2}^{i_2}$, $(j_1, i_1) \neq (j_2, i_2)$. Для $P \in \text{Pol}_n^{\mathbb{C}}$ или $P \in \text{Pol}_n$ положим $P^{n-i} = ((n-i)!/n!)P^{(i)}$. Можно вложить Pol_n в $\tilde{X}$, отображая $P \in \text{Pol}_n$ в $(P^n, \dots, P^1)$; обозначим это вложение через π . Для страта $S \in \tilde{X}$ обозначим через S' его пересечение с $\pi(\text{Pol}_n)$. Страт S называется *переопределенным*, если его коразмерность в $\tilde{X}$ (называемая его *порядком*, $\text{ord } S$) больше, чем коразмерность множества S' в $\pi(\text{Pol}_n)$ (называемая его *коразмерностью*, $\text{codim } S$). Множество S' , когда оно непусто, называется стратом области Π (переопределенным стратом, если страт S переопределенный).

В случае $n = 5$ рассмотрим семейство $P = x^5 - x^3 + ax^2 + bx + c$. Множества Π и $D(i, j)$ инвариантны относительно инволюции $\sigma: (a, b, c) \mapsto (-a, b, -c)$.

ТЕОРЕМА 2. Для $n < 4$ не существует переопределенных стратов. Для $n = 4$ точки A и B (см. рис. 1) определяют единственные переопределенные страты области Π . Для $n = 5$ единственные переопределенные страты множества Π — это точки $\Sigma, \Phi, F \in D(2, 4)$, где

$$\begin{aligned} \Sigma: x_2 = t_1, x_4 = t_2, x_3 = s_2 = l, & \quad \text{ord } \Sigma = 4, \text{codim } \Sigma = 3, \\ \Phi: x_2 = s_1, x_4 = s_3, x_3 = s_2 = l, & \quad \text{ord } \Phi = 4, \text{codim } \Phi = 3, \\ F: x_1 = x_2, x_4 = x_5, x_3 = s_2 = l, f_2 = t_1, f_3 = t_2, & \quad \text{ord } F = 6, \text{codim } F = 3. \end{aligned} \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $n = 5$ следующая конфигурация (удовлетворяющая (1)) корней производных P' и P''' не реализуется: $f_1 < f_2 < t_1 < t_2 < f_3 < f_4$. Ее отсутствие тесно связано с наличием переопределенного страта, определяемого точкой F из теоремы 2, см. [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Вектором кратности* называется вектор, компоненты которого являются кратностями корней гиперболического многочлена. Пример: $[1, 2, 2]$ означает $x_1 < x_2 = x_3 < x_4 = x_5$.

ПРИМЕР 5. Для четного $n \geq 4$ (соответственно нечетного $n \geq 5$) многочлен $P_e = (x^2 - 2/n)^{n/2}$ (соответственно $P_o = x(x^2 - 2/(n-1))^{(n-1)/2}$) определяет переопределенный страт. Действительно, $P_e^{(n-2)}$ делит P_e'' . С другой стороны, многочлен P_e полностью определяется тем, что его вектор кратности равняется $[n/2, n/2]$ и что его первые три коэффициента равняются 1, 0 и -1 ; из этих условий формально не вытекает, что $P_e^{(n-2)}$ делит P_e'' . Верно также, что $P_e^{(n-1)} = n!x$ делит $P_e^{(k)}$, если k нечетно. Для P_o верно, что $P_o^{(n-2)}$ делит P_o' . Однако P_o полностью определяется тем, что его вектор кратности равняется $[(n-1)/2, 1, (n-1)/2]$, что P_o делится на $P_o^{(n-1)} = n!x$ и что первые его три коэффициента равняются 1, 0 и -1 ; в эти условия не входят ни $P_o^{(n-2)}$, ни P_o' . Для $n = 4$ и 5 многочлены P_e и P_o определяются точками A и F (см. теорему 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Многочленом Гегенбауера степени n* называется гиперболический многочлен вида $x^n - x^{n-2} + \dots$, который делится на свою вторую производную (для $n \geq 3$ существует единственный такой многочлен; он является четным при четном n и нечетным при нечетном n). Следовательно, для $n \geq 4$ многочлен Гегенбауера определяет переопределенный страт размерности 0 в семействе $P|_{a_1=0, a_2=-1}$, поскольку он полностью определяется тем, что делится на свою вторую производную, а имеется дополнительное условие, что $P^{(n-1)} = n!x$ делит все его производные, являющиеся многочленами нечетной степени.

Для $n = 3$ (соответственно $n = 4$, $n = 5$) *многочлен Гегенбауера равняется* $x^3 - x$ (соответственно $x^4 - x^2 + 5/36$ (см. точку B на рис. 1), $x^5 - x^3 + 21x/100$ (см. точку Φ в теореме 2)). Интегрируя многочлены, задающие переопределенные страты, можно получать переопределенные страты более высокой размерности в семействах многочленов более высокой степени. В случае Pol_n следует проверить, для каких значений постоянной интегрирования получаемый многочлен гиперболичен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson B. Amer. Math. Monthly, **100**, 864–866 (1993).
2. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 2, 52–53 (1986).
3. Арнольд В. И. Труды Тбилисс. унив., **232/233**, 23–29 (1982).
4. Givental A. B. УМН, **42**, вып. 2, 221–222 (1987).
5. Kostov V. P. Serdica Math. J., **28**, No. 2, 117–152 (2002); Prépublication No. 620 de l'UNSA, juin 2001.
6. Kostov V. P. Proc. Roy. Soc. Edinb., **112**, No. 3–4, 203–211 (1989).
7. Kostov V. P. Serdica Math. J., **25**, No. 1, 47–70 (1999).
8. Kostov V. P., Shapiro B. Z. Bull. Sci. Math., Vol. 126 No. 1, pp. 45–60 (January 2002); Prépublication No. 19 de l'Université de Nice, Juin 2001.
9. Meguerditchian I. Math. Z., **211**, 449–460 (1992).
10. Meguerditchian I. Géométrie du discriminant réel et des polynômes hyperboliques. Thèse de doctorat, Univ. de Rennes I, 1991.
11. Ruskey F. J. Comb. Theory, **52**, 77–101 (1992).
12. Thrall M. Michigan Math. J., **1**, 81–88 (1952).

Université de Nice-Sophia Antipolis,
Laboratoire de Mathématiques
e-mail: kostov@math.unice.fr

Поступило в редакцию
12 ноября 2001 г.

УДК 517.43+517.9

Обратная задача Штурма–Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями*

© 2002. К. ВАН ДЕР МЕЙ, В. Н. ПИВОВАРЧИК

В [1] была рассмотрена следующая краевая задача:

$$y'' + \lambda^2 y - i\lambda p y - qy = 0, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(a) + (-m\lambda^2 + i\alpha\lambda + \beta)y(a) = 0, \quad (3)$$

где λ — спектральный параметр, $a > 0$, $p > 0$, $m > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а вещественная функция $q(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^2(0, a)$. Задача о

*Исследования первого автора выполнены при частичной финансовой поддержке INdAM-GNCS и MURST, а второго — при частичной финансовой поддержке Автономной области Сардинии.